Université de Bretagne-Sud
L3 Informatique

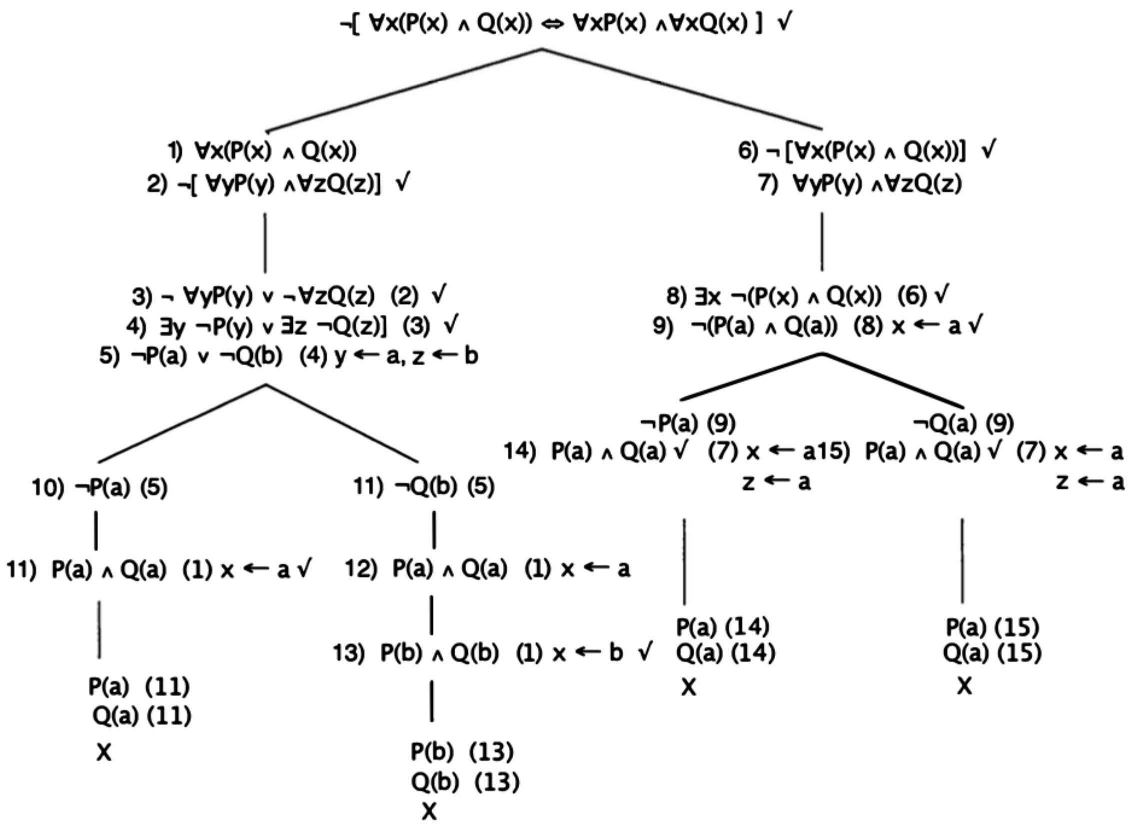
Logique

Travaux Dirigés - Partie 10
Corrigés

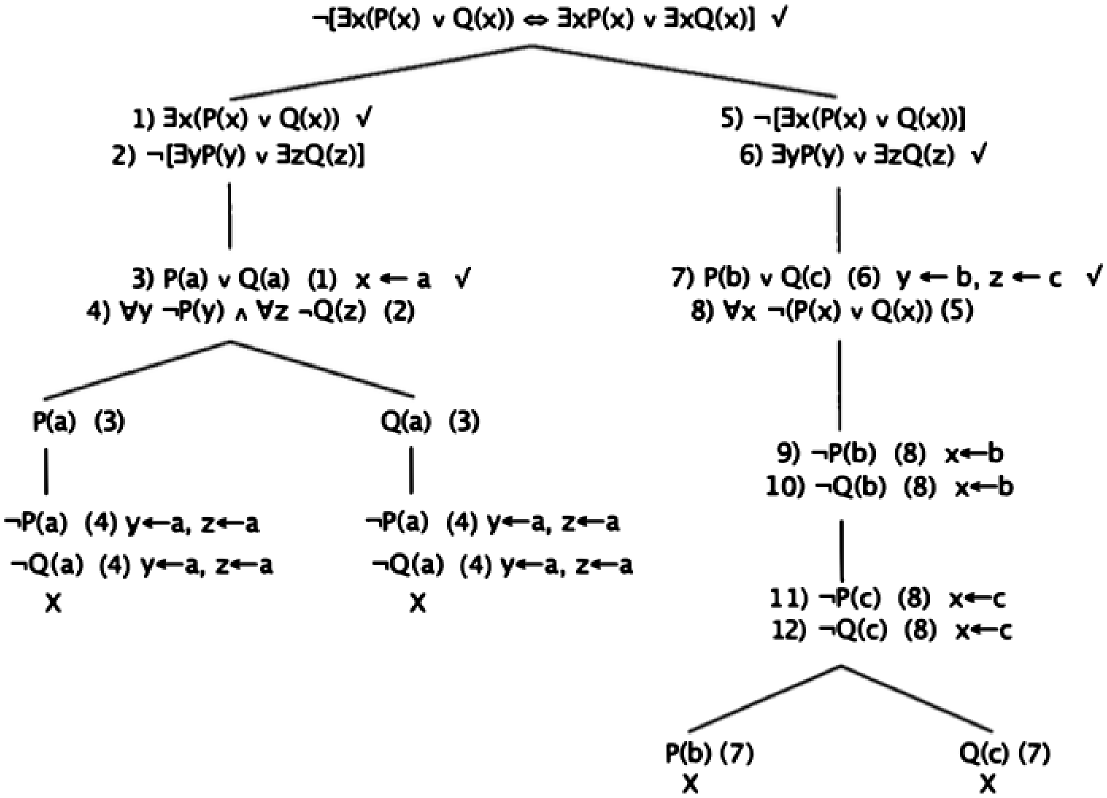
Dans ce dixième et dernier TD, nous allons aborder la méthode des tableaux sémantiques en LP1.
Les exercices sont de difficultés diverses et sont à traiter en se basant sur les notions introduites en cours (partie 5.5).
Bon travail !

Exercice 1
