Université Bretagne Sud
L3 Informatique

Logique

Travaux Dirigés - Partie 4
Corrigés

Ce quatrième TD est consacré essentiellement à la méthode des Tableaux Sémantiques pour la Logique Propositionnelle (LP0).
Les exercices sont de difficultés diverses et sont à traiter en se basant sur les notions introduites en cours (partie 3.3).
Pour traiter le dernier exercice, il est nécessaire de lire au préalable la partie 3.4 du cours ; celle-ci présente diverses notions sur les systèmes formels.
Bon travail !

Exercice 1

Montrer, en utilisant la méthode des tableaux sémantiques que *l'ensemble de formules* (numérotées de 1 à 5) ci-dessous est insatisfaisable (contradictoire, incohérent). En utilisant deux ordres d'analyse différents montrer que la taille de l'arbre obtenu dépend de cet ordre.

1. $\neg((P \wedge (Q \Rightarrow (R \vee S))) \Rightarrow (P \vee Q))$
2. $P \wedge (Q \Rightarrow (R \vee S))$
3. $\neg(P \vee Q)$
4. P
5. $Q \Rightarrow (R \vee S)$

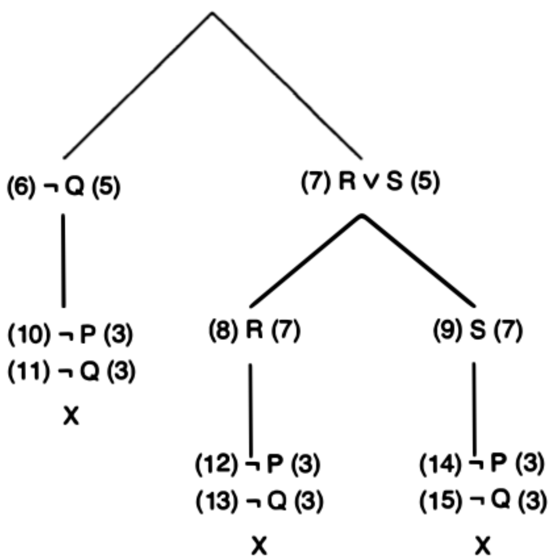
Arbre 1

(1) $\neg((P \wedge (Q \Rightarrow (R \vee S))) \Rightarrow (P \vee Q))$
(2) $P \wedge (Q \Rightarrow (R \vee S))$
(3) $\neg(P \vee Q)$
(4) P
(5) $Q \Rightarrow (R \vee S)$

(6) $\neg P$ (3)
(7) $\neg Q$ (3)
(8) $\times$ (6), (4)

Arbre 2

(1) $\neg((P \wedge (Q \Rightarrow (R \vee S))) \Rightarrow (P \vee Q))$
(2) $P \wedge (Q \Rightarrow (R \vee S))$
(3) $\neg(P \vee Q)$
(4) P
(5) $Q \Rightarrow (R \vee S)$

