Université Bretagne Sud
L3 Informatique

Logique

Travaux Dirigés - Partie 3
Corrigés

Pour ce troisième TD, nous allons poursuivre notre étude du Calcul des Propositions ou Logique Propositionnelle (LP0).
Les exercices sont de difficultés diverses et sont à traiter en se basant sur les notions introduites en cours.
Bon travail !

Exercice 1

Vérifier que les formules ci-dessous (appelées *paradoxes de l'implication matérielle*) sont des tautologies :
a) $P \Rightarrow (Q \Rightarrow P)$
b) $\neg P \Rightarrow (P \Rightarrow Q)$.
En voyez-vous une traduction en langage naturel ?

a)

P	$\Rightarrow$	$(Q \Rightarrow P)$
V	V	V V V
F	V	V F F
V	V	F V V
F	V	F V F

Si l'on a P, n'importe quelle proposition implique P.

b)

$\neg P$	$\Rightarrow$	$P \Rightarrow Q$
F	V	V V V
F	V	V F F
V	V	F V V
V	V	F V F

Si P est faux, P implique n'importe quelle proposition.

Exercice 2

Un *raisonnement* est un ensemble de *prémisses* et une *conclusion*. Les raisonnements sont usuellement représentés par une colonne des prémisses séparées de la conclusion par un trait horizontal.

1) Comment caractériser un raisonnement correct ? Autrement dit, quelle relation doit-on exiger entre les prémisses et la conclusion pour le qualifier de correct ?

En accord avec l'usage (notamment en mathématiques), on convient qu'un raisonnement est correct si :

On ne peut pas évaluer simultanément à V les prémisses et à F la conclusion.

2) Les raisonnements suivants sont-ils corrects ?

a)

$$\begin{array}{c} A \Rightarrow B \\ A \Rightarrow C \\ \neg(B \vee C) \\ \hline D \end{array}$$

$$\underbrace{A}_{F} \overset{V}{\Rightarrow} \underbrace{B}_{F}$$

$$\underbrace{A}_{F} \overset{V}{\Rightarrow} \underbrace{C}_{F}$$

$$\neg(\underbrace{B}_{F} \vee \underbrace{C}_{F})$$

$$\overline{\quad \underbrace{D}_{F} \quad}$$

Le raisonnement est incorrect, ce qui est naturel : de façon générale, quand la conclusion est indépendante des prémisses, le raisonnement est incorrect, sauf dans les cas des raisonnements trivialement corrects (c'est-à-dire prémisses contradictoires et/ou conclusion tautologique).

b)

$$A \Rightarrow B$$

$$B \Rightarrow C$$

$$C \Rightarrow D$$

$$\neg D$$

$$A \vee E$$

$$\overline{\quad E \quad}$$

$$\underbrace{A}_{V} \overset{V}{\Rightarrow} \underbrace{B}_{V}$$

$$\underbrace{B}_{V} \overset{V}{\Rightarrow} \underbrace{C}_{V}$$

$$\underbrace{C}_{V} \overset{V}{\Rightarrow} \underbrace{D}_{V}$$

$$\neg D \quad \text{(impossible d'évaluer à } V\text{)}$$

$$\underbrace{A}_{V} \vee \underbrace{E}_{F}$$

$$\overline{\quad \underbrace{E}_{F} \quad}$$

Étant donné qu'il n'y a pas d'autres possibilités pour évaluer à F la conclusion et à V les prémisses, on conclut : le raisonnement est correct.

Si l'on voulait aller des prémisses vers la conclusion (chaînage avant) on aurait fait : $\neg D \mapsto V$ (seule possibilité), donc (contraposée) $\neg C \mapsto V$, donc (contraposée) $\neg B \mapsto V$, donc (contraposée) $\neg A \mapsto V$ (seule possibilité), c'est-à-dire $A \mapsto F$; donc nécessairement pour que toutes les prémisses soient V, on doit avoir : $E \mapsto V$. On conclut : le raisonnement est correct.

