Université Bretagne Sud
L3 Informatique

Logique
Travaux Dirigés - Partie 3

Pour ce troisième TD, nous allons poursuivre notre étude du Calcul des Propositions ou Logique Propositionnelle (LP0).
Les exercices sont de difficultés diverses et sont à traiter en se basant sur les notions introduites en cours.
Bon travail !

Exercice 1

Vérifier que les formules ci-dessous (appelées *paradoxes de l'implication matérielle*) sont des tautologies :
a) $P \Rightarrow (Q \Rightarrow P)$
b) $\neg P \Rightarrow (P \Rightarrow Q)$.
En voyez-vous une traduction en langage naturel ?

Exercice 2

Un *raisonnement* est un ensemble de *prémisses* et une *conclusion*. Les raisonnements sont usuellement représentés par une colonne des prémisses séparées de la conclusion par un trait horizontal.
1) Comment caractériser un raisonnement correct ? Autrement dit, quelle relation doit-on exiger entre les prémisses et la conclusion pour le qualifier de correct ?
2) Les raisonnements suivants sont-ils corrects ?

a)

$$\frac{\begin{array}{c} A \Rightarrow B \\ A \Rightarrow C \\ \neg(B \vee C) \end{array}}{D}$$

b)

$$\frac{\begin{array}{c} A \Rightarrow B \\ B \Rightarrow C \\ C \Rightarrow D \\ \neg D \\ A \vee E \end{array}}{E}$$

Exercice 3

a) Donner la fnc (forme normale conjonctive) de

$$(P \wedge (Q \Rightarrow R) \Rightarrow S)$$

b) Donner la fnd (forme normale disjonctive) de

$$(P \vee \neg Q) \Rightarrow R$$

c) Si $\mathcal{FNC}$ dénote l'ensemble des formules sous fnc et $\mathcal{FND}$ l'ensemble des formules sous fnd, a-t-on $\mathcal{FNC} \cap \mathcal{FND} = \emptyset$?

d) Etant donné une fnc, le passage à la fnd requiert-il toutes les règles de transformation énoncées en cours ? Donner la fnd de :

$$(A \vee \neg B \vee C) \wedge (\neg D \vee E) \wedge (F \vee \neg G \vee H)$$

e) La fnc (respectivement la fnd) d'une fbf est-elle unique ?

Exercice 4

Le raisonnement suivant est-il correct ?

S'il y a une norme unique pour juger de la grandeur en art, alors M et G ne peuvent pas être tous les deux de grands artistes. Si P ou D sont considérés comme de grands artistes, alors W n'en est certainement pas un. Mais, su W n'est pas un grand artiste, alors K ou S ne le sont pas non plus. Après tout, G n'est pas un grand artiste, mais D et K le sont.
Donc, il n'y a pas une norme unique pour juger de la grandeur en art.

Exercice 5

Prouver le métathéorème suivant (Théorème de la déduction - version sémantique) :

$$\mathcal{A} \models \mathcal{B} \text{ si et seulement si } \models \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}.$$

Exercice 6

Nous nous intéressons dans la suite à des expressions de la forme :

$$H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n \models C$$

où les H_i $(1 \leq i \leq n)$ et C dont des fbf.

Ce type d'expression correspond à la notion informelle de *raisonnement correct.*

Prouver les métathéorèmes suivants :

a) $H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n \models C$ si et seulement si $\models H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n \Rightarrow C$.

Noter qu'on note usuellement en mathématiques :

$$H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n \Rightarrow C$$

avec la signification implicite

$$\models H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n \Rightarrow C.$$

b) $H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n \models C$ si et seulement si $H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n \wedge \neg C$ est insatisfaisable.

Ce métathéorème correspond à la technique bien connue de preuve par l'absurde : on nie la conclusion et on arrive à une contradiction.

Exercice 7

On suppose que $\mathcal{A} \not\models \mathcal{C}$, c'est-à-dire : ce n'est pas le cas que tout modèle de $\mathcal{A}$ est un modèle de $\mathcal{C}$. On suppose également qe $\mathcal{A} \wedge \mathcal{B} \models \mathcal{C}$.

Laquelle des deux assertions ci-dessous est correcte ?

a) $\mathcal{A} \models \mathcal{B}$;
b) $\mathcal{A} \not\models \mathcal{B}$.