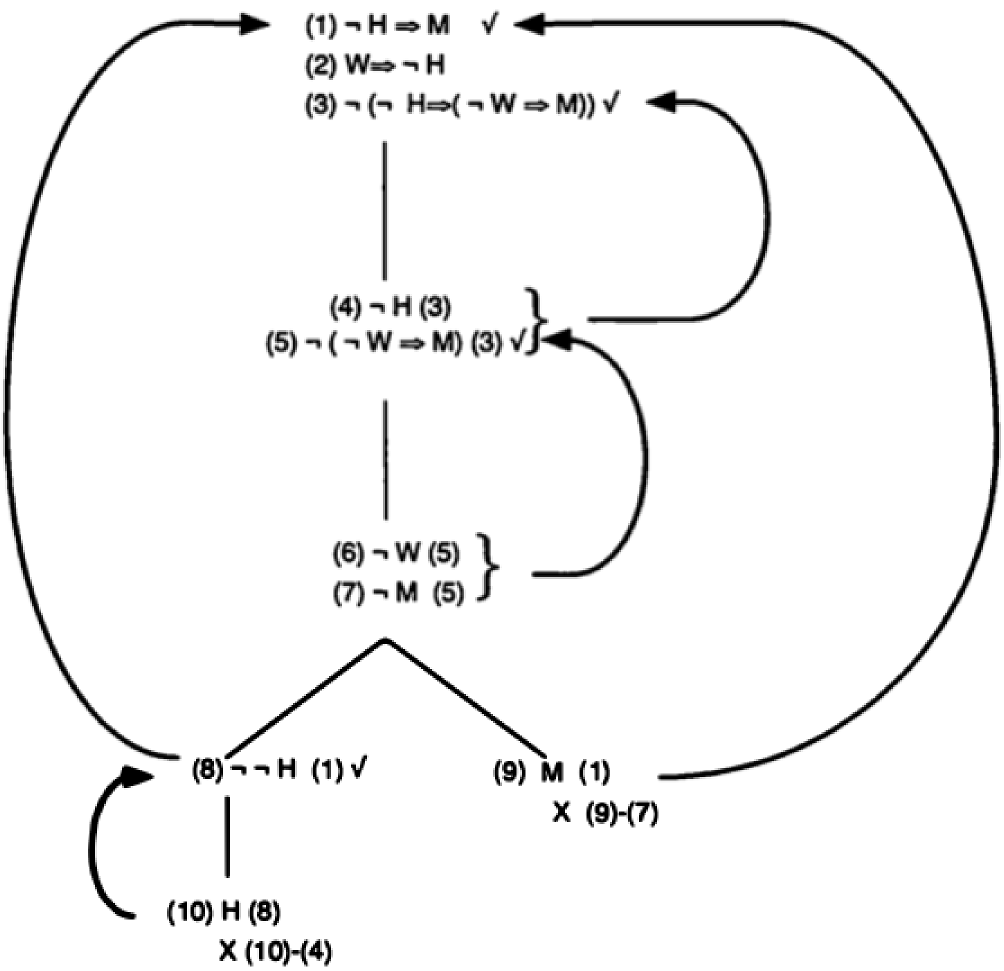


Exercice 2

Etudier à l'aide de la méthode des tableaux sémantiques la correction des raisonnements (a) à (f) et la validité de la formule (g) ci-dessous.

(a)

$$\frac{\begin{array}{c}\neg H \Rightarrow M \\ W \Rightarrow \neg H\end{array}}{\neg H \Rightarrow (\neg W \Rightarrow M)}$$



Le raisonnement est correct.

Les }, les $\surd$ et les flèches correspondent aux opérations :

