Université de Bretagne-Sud
L3 Informatique

Logique
Travaux Dirigés - Partie 10

Dans ce dixième et dernier TD, nous allons aborder la méthode des tableaux sémantiques en LP1.
Les exercices sont de difficultés diverses et sont à traiter en se basant sur les notions introduites en cours (partie 5.5).
Bon travail !

Exercice 1

Pour chacun des raisonnements (respectivement fbf) a) à k) pouvez-vous prouver qu'il est correct (respectivement valide) en utilisant la méthode des tableaux sémantiques ?

a) $\forall x(P(x) \land Q(x)) \Leftrightarrow \forall xP(x) \land \forall xQ(x)$

b) $\exists x(P(x) \lor Q(x)) \Leftrightarrow \exists xP(x) \lor \exists xQ(x)$

c)

$$\frac{\begin{array}{c}\forall x\exists yP(y,x)\\ \forall x\forall y(P(x,y) \Rightarrow Q(x,y))\end{array}}{\forall x\exists yQ(y,x)}$$

d) prouver que : *toute relation irréflexive et transitive est asymétrique.*

$$\frac{\begin{array}{c}\forall x \neg P(x,x) \\ \forall x \forall y \forall z (P(x,y) \wedge P(y,z) \Rightarrow P(x,z))\end{array}}{\forall x \forall y (P(x,y) \Rightarrow \neg P(y,x))}$$

e) $\forall x (P(x) \vee Q(x)) \Rightarrow \forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$

f)

$$\frac{\forall x (P(x) \Rightarrow Q(x))}{\forall x (\exists y (P(y) \wedge R(x,y)) \Rightarrow \exists y (Q(y) \wedge R(x,y)))}$$

g)

$$\frac{\begin{array}{c}\forall x (F(x) \Rightarrow \exists y G(x,y)) \\ \exists x F(x) \\ \exists x \exists y G(x,y)\end{array}}{\forall x \exists y G(x,y)}$$

h) $(\forall x \exists y (P(x) \vee Q(y))) \Leftrightarrow (\forall x P(x) \vee \exists y Q(y))$

i) $(\forall x (P(x) \vee Q(f(x))) \Rightarrow (\forall x \exists y (P(x) \vee Q(y)))$

j) Déterminer, en utilisant la méthode des tableaux sémantiques si la formule ci-dessous :

j_1) n'est pas valide, dans ce cas extraire un contre-exemple du tableau.

j_2) est valide, dans ce cas donner un modèle obtenu au moyen de la méthode des tableaux.

$$[\exists x (P(x) \Rightarrow Q(x))] \Rightarrow [\forall x P(x) \Rightarrow \exists x Q(x)]$$

k) a, b, c, d, e dénotent des constantes.

$$\begin{array}{l} 1.\, P(a,b) \\ 2.\, P(b,c) \\ 3.\, P(c,d) \\ 4.\, P(d,e) \\ 5.\, \forall x \forall y \forall z. P(x,y) \wedge P(y,z) \Rightarrow P(x,z) \\ \hline 6.\, P(a,e) \end{array}$$

Exercice 2

En utilisant la méthode des tableaux sémantiques, dire si le raisonnement suivant est correct ou incorrect. S'il est incorrect, extraire du tableau un contre-exemple de *cardinalité minimale*.

$$\begin{array}{l} 1.\ \exists x (P(x) \wedge Q(x)) \\ 2.\ \exists x (R(x) \wedge S(x)) \\ 3.\ \exists x (\neg P(x) \wedge \neg R(x)) \\ \hline 4.\ \exists x (S(x) \wedge Q(x)) \end{array}$$

Exercice 3

Montrer que le raisonnement suivant est correct en appliquant la méthode des tableaux avec variables libres (c'est-à-dire en utilisant l'unification).

$$\begin{array}{c} \forall x \exists y (P(x) \Rightarrow Q(y)) \\ \hline \exists y \forall x (P(x) \Rightarrow Q(y)) \end{array}$$