Université de Bretagne-Sud
L3 Informatique

Logique

Travaux Dirigés - Partie 8
Corrigés

Dans ce huitième TD, nous allons aborder la notion de termes du premier ordre, de substitution et l'algorithme d'unification.
Les exercices sont de difficultés diverses et sont à traiter en se basant sur les notions introduites en cours (partie 4).
J'ai choisi de vous proposer un nombre d'exercices limité à 4 pour ce TD. Nous monterons en puissance sur la Logique des Prédicats (LP1) au fur et à mesure des prochains TD. Bon travail !

Exercice 1

On utilise l'algorithme d'unification, rappelé ci-après.

algorithme UNIFICATION
entrée : $\mathcal{S} = \{t_1 \doteq s_1, \ldots, t_n \doteq s_n\}$
sortie : soit une substitution σ (le **upg**) solution de $\mathcal{S}$
soit $\perp$ (pas de solution)
test d'arrêt : ***clash*** ou **cycle** ou aucune règle ne s'applique
%Γ denote un ensemble fini d'équations, au début $\Gamma = \mathcal{S}$
début
%$V(t)$ *et* $V(\Gamma)$ dénotent l'ensemble des variables dans t et dans Γ respectivement
%$\Gamma\{x \leftarrow t\}$ signifie remplacer toutes les occurrences de la variable x dans Γ par t
%$Expr1 \longrightarrow Expr2$ signifie : remplacer $Expr1$ par $Expr2$
Pour chaque $t_i \doteq s_i$ $(1 \leq i \leq n)$ dans Γ appliquer les règles suivantes :
1 • $\{t \doteq t\} \bigcup \Gamma \longrightarrow \Gamma$
2 • si t n'est pas une variable :
$\{t \doteq x\} \bigcup \Gamma \longrightarrow \{x \doteq t\} \bigcup \Gamma$
3 • si x variable : $\{x \doteq t\} \bigcup \{x \doteq s\} \bigcup \Gamma \longrightarrow \{x \doteq t\} \bigcup \{t \doteq s\} \bigcup \Gamma$
4 • $\{f(t_1, \ldots, t_n) \doteq f(s_1, \ldots, s_n)\} \bigcup \Gamma \longrightarrow \{t_1 \doteq s_1\} \bigcup, \ldots, \bigcup \{t_n \doteq s_n\} \bigcup \Gamma$
5 • si $x \notin V(t)$ et $x \in V(\Gamma)$:
$\{x \doteq t\} \bigcup \Gamma \longrightarrow \{x \doteq t\} \bigcup \Gamma\{x \leftarrow t\}$
% par exemple si l'on a $x = h(y)$, $y = f(u)$ il **faut faire** $x = h(f(u))$, $y = f(u)$
6 • $\{f(t_1, \ldots, t_n) \doteq g(s_1, \ldots, s_m)\} \bigcup \Gamma \longrightarrow \perp$ **(*clash* ou conflit)**
% c'est-à-dire les symboles de fonction sont constants
7 • si $x \in V(t)$ et t n'est pas une variable, c'est-à-dire si $t \neq x$:
% test d'occurrence (*occurs check*)
$\{x \doteq t\} \bigcup \Gamma \longrightarrow \perp$ **(cycle)**
% c'est-à-dire les termes infinis ne sont pas admis dans σ
fin

a) Trouver la solution (si elle existe) de l'équation :

$$f(x, g(x, y)) \doteq f(g(y, z), g(g(h(u), y), h(u)))$$

a)

$\Gamma_0 = \{f(x,\ g(x,y)) \ \doteq\ f(g(y,z),\ g(g(h(u),y),h(u)))\}$

R-4 sur Γ_0 = donne :

$\Gamma_1 = \{x \doteq g(y,z)\ \ ,\ \ g(x,y) \doteq g(g(h(u),y),h(u))\}$

R-4 sur Γ_1 = donne :

$\Gamma_2 = \{x \doteq g(y,z)\ \ ,\ \ x \doteq g(h(u),y)\ \ ,\ \ y \doteq h(u)\}$

R-3 sur Γ_2 = donne :

$\Gamma_3 = \{x \doteq g(y,z)\ \ ,\ \ g(y,z) \doteq g(h(u),y)\ \ ,\ \ y \doteq h(u)\}$

R-4 sur Γ_3 = donne :

$\Gamma_4 = \{x \doteq g(y,z)\ \ ,\ \ y \doteq h(u)\ \ ,\ \ z \doteq y\}$

R-5 sur Γ_4 = donne :

$\Gamma_5 = \{x \doteq g(h(u),h(u))\ \ ,\ \ y \doteq h(u)\ \ ,\ \ z \doteq h(u)\}$

On ne peut appliquer aucune règle, on s'arrête.