$$\mathcal{F} \leftarrow (\mathcal{F} \setminus \{f_i\}) \cup \{f_i^j\}$$

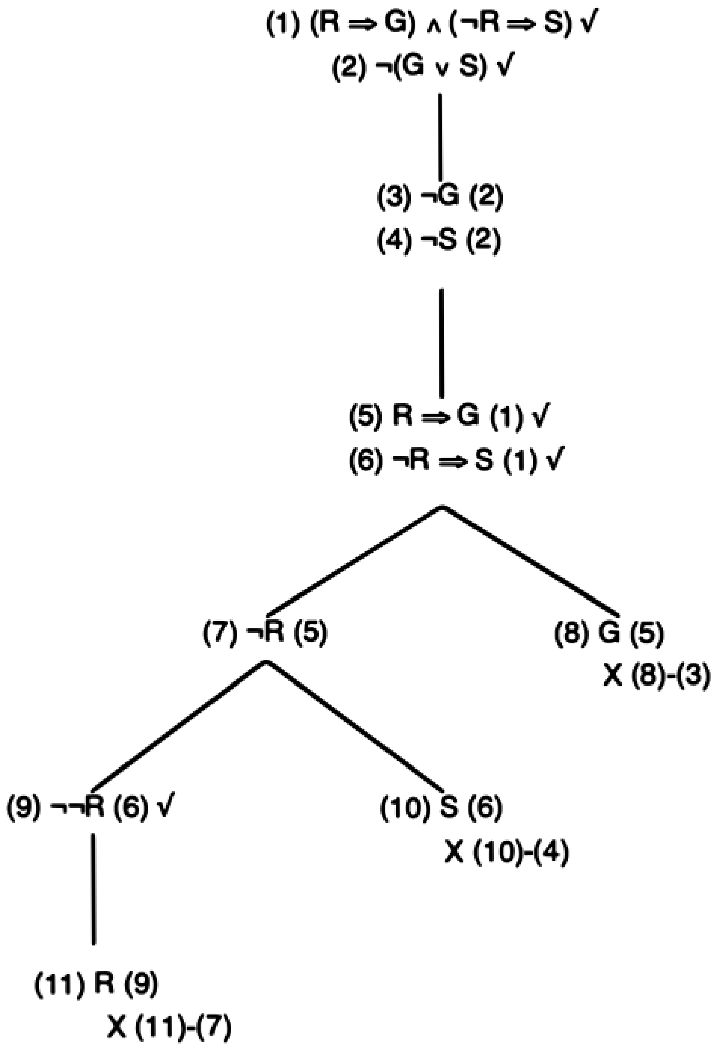
et

$$\mathcal{F} \leftarrow \mathcal{F} \setminus \{f_i\}$$

de l'algorithme Tableaux Sémantiques pour la LP0.

(b)

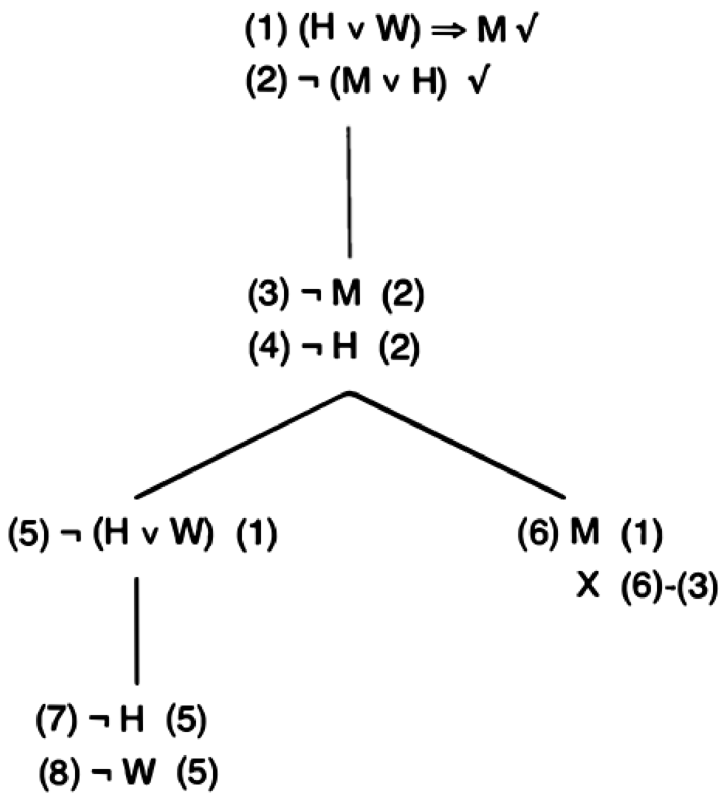
$$\frac{(R \Rightarrow G) \wedge (\neg R \Rightarrow S)}{G \vee S}$$



Raisonnement correct.

