

*Logique*  
Travaux Dirigés - Partie 2

*Pour ce deuxième TD, nous allons aborder différents aspects du Calcul des Propositions ou Logique Propositionnelle (LP0).*

*Les exercices sont de difficultés diverses et sont à traiter en se basant sur les notions introduites en cours.*

*J'ai choisi de vous proposer un nombre d'exercices limité à 5 pour ce TD. Nous monterons en puissance au fur et à mesure des TD. Bon travail!*

**Exercice 1**

Combien y a-t-il d'*interprétations* pour la LP0 :

1. un nombre fini ?
2. un nombre infini dénombrable ?
3. un nombre infini non dénombrable ?

**Exercice 2**

On dit qu'un ensemble de connectifs est *adéquat* si et seulement s'il permet d'exprimer toutes les fonctions de vérité.

Montrer que les ensembles de connectifs ci-dessous sont adéquats. Autrement dit, donner un algorithme qui prend en entrée une table de vérité arbitraire (graphe d'une fonction de vérité) et qui délivre en sortie la même fonction mais définie en utilisant une fbf construite avec (exactement) les mêmes variables propositionnelles et (exclusivement) les ensembles de connectifs indiqués.

- a)  $\{\neg, \wedge, \vee\}$
- b)  $\{\neg, \wedge\}$
- c)  $\{\neg, \vee\}$
- d)  $\{\neg, \Rightarrow\}$
- e)  $\{\downarrow\}$  (voir définition ci-dessous)
- f)  $\{\downarrow\}$  (voir définition ci-dessous)

$P$	$Q$	$P Q$	$P \downarrow Q$
V	V	F	F
F	V	V	F
V	F	V	F
F	F	V	V

### Exercice 3

On dit qu'une fbf de la LP0 est *positive* si et seulement si elle contient exclusivement des symboles propositionnels et les connectifs  $\wedge$  et  $\vee$ .

Soit une fonction de vérité  $n$ -aire  $f : \{V, F\}^n \rightarrow \{V, F\}$  telle que :

- i)  $f(F, F, \dots, F) = F$ , c'est-à-dire que si tous ses arguments sont F, alors sa valeur est F ;
- ii)  $f(V, V, \dots, V) = V$ , c'est-à-dire que si tous ses arguments sont V, alors sa valeur est V.

Soit l'assertion :  $f$  est la table de vérité d'une fbf positive de la LP0.

Pensez-vous que cette assertion est vraie ? Pensez-vous qu'elle est fautive ? Justifier votre réponse.

### Exercice 4

Donner les tables de vérité des fbf suivantes :

- a)  $P \wedge (P \Rightarrow Q) \Rightarrow Q$
- b)  $(P \Rightarrow Q) \wedge (\neg Q \Rightarrow \neg P)$
- c)  $\neg A \wedge (A \vee B) \Rightarrow B$

d)  $A \Rightarrow A \vee B$

e)  $(P \Rightarrow Q) \wedge \neg Q \Rightarrow \neg P$

### Exercice 5

Répondre aux questions a) et b) ci-dessous sans construire la table de vérité complètement et sans effectuer des transformations des formules.

a) La fbf suivante est-elle toujours V? toujours F?

$$(((P \Rightarrow Q) \wedge (P \Rightarrow \neg R)) \wedge (R \Rightarrow P)) \wedge (\neg P \Rightarrow Q) \Rightarrow (S \Rightarrow (R \vee T))$$

b) Peut-on évaluer à F la fbf suivante?

$$(((A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg C \Rightarrow \neg D)) \Rightarrow C) \Rightarrow E \Rightarrow ((E \Rightarrow A) \Rightarrow (D \Rightarrow A)).$$