Pour chacun des raisonnements (respectivement fbf) a) à k) pouvez-vous prouver qu'il est correct (respectivement valide) en utilisant la méthode des tableaux sémantiques ?

a) $\forall x(P(x) \wedge Q(x)) \Leftrightarrow \forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)$

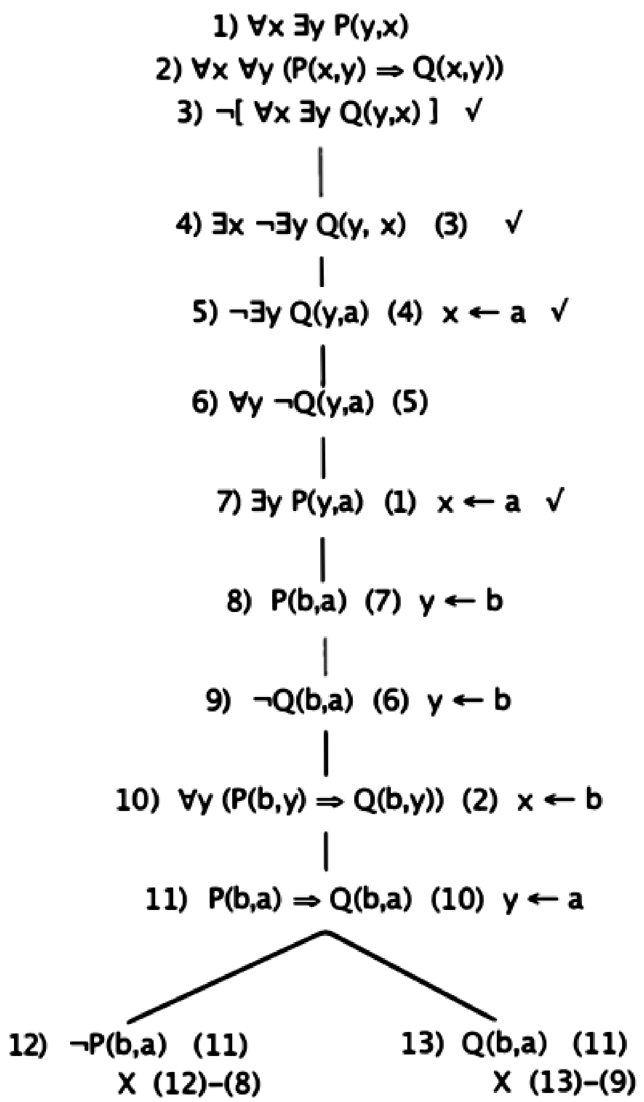


b) $\exists x(P(x) \vee Q(x)) \Leftrightarrow \exists x P(x) \vee \exists x Q(x)$



