Université Bretagne Sud
L3 Informatique

Logique

Travaux Dirigés - Partie 5
Corrigés

Ce cinquième TD est consacré aux systèmes formels pour la Logique Propositionnelle (LP0).
Les exercices sont de difficultés diverses et sont à traiter en se basant sur les notions introduites en cours (parties 3.4, 3.5).
Bon travail !

Exercice 1

Prouver la partie *si* du **théorème de la déduction** (partie 3.5 du cours).

Il faut prouver :

$$\text{Si } \Gamma \vdash_{\mathcal{S}_1} A \Rightarrow B \text{ alors } \Gamma, A \vdash_{\mathcal{S}_1} B$$

Preuve :
Par définition, il existe une déduction de $A \Rightarrow B$ à partir de Γ :

$$\begin{array}{l} \Gamma \\ \vdots \\ A \Rightarrow B \end{array}$$

Si l'on ajoute A aux hypothèses, on obtient B par MP (modus ponens) sur A et $A \Rightarrow B$, c'est-à-dire :

$$\Gamma, A \vdash_{\mathcal{S}_1} B.$$

Exercice 2

On a défini dans le cours (partie 3.5) le système formel $\mathcal{S}_1$.

Prouver que $\mathcal{S}_1$ est :

a) correct ;

La règle d'inférence MP est correcte : en effet, tout modèle de A et $A \Rightarrow B$ est nécessairement un modèle de B (sinon $A \Rightarrow B$ serait F par définition de $\Rightarrow$).
On peut vérifier facilement que tous les schémas d'axiomes sont des tautologies (fbf valides). Donc, par définition de fbf valide et par récurrence sur le nombre de pas de la preuve on conclut que tout théorème de $\mathcal{S}_1$ est une fbf valide.

b) consistant ;

Supposons qu'il existe $A \in \mathcal{L}$ tel que $\vdash_{\mathcal{S}_1} A$ et $\vdash_{\mathcal{S}_1} \neg A$.
Comme le montre a) ci-dessus tout théorème de $\mathcal{S}_1$ est une fbf valide. La négation d'une fbf valide n'est pas une fbf valide, donc il s'agit d'un non-théorème (contraposée).
Une telle fbf A ne peut donc pas exister.

c) décidable (on pourra supposer déjà démontrée la complétude (adéquation) de $\mathcal{S}_1$).

Les tables de vérité (les tableaux sémantiques, la méthode de Davis et Putnam (cf. TD 6), etc.) permettent de décider si une fbf est valide ou pas. Comme nous avons admis que $\mathcal{S}_1$ est adéquat (complet), c'est-à-dire que toute fbf valide est un théorème de $\mathcal{S}_1$, nous avons une procédure de décision pour $\mathcal{S}_1$.

Exercice 3

On a défini dans le cours (partie 3.5) le système formel $\mathcal{S}_1$.

Donner, dans $\mathcal{S}_1$, les démonstrations (ou déductions) demandées :

a) $\vdash (\neg A \Rightarrow A) \Rightarrow A$

1. $(\neg A \Rightarrow \neg A) \Rightarrow ((\neg A \Rightarrow A) \Rightarrow A)$
2. $\neg A \Rightarrow \neg A$

Dans 1., on utilise (A_3) avec $B \leftarrow A$. Dans 2., on utilise l'exemple du cours ($\vdash_{\mathcal{S}_1} A \Rightarrow A$), en faisant $A \leftarrow \neg A$.
On peut toujours utiliser un théorème déjà démontré. La justification en est très simple : on copie sa démonstration en tête de la démonstration qui l'utilise. La démonstration ainsi obtenue respecte la définition de démonstration.
Pour conclure, on fait :

3. $(\neg A \Rightarrow A) \Rightarrow A$ **1., 2. et MP**

b) $A \Rightarrow (B \Rightarrow C), B \vdash A \Rightarrow C$

Nous donnons deux déductions, dont l'une utilise le (méta) théorème de la déduction (abrégé TD).

i) *Sans utiliser le TD*

1. $A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$	hyp.
2. B	hyp.
3. $(A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$	1., (A2), MP
4. $B \Rightarrow (A \Rightarrow B)$	(A1) A ← B, B ← A
5. $A \Rightarrow B$	2., 4., MP
6. $A \Rightarrow C$	3., 5., MP

ii) *En utilisant le TD*

1. $A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$	hyp.
2. B	hyp.
3. A	hyp. suppl.
4. $B \Rightarrow C$	1., 3., MP
5. C	2., 4., MP
6. $A \Rightarrow C$	3., 5., TD

c) $A \Rightarrow B, B \Rightarrow C, A \vdash C$

1. $A \Rightarrow B$	hyp.
2. $B \Rightarrow C$	hyp.
3. A	hyp.
4. B	1., 3., MP
5. C	2., 4., MP

d) $\neg B \Rightarrow \neg A, A \vdash B$

1. $\neg B \Rightarrow \neg A$	hyp.
2. A	hyp.