(c)

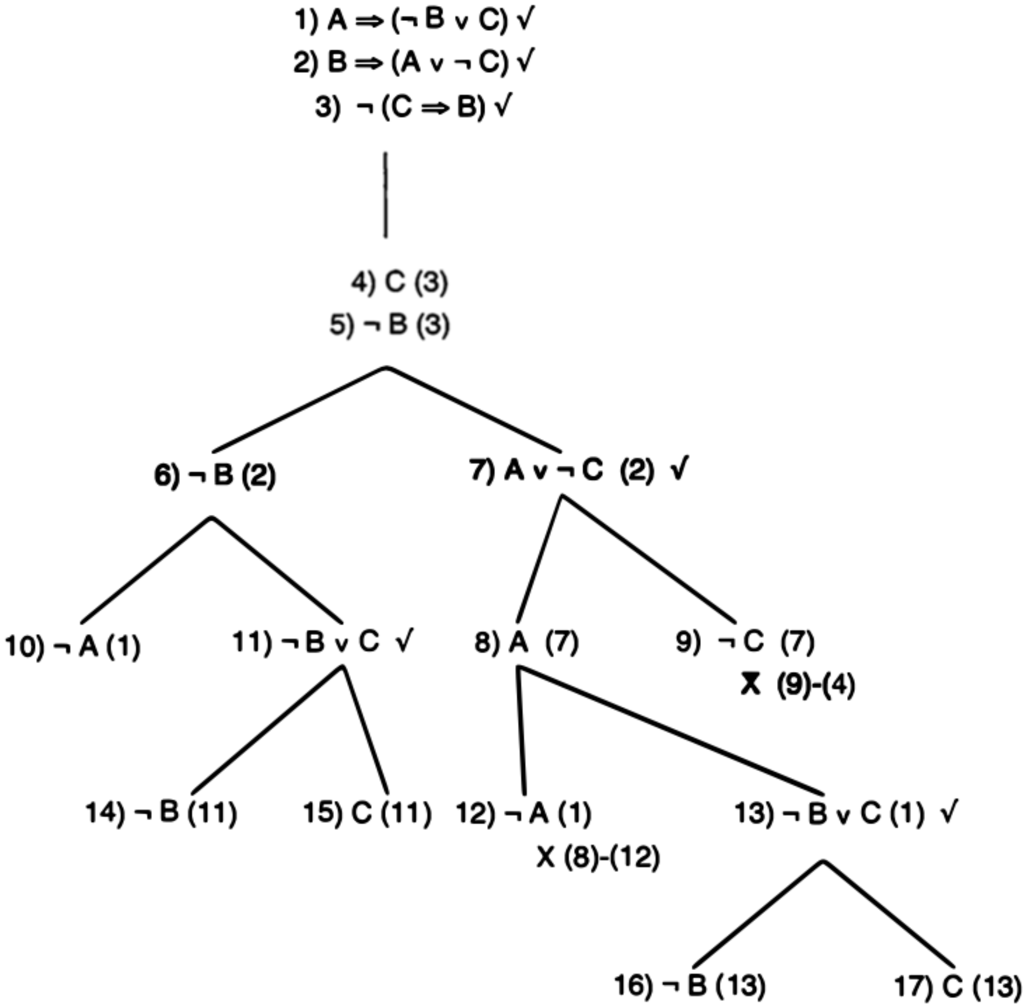
$$\frac{(H \vee W) \Rightarrow M}{M \vee H}$$



Raisonnement incorrect. Contre-exemple : $\{\neg H, \neg M, \neg W\}$.

(d)

