Université de Bretagne-Sud
L3 Informatique

Logique

Travaux Dirigés - Partie 2
Corrigés

Pour ce deuxième TD, nous allons aborder différents aspects du Calcul des Propositions ou Logique Propositionnelle (LP0).
Les exercices sont de difficultés diverses et sont à traiter en se basant sur les notions introduites en cours.
J'ai choisi de vous proposer un nombre d'exercices limité à 5 pour ce TD. Nous monterons en puissance au fur et à mesure des TD. Bon travail !

Exercice 1

Combien y a-t-il *d'interprétations* pour la LP0 :

1. un nombre fini ?
2. un nombre infini dénombrable ?
3. un nombre infini non dénombrable ?

On peut représenter une interprétation comme un sous-ensemble de Π, les éléments de cet ensemble étant les symboles propositionnels évalués à V dans l'interprétation.

Π est l'ensemble des formules de bases, supposé infini dénombrable (cf. cours). Il est donc de cardinal $\aleph_0$.

Or, il y a $2^{\aleph_0}$ sous-ensembles de Π, donc il y a aussi un nombre *infini non* *dénombrable d'interprétations pour la LP0.*

Exercice 2

On dit qu'un ensemble de connectifs est *adéquat* si et seulement s'il permet d'exprimer toutes les fonctions de vérité.

Montrer que les ensembles de connectifs ci-dessous sont adéquats. Autrement dit, donner un algorithme qui prend en entrée une table de vérité arbitraire (graphe d'une fonction de vérité) et qui délivre en sortie la même fonction mais définie en utilisant une fbf construite avec (exactement) les mêmes variables propositionnelles et (exclusivement) les ensembles de connectifs indiqués.

a) $\{\neg, \wedge, \vee\}$

b) $\{\neg, \wedge\}$

c) $\{\neg, \vee\}$

d) $\{\neg, \Rightarrow\}$

e) $\{|\}$ (voir définition ci-dessous)

f) $\{\downarrow\}$ (voir définition ci-dessous)

P	Q	$P\|Q$	$P \downarrow Q$
V	V	F	F
F	V	V	F
V	F	V	F
F	F	V	V

a) Une fonction de vérité peut toujours être spécifié *en extension*, c'est-à-dire en donnant sont graphe (table de vérité) puisque son domaine et son co-domaine sont finis.

L'exemple suivant montre clairement la méthode (il peut de façon immédiate être transformé en algorithme).

P Q R	$f(P,Q,R)$	$\neg f(P,Q,R)$
V V V	V	F
V V F	V	F
V F V	F	V
V F F	F	V
F V V	F	V
F V F	F	V
F F V	F	V
F F F	V	F

La *forme normale disjonctive (fnd)* de $f(P,Q,R)$ est :

$$(P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R)$$

Justification : pour tout autre combinaison des littéraux que celles qui apparaissent dans la fnd, on a $f(P,Q,R) = F$ par inspection de la table de vérité.

La *forme normale conjonctive (fnc)* de $f(P,Q,R)$ est :

$$(\neg P \vee Q \vee \neg R) \wedge (\neg P \vee Q \vee R) \wedge (P \vee \neg Q \vee \neg R) \wedge (P \vee \neg Q \vee R) \wedge (P \vee Q \vee \neg R)$$

Justification : on a les équivalences suivantes :
1) $\neg \bigvee \bigwedge P_i$ équivaut à $\bigwedge \bigvee \neg P_i$
2) $\neg\neg f(P,Q,R)$ équivaut à $f(P,Q,R)$.
Autrement dit, on prend la conjonction ($\wedge$) des disjonctions ($\vee$) pour les $f(P,Q,R) = F$.

b) Utiliser l'équivalence : $P \vee Q$ équivaut à $\neg(\neg P \wedge \neg Q)$ et a).

c) Utiliser l'équivalence : $P \wedge Q$ équivaut à $\neg(\neg P \vee \neg Q)$ et a).

d) Utiliser les équivalences : $P \wedge Q$ équivaut à $\neg(P \Rightarrow \neg Q)$ et $P \vee Q$ équivaut à

$\neg P \Rightarrow Q$, et a).

e) Utiliser les équivalences : $\neg P$ équivaut à $P|P$ et $P \vee Q$ équivaut à $((P|P)|(Q|Q))$, et c).

f) Utiliser les équivalences : $\neg P$ équivaut à $P \downarrow P$ et $P \wedge Q$ équivaut à $((P \downarrow P) \downarrow (Q \downarrow Q))$, et b).

Exercice 3

On dit qu'une fbf de la LP0 est *positive* si et seulement si elle contient exclusivement des symboles propositionnels et les connectifs $\wedge$ et $\vee$.

Soit une fonction de vérité n-aire $f : \{V, F\}^n \to \{V, F\}$ telle que :

i) $f(F, F, \ldots, F) = F$, c'est-à-dire que si tous ses arguments sont F, alors sa valeur est F ;

ii) $f(V, V, \ldots, V) = V$, c'est-à-dire que si tous ses arguments sont V, alors sa valeur est V.