Attention : à la tentation d'utiliser la contraposée (elle n'a pas encore été démontrée comme étant un théorème de S_1).

3. $(\neg B \Rightarrow \neg A) \Rightarrow ((\neg B \Rightarrow A) \Rightarrow B)$	(A3)
4. $(\neg B \Rightarrow A) \Rightarrow B$	1., 3., MP
5. $A \Rightarrow (\neg B \Rightarrow A)$	(A1), B $\leftarrow \neg$B
6. $\neg B \Rightarrow A$	2., 5., MP
7. B	4., 6., MP

e) $A \Rightarrow B, B \Rightarrow C \vdash A \Rightarrow C$

Nous donnons deux déductions, dont l'une utilise le (méta) théorème de la déduction (abrégé TD).

i) *Sans utiliser le TD*

1. $B \Rightarrow C$	hyp.
2. $(B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow (B \Rightarrow C))$	(A1), $A \leftarrow B \Rightarrow C, B \leftarrow A$
3. $A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$	1., 2., MP
4. $(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$	(A2)
5. $(A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$	3., 4., MP
6. $A \Rightarrow B$	hyp.
7. $A \Rightarrow C$	5., 6., MP

ii) *En utilisant le TD*

1. A	hyp.suppl.
2. $A \Rightarrow B$	hyp.
3. $B \Rightarrow C$	hyp.
4. B	1., 2., MP
5. C	3., 4., MP
6. $A \Rightarrow C$	1., 5., TD

f) $\vdash \neg\neg A \Rightarrow A$

Retrouver les arguments à titre d'exercice.

1. $(\neg A \Rightarrow \neg\neg A) \Rightarrow ((\neg A \Rightarrow \neg A) \Rightarrow A)$
2. $\neg A \Rightarrow \neg A$
3. $(\neg A \Rightarrow \neg\neg A) \Rightarrow A$
4. $\neg\neg A \Rightarrow (\neg A \Rightarrow \neg\neg A)$
5. $\neg\neg A$
6. $\neg A \Rightarrow \neg\neg A$
7. A
8. $\neg\neg A \Rightarrow A$

Autre démonstration :

1. $\neg\neg A$
2. $\neg\neg A \Rightarrow (\neg A \Rightarrow \neg\neg A)$
3. $\neg A \Rightarrow \neg\neg A$
4. $(\neg A \Rightarrow \neg\neg A) \Rightarrow ((\neg A \Rightarrow \neg A) \Rightarrow A)$
5. $(\neg A \Rightarrow \neg A) \Rightarrow A$
6. $\neg A \Rightarrow \neg A$
7. A
8. $\neg\neg A \Rightarrow A$

Encore une :

1. $(\neg A \Rightarrow \neg\neg A) \Rightarrow ((\neg A \Rightarrow \neg A) \Rightarrow A)$
2. $\neg A \Rightarrow \neg A$
3. $(\neg A \Rightarrow \neg\neg A) \Rightarrow A$
4. $\neg\neg A \Rightarrow (\neg A \Rightarrow \neg\neg A)$
5. $(\neg\neg A \Rightarrow A)$

g) $\vdash A \Rightarrow \neg\neg A$

1. $(\neg\neg\neg A \Rightarrow \neg A) \Rightarrow ((\neg\neg\neg A \Rightarrow A) \Rightarrow \neg\neg A)$	(A3), $\mathsf{B} \leftarrow \neg\neg\mathsf{A}$
2. $\neg\neg\neg A \Rightarrow \neg A$	f), $\mathsf{A} \leftarrow \neg\mathsf{A}$
3. $(\neg\neg\neg A \Rightarrow A) \Rightarrow \neg\neg A$	1., 2., MP
4. $A \Rightarrow (\neg\neg\neg A \Rightarrow A)$	(A1), $\mathsf{B} \leftarrow \neg\neg\neg\mathsf{A}$
5. $(A \Rightarrow \neg\neg A)$	4., 3., e)

h) $\vdash (A \Rightarrow B) \Rightarrow ((B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$