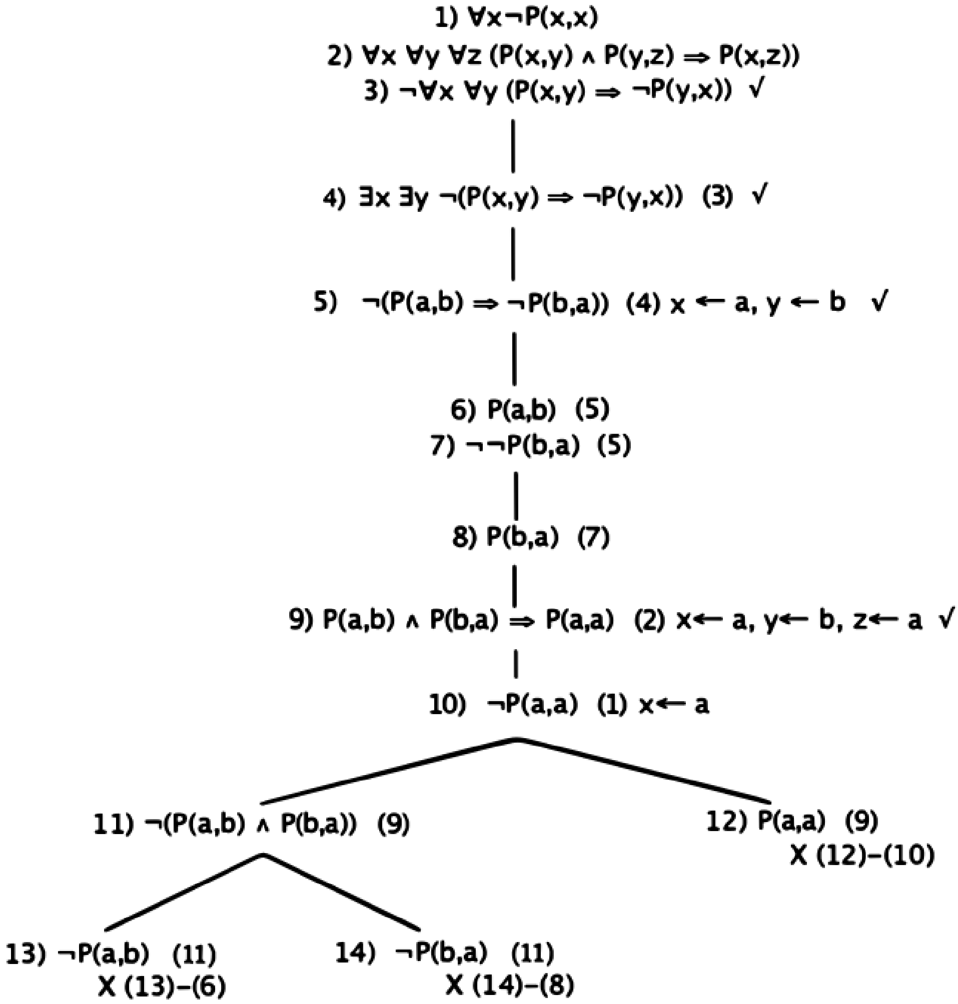
c)

$$\frac{\begin{array}{c}\forall x \exists y P(y,x) \\ \forall x \forall y (P(x,y) \Rightarrow Q(x,y))\end{array}}{\forall x \exists y Q(y,x)}$$