Soit l'assertion : *f est la table de vérité d'une fbf positive de la LP0.*

Pensez-vous que cette assertion est vraie ? Pensez-vous qu'elle est fausse ? Justifier votre réponse.

Il est difficile de répondre à la question en toute généralité, mais une condition suffisante pour qu'elle soit vraie est la suivante : elle est vraie si la seule ligne ayant la valeur F est celle donnée (en utilisant la forme normale conjonctive) ou si la seule ligne ayant la valeur V est celle donnée (en utilisant la forme normale disjonctive).

Exercice 4

Donner les tables de vérité des fbf suivantes :

a) $P \wedge (P \Rightarrow Q) \Rightarrow Q$

b) $(P \Rightarrow Q) \wedge (\neg Q \Rightarrow \neg P)$

c) $\neg A \wedge (A \vee B) \Rightarrow B$

d) $A \Rightarrow A \vee B$

e) $(P \Rightarrow Q) \wedge \neg Q \Rightarrow \neg P$

a)

P	$\wedge$	$(P \Rightarrow Q)$	$\Rightarrow$	Q
V	V	V V V	V	V
V	F	V F F	V	F
F	F	F V V	V	V
F	F	F V F	V	F

b)

$(P \Rightarrow Q)$	$\wedge$	$(\neg Q \Rightarrow \neg P)$
V V V	V	F V F
V F F	F	V F F
F V V	V	F V V
F V F	V	V V V

c)

$\neg A$	$\wedge$	$(A \vee B)$	$\Rightarrow$	B
F	F	V V V	V	V
F	F	V V F	V	F
V	V	F V V	V	V
V	F	F F F	V	F

d)

A	$\Rightarrow$	$A \vee B$
V	V	V V V
V	V	V V F
F	V	F V V
F	V	F F F

e)

$(P \Rightarrow Q)$	$\wedge$	$\neg Q$	$\Rightarrow$	$\neg P$
V V V	F	F	V	F
V F F	F	V	V	F
F V V	F	F	V	V
F V F	V	V	V	V

Exercice 5

Répondre aux questions a) et b) ci-dessous sans construire la table de vérité complètement et sans effectuer des transformations des formules.

a) La fbf suivante est-elle toujours V ? toujours F ?

$((((P \Rightarrow Q) \wedge (P \Rightarrow \neg R)) \wedge (R \Rightarrow P)) \wedge (\neg P \Rightarrow Q)) \Rightarrow (S \Rightarrow (R \vee T))$

b) Peut-on évaluer à F la fbf suivante ?

$((((A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg C \Rightarrow \neg D)) \Rightarrow C) \Rightarrow E) \Rightarrow ((E \Rightarrow A) \Rightarrow (D \Rightarrow A))$.

a) Pour savoir si la fbf est toujours F, on essaie de l'évaluer à V :

Pour évaluer à V une implication, il suffit (ce n'est pas la seule possibilité) d'assigner V à son conséquent.

$$(\dots) \overset{V}{\Rightarrow} \underbrace{(\overbrace{S}^{F} \Rightarrow (R \vee T))}_{V}$$

Il suffit donc d'assigner F à S sans s'intéresser aux valeurs assignées aux autres symboles propositionnels pour évaluer la formule donnée à V. Elle n'est donc pas toujours F.

Pour savoir si elle est toujours V, on essaie de l'évaluer à F :
Pour évaluer une implication à F, la seule possibilité est d'assigner V à son antécédent et F à son conséquent.

$$((\cdots \Rightarrow \underbrace{Q}_{V}) \wedge \overbrace{(\cdots \Rightarrow \underbrace{\neg R}_{V}))}^{V} \wedge \overbrace{(\underbrace{R}_{F} \Rightarrow \dots)}^{V} \wedge (\cdots \Rightarrow \underbrace{Q}_{V})) \overset{F}{\Rightarrow} \overbrace{(\underbrace{S}_{V} \Rightarrow (\underbrace{R}_{F} \vee \underbrace{T}_{F}))}^{F}$$

On peut évaluer la formule à F avec les assignations indiquées. Elle n'est donc pas toujours V.

Conclusion : La formule donnée n'est *ni contradictoire, ni tautologique.*

b) Pour évaluer une implication à F, la seule possibilité est d'assigner V à son antécédent et F à son conséquent.

Pour évaluer le conséquent à F, la seule possibilité est :

$$\underbrace{(E \Rightarrow A)}_{V} \overset{F}{\Rightarrow} \underbrace{(D \Rightarrow A)}_{F}$$

et le seules assignations possibles sont :
A : F
D : V
donc,
E : F.

Avec ces assignations, nous essayons d'évaluer l'antécédent de la formule à V ; la seule possibilité est :

$$\underbrace{(((A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg C \Rightarrow \neg D)) \Rightarrow C)}_{F} \overset{V}{\Rightarrow} \underbrace{E}_{F}$$

Avec les seules assignations possibles à A, D et E, on doit assigner à C les valeurs V et F, ce qui est impossible.

Conclusion : la formule donnée ne peut pas être évaluée à F. Elle est *tautologique*.