1. $A \Rightarrow B,\ \ B \Rightarrow C,\ \ A \vdash C$	c) ci – dessus
2. $A \Rightarrow B,\ \ B \Rightarrow C\ \ \vdash A \Rightarrow C$	1., TD
3. $A \Rightarrow B \vdash (B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$	2., TD
4. $\vdash (A \Rightarrow B) \Rightarrow ((B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$	3., TD

Autre déduction :

1. $A \Rightarrow B$	hyp.suppl.
2. $B \Rightarrow C$	hyp.suppl.
3. $(B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow (B \Rightarrow C))$	(A1), $\mathsf{A} \leftarrow \mathsf{B} \Rightarrow \mathsf{C},\ \ \mathsf{B} \leftarrow \mathsf{A}$
4. $A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$	2., 3., MP
5. $(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$	(A2)
6. $(A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$	4., 5., MP
7. $A \Rightarrow C$	1., 6., MP
8. $A \Rightarrow B,\ \ B \Rightarrow C \vdash A \Rightarrow C$	1., 2., 7.
9. $A \Rightarrow B \vdash (B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$	8., TD
10. $\vdash (A \Rightarrow B) \Rightarrow ((B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$	9., TD

i). $\vdash (A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (B \Rightarrow (A \Rightarrow C))$

1. $A \Rightarrow (B \Rightarrow C),\ \ B \vdash A \Rightarrow C$	b) ci – dessus
2. $A \Rightarrow (B \Rightarrow C) \vdash B \Rightarrow (A \Rightarrow C)$	1., TD
3. $\vdash (A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (B \Rightarrow (A \Rightarrow C))$	2., TD

Exercice 4

Montrer que dans $\mathcal{S}_1$ la consistance par rapport à la négation et l'absolue consistance coïncident, c'est-à-dire que $\mathcal{S}_1$ est consistant pour la négation si et seulement si $\mathcal{S}_1$ est absolument consistant.

On doit montrer : $\mathcal{S}_1$ consistant par rapport à la négation si et seulement si $\mathcal{S}_1$ absolument consistant.

Seulement si)

On prouve la contraposée : *si $\mathcal{S}_1$ n'est pas absolument consistant , alors $\mathcal{S}_1$ n'est pas consistant par rapport à la négation.*

On suppose donc $\tau = \mathcal{L}$, c'est-à-dire que toute fbf est théorème. En particulier :

$$\vdash_{\mathcal{S}_1} A \text{ et } \vdash_{\mathcal{S}_1} \neg A$$

donc $\mathcal{S}_1$ non consistant par rapport à la négation.

Si)

On prouve la contraposée : *si $\mathcal{S}_1$ n'est pas consistant par rapport à la négation, alors $\mathcal{S}_1$ n'est pas absolument consistant.*

On suppose donc qu'il existe $A \in \mathcal{L}$ tel que :

$$\vdash_{\mathcal{S}_1} A \text{ et } \vdash_{\mathcal{S}_1} \neg A$$

Montrons d'abord :

$$A, \neg A \vdash_{\mathcal{S}_1} B$$

1. A	théo. supposé démontré
2. ¬ A	théo. supposé démontré
3. $A \Rightarrow (\neg B \Rightarrow A)$	(A1), $B \leftarrow \neg B$, $A \leftarrow A$
4. $\neg A \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$	(A1), $B \leftarrow \neg B$, $A \leftarrow \neg A$
5. $\neg B \Rightarrow A$	1., 3., MP
6. $\neg B \Rightarrow \neg A$	2., 4., MP
7. $(\neg B \Rightarrow \neg A) \Rightarrow ((\neg B \Rightarrow A) \Rightarrow B)$	(A3)
8. $(\neg B \Rightarrow A) \Rightarrow B$	6., 7., MP
9. B	5., 8., MP

Donc, comme B peut être remplacée par n'importe quelle fbf, nous concluons que toute fbf est théorème.

Exercice 5

On définit un système formel $\mathcal{S}_2 =< \mathcal{L}, \mathcal{R}, \mathcal{A} >$ pour la LP0 de la façon suivante.

$\mathcal{L}$ est le langage de la LP0 utilisant l'ensemble de connectifs $\{\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$.

$\mathcal{R}$ est limité au *modus ponens* (MP).