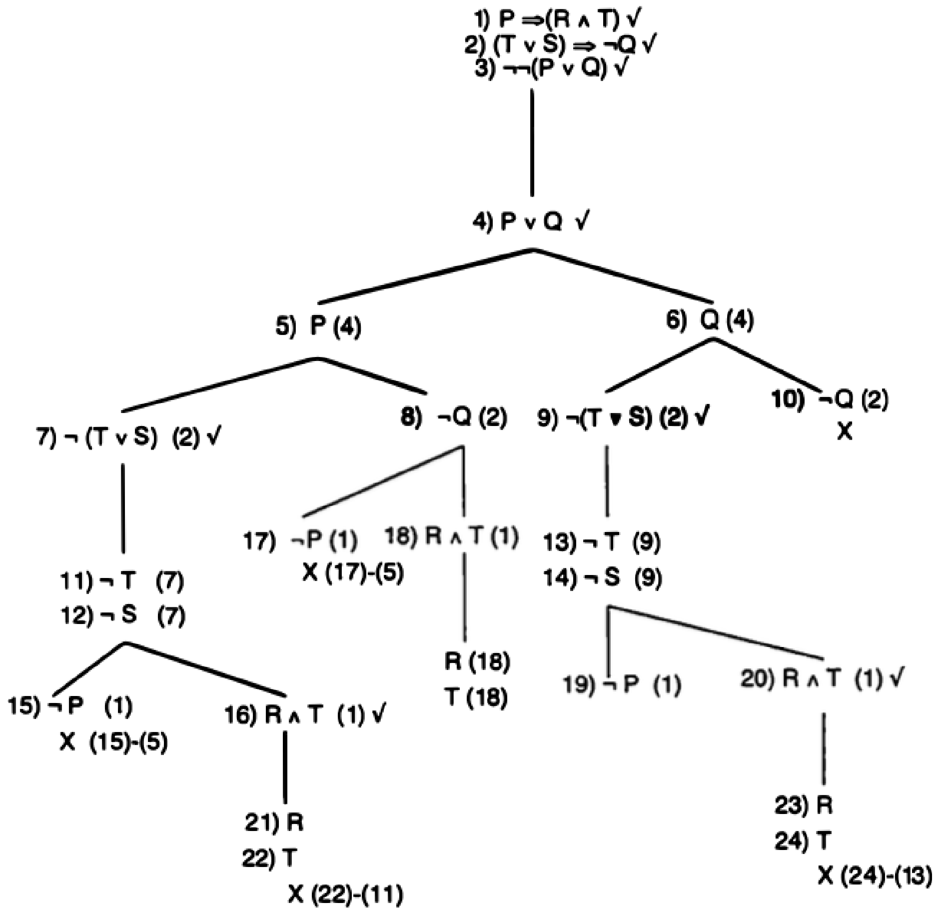
$$\frac{\begin{array}{c} A \Rightarrow (\neg B \vee C) \\ B \Rightarrow (A \vee \neg C) \end{array}}{C \Rightarrow B}$$



Raisonnement incorrect, contre-exemples : $\{\neg