Solution : $\sigma = \{\mathbf{x \leftarrow g(h(u),h(u)),\ \ y \leftarrow h(u),\ \ z \leftarrow h(u)}\}$

b) Trouver la solution (si elle existe) de l'équation :

$$f(x, f(u, x)) \doteq f(f(y, a), f(z, f(b, z)))$$

1. $x \doteq f(y,a)$	R − 4
2. $u \doteq z$	R − 4 2 fois
3. $x \doteq f(b,z)$	R − 4 2 fois
4. $f(y,a) \doteq f(b,z)$	1,3, R − 3
5. $y \doteq b$	4, R − 4
6. $z \doteq a$	4, R − 4
7. $u \doteq a$	2,6, R − 5

Solution : $\sigma = \{\mathbf{x \leftarrow f(b,a),\ \ y \leftarrow b,\ \ u \leftarrow a,\ \ z \leftarrow a}\}$

c) Etant données les substitutions :

$$\theta : \{x \mapsto a, y \mapsto f(z), z \mapsto x\}$$

et

$$\sigma = \{x \mapsto b, z \mapsto c, u \mapsto d\}$$

Donner la substituion $\sigma \circ \theta$.

θ	σ	$\sigma \circ \theta(\theta\sigma)$
$x \mapsto a$	$x \mapsto b$	$x \mapsto a$
$y \mapsto f(z)$	$y \mapsto y$	$y \mapsto f(c)$
$z \mapsto x$	$z \mapsto c$	$z \mapsto b$
$u \mapsto u$	$u \mapsto d$	$u \mapsto d$
$v \mapsto v$	$v \mapsto v$	$v \mapsto v$
$w \mapsto w$	$w \mapsto w$	$w \mapsto w$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

$$\sigma \circ \theta = \{\mathbf{x} \leftarrow \mathbf{a},\ \ \mathbf{y} \leftarrow \mathbf{f(c)},\ \ \mathbf{z} \leftarrow \mathbf{b},\ \ \mathbf{u} \leftarrow \mathbf{d}\}$$

d) Considérons l'équation $t_1 \doteq t_2$ et $V(t_1) \cap V(t_2) = \emptyset$.

La règle **cycle** dans l'algorithme d'unification est-elle toujours nécessaire ? Pouvez-vous donner une condition suffisante pour pouvoir se passer de la règle **cycle** ?

Oui, elle est toujours nécessaire. Considérer l'équation :
$f(x, g(x)) \doteq f(h(y), y)$
Clairement, $Var(f(x, g(x))) \cap Var(f(h(y), y)) = \emptyset$
Si l'on n'applique pas la règle cycle on a :
$x \doteq h(y)$
$y \doteq g(x)$
c'est-à-dire :
$x = h(g(x))$
qui est un terme infini.

Une condition suffisante pour pouvoir se passer de la règle cycle est :
$Var(t_1) \cap Var(t_2) = \emptyset$ **et** (t_1 **ou** t_2) **linéaire (un terme** t **est dit linéaire ssi chaque variable apparaît** ***au plus*** **une fois dans** t**).** ■

Exercice 2

Dans un calcul que l'on appelle *equivalential calculus* en anglais, les fbf du langage correspondant sont de la forme $e(X, Y)$ où e est un symbole constant (pour équivalent) et X, Y des (méta)variables dénotant des fbf du langage.

La seule règle d'inférence est :

$$CD : \frac{e(A,B) \quad C}{\sigma B} \quad \text{avec} \quad \sigma = upg(A,C)$$

Questions :

Entant données les deux fbf :

$$e(X, e(X, e(Y,Y)))$$

et

$$e(Z,Z)$$

1. Peut-on appliquer CD ?
2. Si c'est le cas, quelles sont les possibilités ?
3. Si l'on peut appliquer CD, quelle(s) est (sont) la (les) conséquence(s) directe(s) ?

Les possibilités d'identification des (sous-)formules correspondant à A, B, C dans CD sont :

1.

$$e(\underbrace{X}_{A}, \underbrace{e(X, e(Y,Y))}_{B})$$

$$\underbrace{e(Z,Z)}_{C}$$

2.

$$e(\underbrace{X}_{B}, \underbrace{e(X, e(Y,Y))}_{A})$$

$$\underbrace{e(Z,Z)}_{C}$$

3.

$$\underbrace{e(X, e(X, e(Y,Y)))}_{C}$$

$$e(\underbrace{Z}_{A}, \underbrace{Z}_{B})$$

4.

$$\underbrace{e(X, e(X, e(Y,Y)))}_{C}$$

$$e(\underbrace{Z}_{B}, \underbrace{Z}_{A})$$

Il reste à calculer trois upg et trois conséquences directes au cas où les upg existent les cas 3. et 4. étant évidemment identiques.