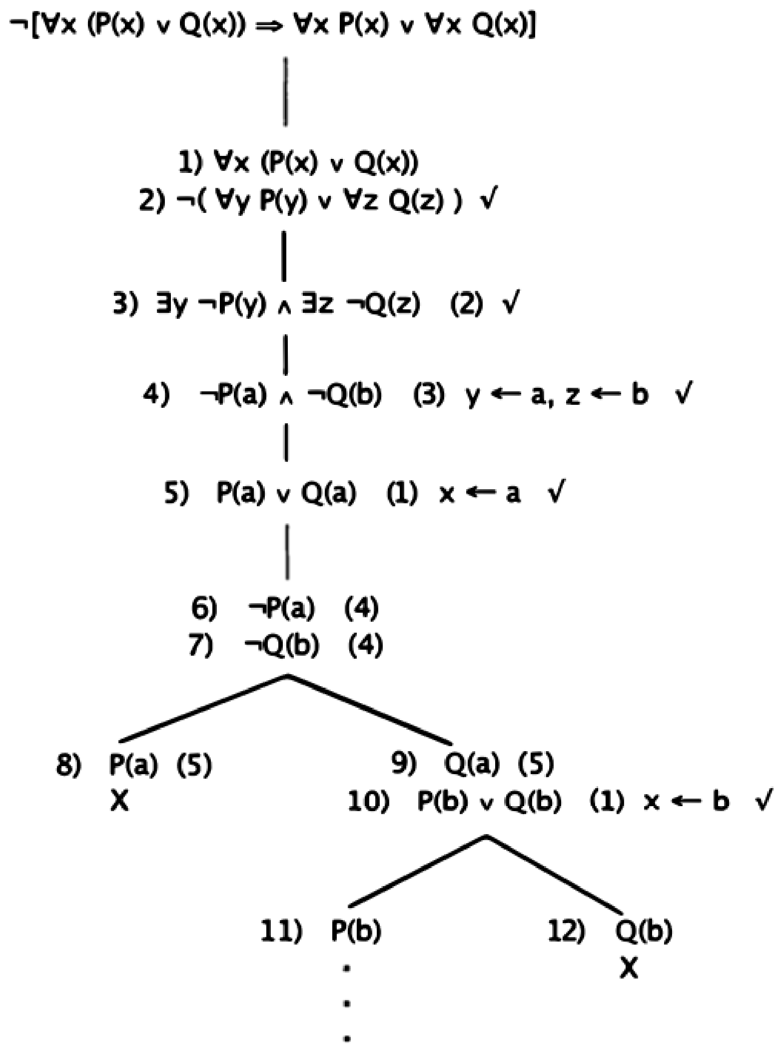


d) prouver que : *toute relation irréflexive et transitive est asymétrique.*

$$\frac{\begin{array}{c}\forall x \neg P(x,x) \\ \forall x \forall y \forall z (P(x,y) \wedge P(y,z) \Rightarrow P(x,z))\end{array}}{\forall x \forall y (P(x,y) \Rightarrow \neg P(y,x))}$$



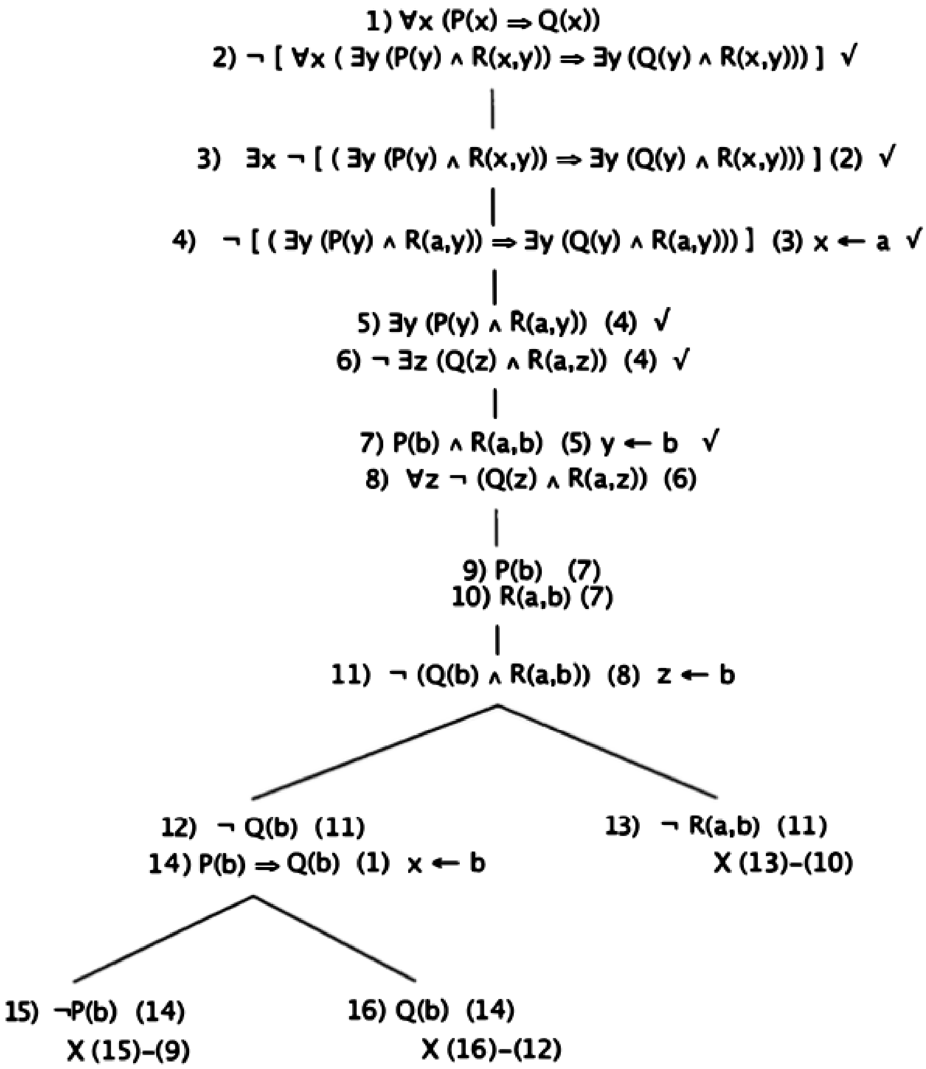
e) $\forall x(P(x) \vee Q(x)) \Rightarrow \forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$