Exercice 3

a) Donner la fnc (forme normale conjonctive) de

$$(P \wedge (Q \Rightarrow R) \Rightarrow S)$$

$$\begin{aligned}
&(P \wedge (Q \Rightarrow R) \Rightarrow S) \rightarrow \neg(P \wedge (Q \Rightarrow R)) \vee S\\
&\rightarrow (\neg P \vee \neg(Q \Rightarrow R)) \vee S\\
&\rightarrow (\neg P \vee \neg(\neg Q \vee R)) \vee S)\\
&\rightarrow (\neg P \vee (Q \wedge \neg R)) \vee S\\
&\rightarrow ((\neg P \vee Q) \wedge (\neg P \vee \neg R)) \vee S\\
&\rightarrow (\neg P \vee Q \vee S) \wedge (\neg P \vee \neg R \vee S)
\end{aligned}$$

b) Donner la fnd (forme normale disjonctive) de

$$(P \vee \neg Q) \Rightarrow R$$

$$\begin{aligned}
&(P \vee \neg Q) \Rightarrow R \rightarrow \neg(P \vee \neg Q) \vee R\\
&\rightarrow (\neg P \wedge Q) \vee R
\end{aligned}$$

c) Si $\mathcal{FNC}$ dénote l'ensemble des formules sous fnc et $\mathcal{FND}$ l'ensemble des formules sous fnd, a-t-on $\mathcal{FNC} \cap \mathcal{FND} = \emptyset$?

Non. Contre-exemple :

$(P \vee \neg Q \vee R)$: fnc (un conjoint avec trois littéraux)

$(P) \vee (\neg Q) \vee (R)$: fnd (trois disjoints avec un littéral chacun).

d) Etant donné une fnc, le passage à la fnd requiert-il toutes les règles de transformation énoncées en cours ?

Non ; il suffit d'appliquer la distributivité de $\wedge$ par rapport à $\vee$.

Donner la fnd de :

$$(A \vee \neg B \vee C) \wedge (\neg D \vee E) \wedge (F \vee \neg G \vee H)$$

$$(A \vee \neg B \vee C) \wedge (\neg D \vee E) \wedge (F \vee \neg G \vee H) \to (A \wedge \neg D \wedge F) \vee (A \wedge \neg D \wedge \neg G)$$
$$\vee (A \wedge \neg D \wedge H) \vee (A \wedge E \wedge F) \vee (A \wedge R \wedge \neg G) \vee (A \wedge E \wedge H) \vee (\neg B \wedge \neg D \wedge F)$$
$$\vee (\neg B \wedge \neg D \wedge \neg G) \vee \cdots \vee (C \wedge E \wedge F) \vee (C \wedge R \wedge \neg G) \vee (C \wedge E \wedge H)$$

Il y a $3 \times 2 \times 3 = 18$ disjoints.

e) La fnc (respectivement la fnd) d'une fbf est-elle unique ?

Non. Contre-exemple :

Considérons la fbf :

$$F : (P \Leftrightarrow Q) \wedge (Q \Leftrightarrow R) \wedge (R \Leftrightarrow P)$$

Les fbf G et H ci-après :

$$G : (\neg P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee R) \wedge (\neg R \vee P)$$

$$H : (\neg Q \vee P) \wedge (\neg P \vee R) \wedge (\neg R \vee Q)$$

sont deux fnc de F et elles sont différentes.

Exercice 4

Le raisonnement suivant est-il correct ?

S'il y a une norme unique pour juger de la grandeur en art, alors M et G ne peuvent pas être tous les deux de grands artistes. Si P ou D sont considérés comme de grands artistes, alors W n'en est certainement pas un. Mais, si W n'est pas un grand artiste, alors K ou S ne le sont pas non plus. Après tout, G n'est pas un grand artiste, mais D et K le sont.
Donc, il n'y a pas une norme unique pour juger de la grandeur en art.

Introduisons des notations pour les propositions apparaissant dans le raisonnement :
N : il y a une norme unique pour juger de la grandeur en art.
M : M est un grand artiste.
G : G est une grand artiste.
P : P est considéré comme un grand artiste.
D : D est considéré comme un grand artiste.
W : W est un grand artiste.
K : K est un grand artiste.
S : S est un grand artiste.

La formalisation suivante du raisonnement semble naturelle :

1. $N \Rightarrow \neg(M \wedge G)$
2. $P \vee D \Rightarrow \neg W$
3. $\neg W \Rightarrow \neg(K \vee S)$
4. $\neg G$
5. $D \wedge K$

---

6. $\neg N$

En **chaînage avant** : on essaie d'évaluer à V (de toutes les façons possibles) l'ensemble des prémisses et on vérifie que tous les modèles de cet ensemble le sont aussi de la conclusion.