$\sigma = \{X \leftarrow e(Z,Z)\}$
$\sigma B = e(e(Z,Z),\ e(Y,Y))$

$\sigma = \{X \leftarrow e(Y,Y)\}$
$\sigma B = e(Y,Y)$

$\sigma = \{Z \leftarrow e(X,\ \ e(X,\ e(Y,Y)))\}$
$\sigma B = e(X,\ \ e(X,\ e(Y,Y)))$

Exercice 3

L'algorithme d'unification ne suppose aucune propriété pour les fonctions dénotées par les symboles fonctionnels et donne un résultat (substitution) unique, à un renommage des variables près.

Si l'on suppose que les (ou certaines des) fonctions binaires dénotées sont commutatives, par exemple :

$$\forall x_1 \forall x_2 . f(x_1, x_2) = f(x_2, x_1)$$

Pouvez-vous modifier l'algorithme d'unification afin de tenir compte de cette propriété ?

Par exemple, pour l'équation :

$$f(g(a,b), x) \doteq f(h(c), g(y,z))$$

l'algorithme d'unification retournerait ▲ (pas de solution), mais une fois modifié comme demandé, avec f et g commutatives, il donnerait comme solutions :

$$\sigma_1 = \{x \leftarrow h(c), y \leftarrow a, z \leftarrow b\}$$

et

$$\sigma_2 = \{x \leftarrow h(c), y \leftarrow b, z \leftarrow a\}$$

Il suffit d'appliquer l'algorithme d'unification à toutes les fonctions obtenues par permutation des arguments des fonctions binaires commutatives initiales. S'il y a n

occurences de fonctions binaires, on applique 2^n fois l'algorithme d'unification.

Alternativement, il suffit d'appliquer R-4 à toutes les permutations des arguments des deux fonctions considérées.

Exercice 4

Montrer, à l'aide de l'algorithme d'unification (modifié à l'exercice 3) que, si les prémisses non conditionnelles (c'est-à-dire celles ne contenant pas $\Rightarrow$) sont des littéraux, les règles MP (modus ponens) et MT (modus tollens) :

$$MP : \frac{A \quad A \Rightarrow B}{B}$$

$$MT : \frac{\neg B \quad A \Rightarrow B}{\neg A}$$

sont des cas particuliers de la règle de résolution :

$$R : \frac{X \vee \mathcal{X} \quad \neg X \vee \mathcal{Y}}{\mathcal{X} \vee \mathcal{Y}}$$

- **Pour pouvoir comparer les règles et vérifier ce qui est demandé, on doit choisir un même langage pour représenter les trois règles. Nous choisissons le langage des clauses.**

• Pour pouvoir appliquer l'algorithme UNIFICATION (et UNIFICATION modifié) nous considérons les connectifs comme des symboles fonctionnels.

• Les termes sont formés à partir des symboles fonctionnels d'arité fixe $\vee^{(2)}$, $\neg^{(1)}$, ce qui explique l'utilisation de ϵ dénotant comme d'habitude la chaîne vide de symboles (c'est-à-dire la disjonction ne contenant aucun disjoint) dans les termes réprésentant les règles d'inférence.

• Nous distinguons clairement les symboles du langage ($\vee$, $\neg$) de ceux du méta-langage (concl, et) et nous remplaçons $\neg\neg\mathcal{A}$ par $\mathcal{A}$.

• Il s'agit d'un problème de *filtrage*, donc nous utilisons pour R, des symboles réservés d'habitude aux variables.

• A, B, X dénotent des littéraux ; ϵ, $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ des clauses.

MP : concl (et $(\vee(A, \epsilon)$, $\vee(\neg A, \mathcal{B}))$, $\mathcal{B})$

MT : concl (et $(\vee(\neg B, \epsilon)$, $\vee(\neg\mathcal{A}, B))$, $\neg\mathcal{A})$

R : concl (et $(\vee(X, \mathcal{X})$, $\vee(\neg X, \mathcal{Y}))$, $\vee(\mathcal{X}, \mathcal{Y}))$

La solution de l'équation :
concl (et $(\vee(A, \epsilon)$, $\vee(\neg A, \mathcal{B}))$, $\mathcal{B}) \doteq$ concl (et $(\vee(X, \mathcal{X})$, $\vee(\neg X, \mathcal{Y}))$, $\vee(\mathcal{X}, \mathcal{Y}))$
trouvé par UNIFICATION est :
$\sigma_{R-MP} = \{X \leftarrow A,\ \mathcal{X} \leftarrow \epsilon,\ \mathcal{Y} \leftarrow \mathcal{B}\}$

La solution de l'équation :
concl (et $(\vee(\neg B, \epsilon)$, $\vee(\neg\mathcal{A}, B))$, $\mathcal{A}) \doteq$ concl (et $(\vee(X, \mathcal{X})$, $\vee(\neg X, \mathcal{Y}))$, $\vee(\mathcal{X}, \mathcal{Y}))$
trouvé par UNIFICATION modifié est :
$\sigma_{R-MT} = \{X \leftarrow B,\ \mathcal{X} \leftarrow A,\ \mathcal{Y} \leftarrow \epsilon\}$ ■