La méthode continue avec $P(c) \wedge Q(c), P(d) \wedge Q(d), \ldots$ l'arbre ne se fermera pas (ce qui n'est pas détecté par la méthode).

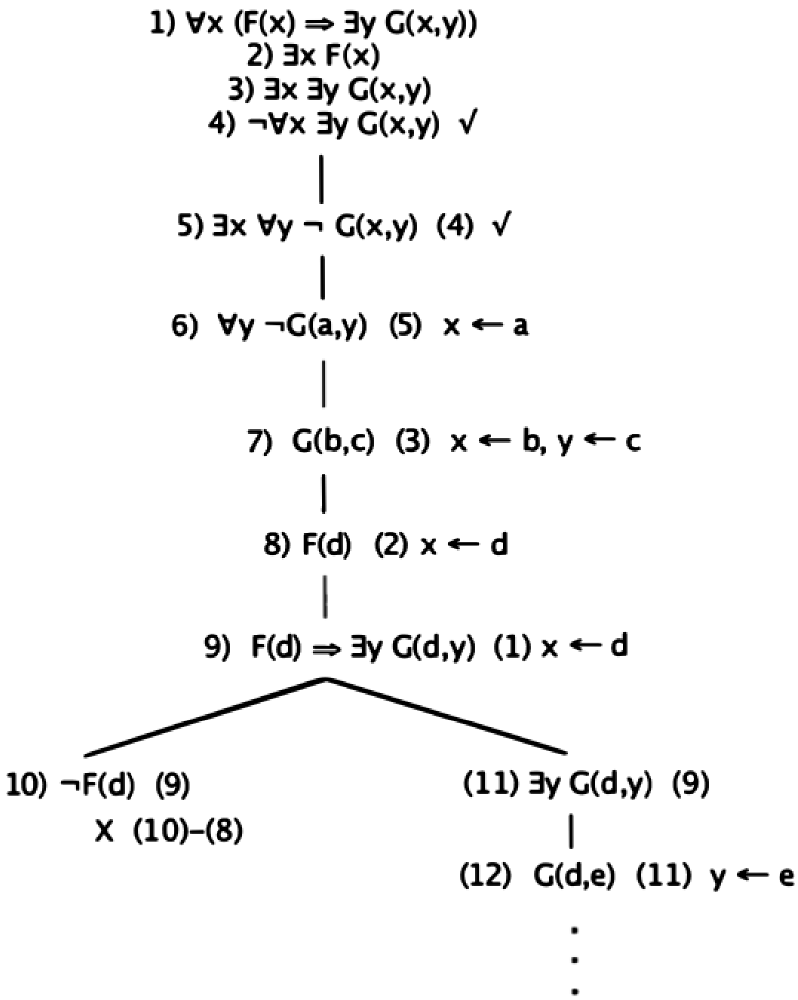
f)

$$\frac{\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x))}{\forall x(\exists y(P(y) \wedge R(x,y)) \Rightarrow \exists y(Q(y) \wedge R(x,y)))}$$