($\rightarrow$ indique la séquence d'évaluation)

dans 4. $G \mapsto F$ (seule possibilité) $\rightarrow$ dans 5. $D \mapsto V$ (seule possibilité) ; dans 5. $K \mapsto V$ (seule possibilité) donc dans 3. $W \mapsto V$ donc dans 2. $P \vee D$ doit être évaluée à F : impossible puisque D est évaluée à V.

Comme l'on n'a pas d'autre choix pour évaluer les prémisses à V , on conclut que les prémisses sont contradictoires, donc le raisonnement est *trivialement correct.*

En **chaînage arrière** : si l'on peut évaluer à F la conclusion et à V l'ensemble des prémisses, on aura réfuté le raisonnement.

($\rightarrow$ indique la séquence d'évaluation)

dans 6. $N \mapsto V$ $\rightarrow$ dans 1. $G \mapsto F$ ou $M \mapsto F$ $\rightarrow$ dans 5. $D \mapsto V$ et $K \mapsto V$ (seule possibilité) $\rightarrow$ $W \mapsto V$ (seule possibilité) $\rightarrow$ $P \vee D$ doit être évaluée à F : impossible.

La conclusion est donc la même, c'est-à-dire que l'on ne peut pas réfuter le raisonnement : il est correct.

Exercice 5

Prouver le métathéorème suivant (Théorème de la déduction - version sémantique) :

$$\mathcal{A} \models \mathcal{B} \text{ si et seulement si } \models \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}.$$

Seulement si)

Par définition, $\mathcal{A} \models \mathcal{B}$ signifie : tout modèle de $\mathcal{A}$ est un modèle de $\mathcal{B}$, ce qui veut dire que $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ ne peut pas être évaluée à F , c'est-à-dire : $\models \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$.

Si)

$\models \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ signifie que l 'on ne peut pas avoir des interprétations évaluant $\mathcal{A}$ à V et $\mathcal{B}$ à F , autrement dit : $\mathcal{A} \models \mathcal{B}$.

Exercice 6

Nous nous intéressons dans la suite à des expressions de la forme :

$$H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n \models C$$

où les H_i $(1 \leq i \leq n)$ et C dont des fbf.

Ce type d'expression correspond à la notion informelle de *raisonnement correct*.

Prouver les métathéorèmes suivants :

a) $H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n \models C$ si et seulement si $\models H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n \Rightarrow C$.

Noter qu'on note usuellement en mathématiques :

$$H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n \Rightarrow C$$

avec la signification implicite

$$\models H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n \Rightarrow C.$$

Cas particulier de l'exercice 5.

b) $H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n \models C$ si et seulement si $H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n \wedge \neg C$ est insatisfaisable.

Ce métathéorème correspond à la technique bien connue de preuve par l'absurde : on nie la conclusion et on arrive à une contradiction.

Seulement si)

Tous les modèles de $H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n$ sont des modèles de C (définition de $\models$), donc des contre-modèles de $\neg C$.
Si $H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n$ est évaluée à F, alors $H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n \wedge \neg C$ l'est aussi.
Si $H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n$ est évaluée à V, alors $\neg C$ est évaluée à F donc $H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n \wedge \neg C$ est évaluée à F. Conclusion : $H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n \wedge \neg C$ est insatisfaisable.

Si)

Il suffit de s'intéresser aux interprétations de $H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n \wedge \neg C$ qui sont des modèles de $H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n$.
Si $\mathcal{M}$ est un modèle de $H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n$, par définition de l'insatisfaisabilité, on a

$$\mathcal{E}(\neg C, \mathcal{M}) = F$$

donc $\mathcal{E}(C, \mathcal{M}) = V$, donc $H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n \models C$.

Exercice 7

On suppose que $\mathcal{A} \not\models \mathcal{C}$, c'est-à-dire : ce n'est pas le cas que tout modèle de $\mathcal{A}$ est un modèle de $\mathcal{C}$. On suppose également qe $\mathcal{A} \wedge \mathcal{B} \models \mathcal{C}$.

Laquelle des deux assertions ci-dessous est correcte ?

a) $\mathcal{A} \models \mathcal{B}$;

b) $\mathcal{A} \not\models \mathcal{B}$.

Réponse : b)

Nous le montrons par l'absurde : supposons $\mathcal{A} \models \mathcal{B}$, donc $\mathcal{A} \models \mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$ (définition de $\models$) mais $\mathcal{A} \wedge \mathcal{B} \models \mathcal{C}$ (hypothèse) donc (transitivité de $\models$) $\mathcal{A} \models \mathcal{C}$ contradiction, donc : $\mathcal{A} \not\models \mathcal{B}$.