A, \neg B, C\}$, $\{\neg B, C\}$, $\{A, \neg B, C\}$.

(e)

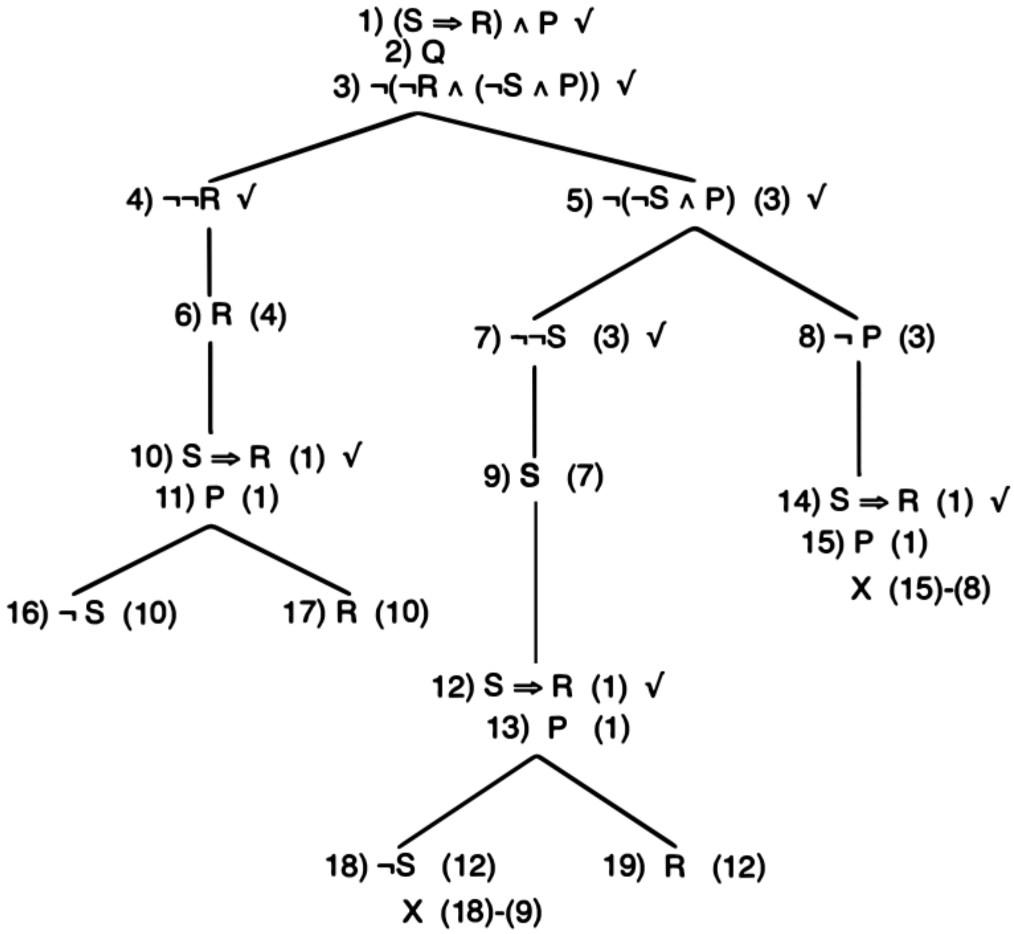
$$\begin{array}{c} P \Rightarrow (R \wedge T) \\ (T \vee S) \Rightarrow \neg Q \\ \hline \neg(P \vee Q) \end{array}$$