$\mathcal{A}$ consiste en les quatre schémas d'axiomes ci-dessous :

(A_1) $P \vee P \Rightarrow P$

(A_2) $Q \Rightarrow (P \vee Q)$

(A_3) $(P \vee Q) \Rightarrow (Q \vee P)$

(A_4) $(Q \Rightarrow R) \Rightarrow ((P \vee Q) \Rightarrow (P \vee R))$

Les *définitions* suivantes peuvent être utilisées :

(D_1) $P \Rightarrow Q) \overset{\text{def}}{:} \neg P \vee Q$

(D_2) $P \wedge Q \overset{\text{def}}{:} \neg(\neg P \vee \neg Q)$

(D_2) $P \Leftrightarrow Q \overset{\text{def}}{:} (P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$

Donner les démonstrations dans $\mathcal{S}_2$ de :

a) $\vdash Q \Rightarrow (P \Rightarrow Q)$

1. $Q \Rightarrow (\neg P \vee Q)$	(A2)
2. $Q \Rightarrow (P \Rightarrow Q)$	1., (D1)

b) $\vdash (P \Rightarrow \neg P) \Rightarrow \neg P$

1. $(\neg P \vee \neg P) \Rightarrow \neg P$	(A1)
2. $(P \Rightarrow \neg P) \Rightarrow \neg P$	1., (D1)

c) $\vdash (P \Rightarrow \neg Q) \Rightarrow (Q \Rightarrow \neg P)$

1. $(\neg P \vee \neg Q) \Rightarrow (\neg Q \vee \neg P)$	(A3)
2. $(P \Rightarrow \neg Q) \Rightarrow (Q \Rightarrow \neg P)$	1., (D1)

d) $\vdash (Q \Rightarrow R) \Rightarrow ((P \Rightarrow Q) \Rightarrow (P \Rightarrow R)$

1. $(Q \Rightarrow R) \Rightarrow ((\neg P \vee Q) \Rightarrow (\neg P \vee R))$	(A4)
2. $(Q \Rightarrow R) \Rightarrow ((P \Rightarrow Q) \Rightarrow (P \Rightarrow R))$	1., (D1)

e) $\vdash P \Rightarrow (P \vee P)$

1. $P \Rightarrow (P \vee P)$	(A2)

f) $\vdash P \Rightarrow P$

1. $((P \vee P) \Rightarrow P) \Rightarrow ((P \Rightarrow (P \vee P)) \Rightarrow (P \Rightarrow P))$	d), ci – dessus : $Q \leftarrow P \vee P$; $R \leftarrow P$
2. $(P \vee P) \Rightarrow P$	(A1)
3. $(P \Rightarrow (P \vee P)) \Rightarrow (P \Rightarrow P)$	1., 2., MP
4. $P \Rightarrow (P \vee P)$	e), ci – dessus
5. $P \Rightarrow P$	3., 4., MP

g) $\vdash P \vee \neg P$

1. $P \Rightarrow P$	f), ci – dessus
2. $\neg P \vee P$	1., (D1)
3. $(\neg P \vee P) \Rightarrow (P \vee \neg P)$	(A3)
4. $P \vee \neg P$	2., 3., MP

h) $\vdash P \Rightarrow \neg\neg P$

1. $\neg P \vee \neg\neg P$	g), ci – dessus : $P \leftarrow \neg P$
2. $P \Rightarrow \neg\neg P$	1., (D1)

Exercice 6

Un autre système formel pour la LP0, que nous appellerons $\mathcal{S}_3$, diffère de $\mathcal{S}_1$ (cf. cours, partie 3.5) seulement dans l'ensemble de schémas d'axiomes.

L'ensemble de schémas d'axiomes de $\mathcal{S}_3$ (qui remplace l'ensemble A_1, A_2 et A_3 du cours) est donné par :

(B_1) $\neg A \Rightarrow (A \Rightarrow B)$

(B_2) $B \Rightarrow (A \Rightarrow B)$

(B_3) $(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((\neg A \Rightarrow B) \Rightarrow B)$

(B_4) $(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$

A, B, C dénotant (comme dans $\mathcal{S}_1$) des fbf.

Questions :

a) Peut-on utiliser dans $\mathcal{S}_3$ le (méta-)théorème de la déduction ?

