Université Bretagne Sud
L3 Informatique

Logique
Travaux Dirigés - Partie 5

Ce cinquième TD est consacré aux systèmes formels pour la Logique Propositionnelle (LP0).
Les exercices sont de difficultés diverses et sont à traiter en se basant sur les notions introduites en cours (parties 3.4, 3.5).
Bon travail !

Exercice 1

Prouver la partie *si* du **théorème de la déduction** (partie 3.5 du cours).

Exercice 2

On a défini dans le cours (partie 3.5) le système formel $\mathcal{S}_1$.

Prouver que $\mathcal{S}_1$ est :
a) correct ;
b) consistant ;
c) décidable (on pourra supposer déjà démontrée la complétude (adéquation) de $\mathcal{S}_1$).

Exercice 3

On a défini dans le cours (partie 3.5) le système formel $\mathcal{S}_1$.

Donner, dans $\mathcal{S}_1$, les démonstrations (ou déductions) demandées :

a) $\vdash (\neg A \Rightarrow A) \Rightarrow A$

b) $A \Rightarrow (B \Rightarrow C), B \vdash A \Rightarrow C$

c) $A \Rightarrow B, B \Rightarrow C, A \vdash C$

d) $\neg B \Rightarrow \neg A, A \vdash B$

e) $A \Rightarrow B, B \Rightarrow C \vdash A \Rightarrow C$

f) $\vdash \neg\neg A \Rightarrow A$

g) $\vdash A \Rightarrow \neg\neg A$

h) $\vdash (A \Rightarrow B) \Rightarrow ((B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$

i). $\vdash (A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (B \Rightarrow (A \Rightarrow C))$

Exercice 4

Montrer que dans $\mathcal{S}_1$ la consistance par rapport à la négation et l'absolue consistance coïncident, c'est-à-dire que $\mathcal{S}_1$ est consistant pour la négation si et seulement si $\mathcal{S}_1$ est absolument consistant.

Exercice 5

On définit un système formel $\mathcal{S}_2 =< \mathcal{L}, \mathcal{R}, \mathcal{A} >$ pour la LP0 de la façon suivante.

$\mathcal{L}$ est le langage de la LP0 utilisant l'ensemble de connectifs $\{\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$.

$\mathcal{R}$ est limité au *modus ponens* (MP).

$\mathcal{A}$ consiste en les quatre schémas d'axiomes ci-dessous :

(A_1) $P \vee P \Rightarrow P$

(A_2) $Q \Rightarrow (P \vee Q)$

(A_3) $(P \vee Q) \Rightarrow (Q \vee P)$

(A_4) $(Q \Rightarrow R) \Rightarrow ((P \vee Q) \Rightarrow (P \vee R))$

Les *définitions* suivantes peuvent être utilisées :

(D_1) $P \Rightarrow Q) \overset{\text{def}}{:} \neg P \vee Q$

(D_2) $P \wedge Q \overset{\text{def}}{:} \neg(\neg P \vee \neg Q)$

(D_2) $P \Leftrightarrow Q \overset{\text{def}}{:} (P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$

Donner les démonstrations dans $\mathcal{S}_2$ de :

a) $\vdash Q \Rightarrow (P \Rightarrow Q)$

b) $\vdash (P \Rightarrow \neg P) \Rightarrow \neg P$

c) $\vdash (P \Rightarrow \neg Q) \Rightarrow (Q \Rightarrow \neg P)$

d) $\vdash (Q \Rightarrow R) \Rightarrow ((P \Rightarrow Q) \Rightarrow (P \Rightarrow R)$

e) $\vdash P \Rightarrow (P \vee P)$

f) $\vdash P \Rightarrow P$

g) $\vdash P \vee \neg P$

h) $\vdash P \Rightarrow \neg\neg P$

Exercice 6

Un autre système formel pour la LP0, que nous appellerons $\mathcal{S}_3$, diffère de $\mathcal{S}_1$ (cf. cours, partie 3.5) seulement dans l'ensemble de schémas d'axiomes.

L'ensemble de schémas d'axiomes de $\mathcal{S}_3$ (qui remplace l'ensemble A_1, A_2 et A_3 du cours) est donné par :

(B_1) $\neg A \Rightarrow (A \Rightarrow B)$

(B_2) $B \Rightarrow (A \Rightarrow B)$

(B_3) $(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((\neg A \Rightarrow B) \Rightarrow B)$

(B_4) $(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$

A, B, C dénotant (comme dans $\mathcal{S}_1$) des fbf.

Questions :

a) Peut-on utiliser dans $\mathcal{S}_3$ le (méta-)théorème de la déduction ?

b) Donner la démonstration de :

$$\vdash_{\mathcal{S}_3} A \Rightarrow \neg\neg A$$

Exercice 7

Les questions suivantes correspondent à des notions que vous avez manipulées. Le but est de retrouver les définitions formelles de ces notions et voir à quoi elles correspondent.

(a) Comment définiriez-vous l'équivalence de deux systèmes formels ?

(b) Comment définiriez-vous l'indépendance d'un ensemble de (schémas) d'axiomes ?

(c) A partir de la définition donnée en (b) donner un ensemble de schémas d'axiomes non indépendants pour LP0.

(d) Comment définiriez-vous l'indépendance d'un ensemble de règles d'inférence ?

(e) Quelle serait l'idée de la démonstration de l'équivalence de deux systèmes formels et de l'indépendance de deux ensembles d'axiomes ?

Ces techniques vous semblent-elles toujours applicables ?