Raisonnement incorrect, contre-exemples : $\{P, \neg Q, R, T\}$, $\{\neg P, Q, \neg S, \neg T\}$.

(f)

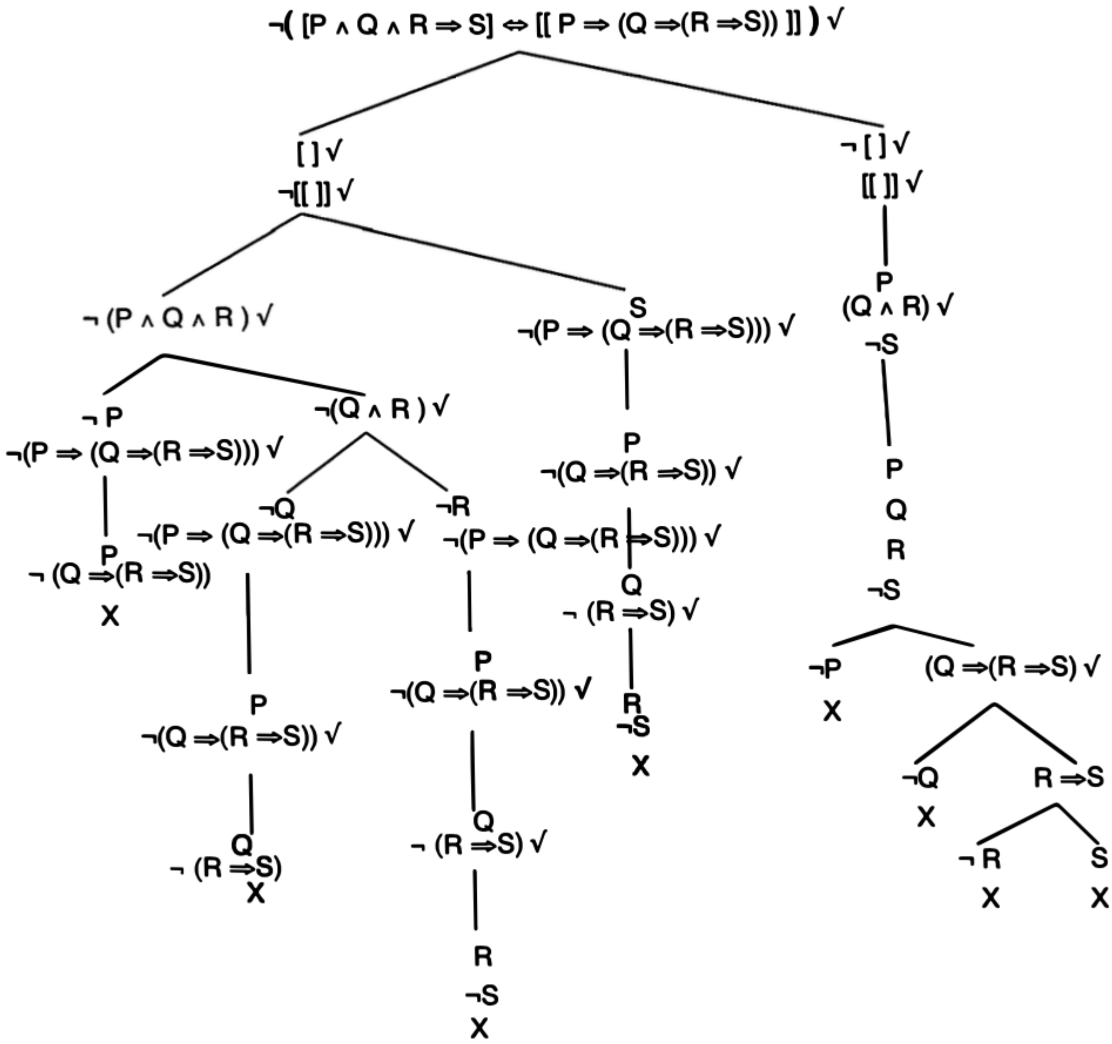
$$\frac{\begin{array}{c}(S \Rightarrow R) \wedge P \\ Q\end{array}}{\neg R \wedge (\neg S \wedge P)}$$