Oui, en vérifiant que :

(B_2) est le même schéma d'axiomes que (A_1) (de $\mathcal{S}_1$) ;

(B_4) est le même schéma d'axiomes que (A_2) (de $\mathcal{S}_1$) ;

et en tenant compte de la remarque du cours (partie 3.5, p.13) : dans la preuve du Théorème de la Déduction, on n'utilise que les axiomes (A_1) et (A_2).

b) Donner la démonstration de :

$$\vdash_{\mathcal{S}_3} A \Rightarrow \neg\neg A$$

1. $(\neg A \Rightarrow (A \Rightarrow \neg\neg A)) \Rightarrow (((\neg\neg A \Rightarrow (A \Rightarrow \neg\neg A)) \Rightarrow (A \Rightarrow \neg\neg A))$
B3, A $\leftarrow \neg$A, B $\leftarrow$ A $\Rightarrow \neg\neg$A
2. $\neg A \Rightarrow (A \Rightarrow \neg\neg A)$
B1, B $\leftarrow \neg\neg$A
3. $(\neg\neg A \Rightarrow (A \Rightarrow \neg\neg A)) \Rightarrow (A \Rightarrow \neg\neg A)$
1., 2., MP
4. $\neg\neg A \Rightarrow (A \Rightarrow \neg\neg A)$
B2, B $\leftarrow \neg\neg$A
5. $A \Rightarrow \neg\neg A$
3., 4., MP. ■

Exercice 7

Les questions suivantes correspondent à des notions que vous avez manipulées. Le but est de retrouver les définitions formelles de ces notions et voir à quoi elles correspondent.

(a) Comment définiriez-vous l'équivalence de deux systèmes formels ?

On dira que deux systèmes formels avec le même langage (ou avec des langages qui peuvent être traduits formellement l'un dans l'autre) sont équivalents si et seulement s'ils ont le même ensemble de théorèmes.

(b) Comment définiriez-vous l'indépendance d'un ensemble de (schémas) d'axiomes ?

Soient :

– le système formel $\mathcal{S}_i :< \mathcal{L}, \mathcal{R}, \mathcal{A} >$;

– un sous-ensemble d'axiomes $\mathcal{X}$ ($\mathcal{X} \subseteq \mathcal{A}$) ;

– le système formel $\mathcal{S}_j :< \mathcal{L}, \mathcal{R}, \mathcal{A} \setminus \mathcal{X} >$.

On dira que $\mathcal{X}$ est indépendant si et seulement si :

$$\nvdash_{\mathcal{S}_j} x \text{ pour tout } x \in \mathcal{X}.$$

Par exemple, le système $\mathcal{S}_1' :< \mathcal{L}, \mathcal{R}, \mathcal{A}' >$ (voir c) ci-dessous) qui diffère de $\mathcal{S}_1$ seulement dans l'ensemble d'axiomes, n'est pas indépendant.

(c) A partir de la définition donnée en (b) donner un ensemble de schémas d'axiomes non indépendants pour la LP0.

$$\mathcal{A}' = \{(A_1), (A_2), (A_3), (A \Rightarrow A)\}$$

puisque $\vdash_{\mathcal{S}_1} A \Rightarrow A$ (exemple du cours).

(d) Comment définiriez-vous l'indépendance d'un ensemble de règles d'inférence ?

(analogue à b))

Soient :

– le système formel $\mathcal{S}_i :< \mathcal{L}, \mathcal{R}, \mathcal{A} >$;

– un sous-ensemble de règles d'inférence $\mathcal{Y}$ ($\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{R}$) ;

– le système formel $\mathcal{S}_j :< \mathcal{L}, \mathcal{R} \setminus \mathcal{Y}, \mathcal{A} >$.

On dira que $\mathcal{Y}$ est indépendant si et seulement s'il existe $A \in \mathcal{L}$ tel que $\vdash_{\mathcal{S}_i} A$ et $\nvdash_{\mathcal{S}_j} A$.

(e) Quelle serait l'idée de la démonstration de l'équivalence de deux systèmes formels et de l'indépendance de deux ensembles d'axiomes ?
Ces techniques vous semblent-elles toujours applicables ?

Trouver (ce n'est pas garanti que l'on trouvera) une propriété P telle que :
1. les éléments de $\mathcal{A} \setminus \mathcal{X}$ ont la propriété P ;
2. les règles de $\mathcal{R}$ préservent la propriété P ;
3. les éléments de $\mathcal{X}$ n'ont pas la propriété P.

Remarque. Cette technique a été utilisée pour prouver l'indépendance du célèbre « axiome des parallèles », ce qui a donné naissance aux géométries non-euclidiennes. On a trouvé des interprétations qui sont des modèles des autres axiomes de la géométrie euclidienne et des contre-modèles de l'axiome des parallèles.