Raisonnement incorrect, contre-exemples : $\{P, Q, R, \neg S\}$, $\{P, Q, R\}$, $\{P, Q, R, S\}$.

(g)

$$[(P \wedge Q \wedge R) \Rightarrow S] \Leftrightarrow [P \Rightarrow (Q \Rightarrow (R \Rightarrow S))]$$

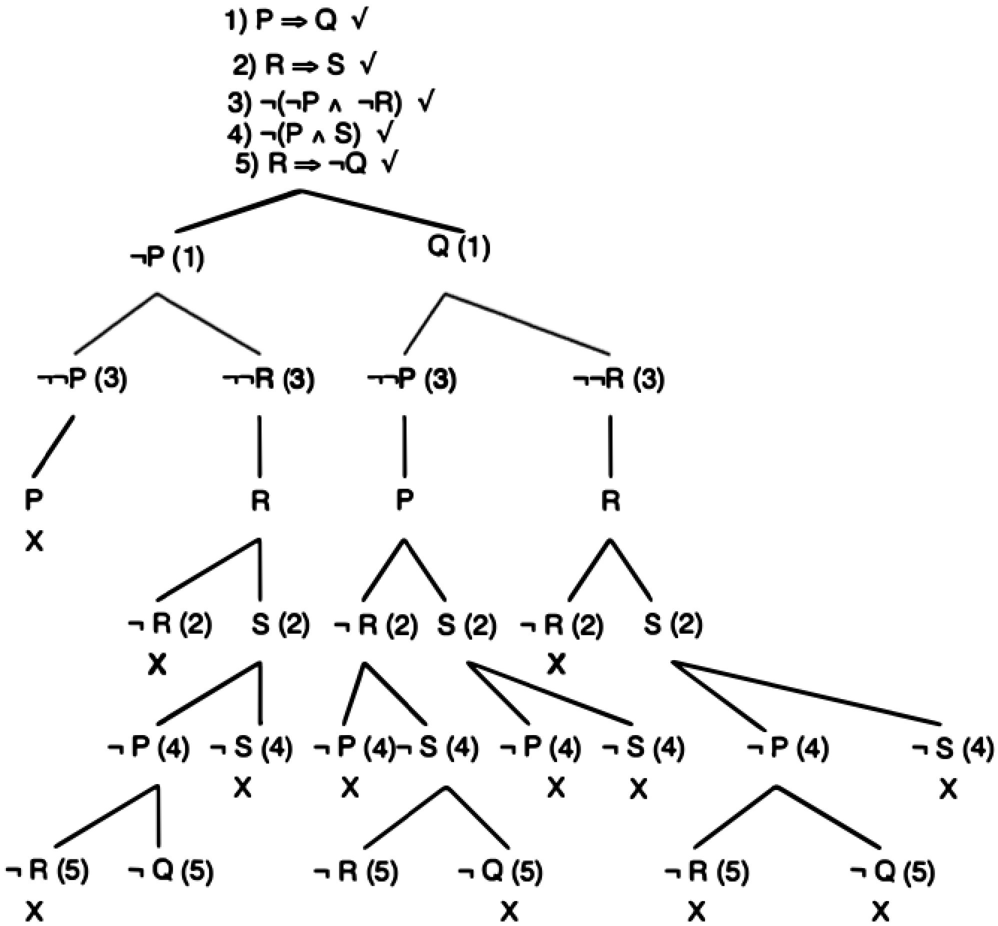


Donc la formule initiale est valide.

Exercice 3

Les ensembles de fbf $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$ ci-dessous sont-ils satisfaisables ? insatisfaisables ? Répondre en utilisant la méthode des tableaux sémantiques.

a) $\mathcal{S}_1 = \{P \Rightarrow Q, R \Rightarrow S, \neg(\neg P \wedge \neg R), \neg(P \wedge S), R \Rightarrow \neg Q\}$



Ensemble de formules satisfaisable, modèles : $\{\neg P, R, S, \neg Q\}$, $\{Q, P, \neg R, \neg S\}$.

b) $\mathcal{S}_2 = \{\neg P, \neg R \Rightarrow W, Q \vee (\neg T \Rightarrow \neg(P \vee U)), \neg P \Rightarrow (U \wedge \neg R), \neg Q, \neg U, \neg T, \neg R \Rightarrow S\}$.

Bien que ce ne soit pas du tout nécessaire, dans certains cas un pré-traitement peut permettre une simplification du problème à traiter.

Nous illustrons ceci en appliquant le *principe de pureté*, c'est-à-dire l'élimination, dans un ensemble de clauses, des clauses contenant des littéraux purs, opération qui préserve la (in)satis faisabilité de l'ensemble.

On doit donc transformer S_2 en un ensemble de clauses équivalent.

1. $\neg P$

2. $\neg R \Rightarrow W \longrightarrow$ $\cancel{R} \vee \cancel{W}$ - Pas 2 : clause éffacée, W pur

$3'.\ Q \vee T \vee \neg P$

3. $Q \vee (\neg T \Rightarrow \neg(P \vee U)) \longrightarrow \langle$

$3 \gg .\ Q \vee T \vee \neg U$

$4'.\ P \vee U$

4. $\neg P \Rightarrow (U \wedge \neg R) \longrightarrow \langle$

$4''.\ P \cancel{\vee} \cancel{\neg R}$ - Pas 3 : clause éffacée, $\neg R$ pur

5. $\neg Q$

6. $\neg U$

7. $\neg T$

8. $\neg R \Rightarrow S \longrightarrow$ $\cancel{R} \cancel{\vee} \cancel{S}$ - Pas 1 : clause éffacée, S pur

Ensemble de formules insatisfaisable.

Exercice 4

Pouvez-vous donner des raisons pour lesquelles on a choisi de définir les *règles d'inférence* comme des **relations** plutôt que comme des fonctions ?

On voudrait, par exemple, avoir :

$$\frac{P \wedge Q}{P}$$

mais aussi :

$$\frac{P \wedge Q}{Q}$$

Cette règle d'inférence n'est clairement pas une fonction, puisque pour le même argument elle donne deux valeurs différentes.