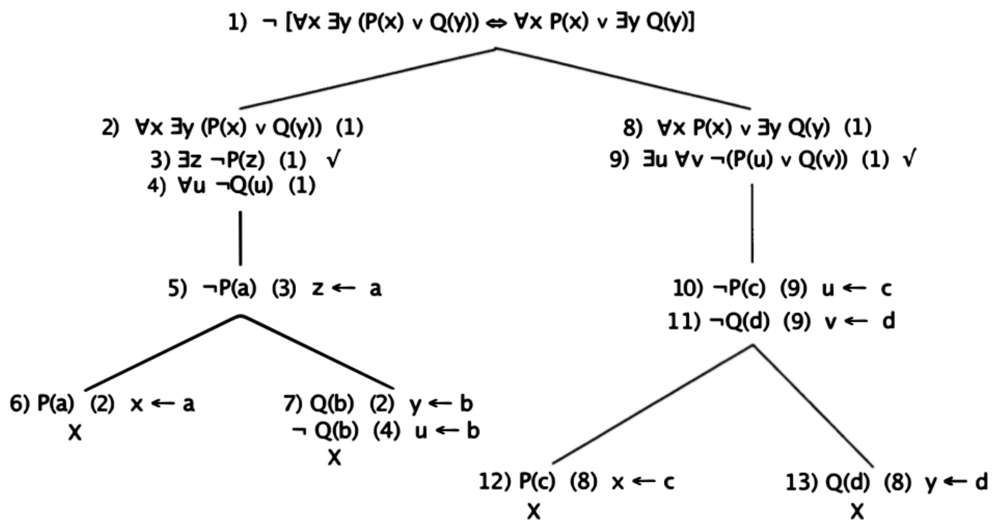


g)

$$\begin{array}{c} \forall x(F(x) \Rightarrow \exists y G(x,y)) \\ \exists x F(x) \\ \exists x \exists y G(x,y) \\ \hline \forall x \exists y G(x,y) \end{array}$$

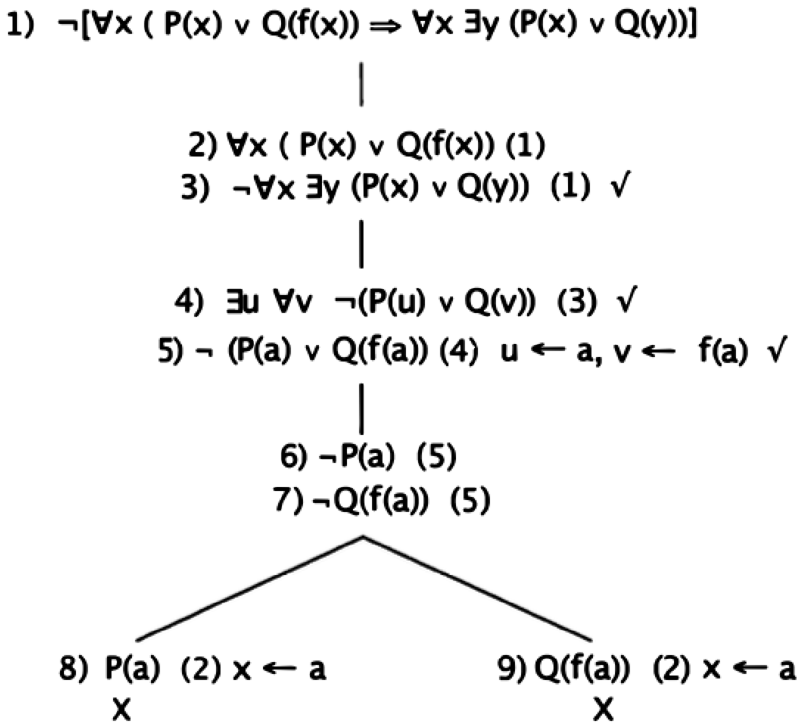


h) $(\forall x \exists y (P(x) \vee Q(y))) \Leftrightarrow (\forall x P(x) \vee \exists y Q(y))$



Remarque. Le remplacement $y \leftarrow d$ utilisé pour obtenir la formule 13) est correct puisque la constante d n'a pas été utilisée pour remplacer une autre variable quantifiée existentiellement.

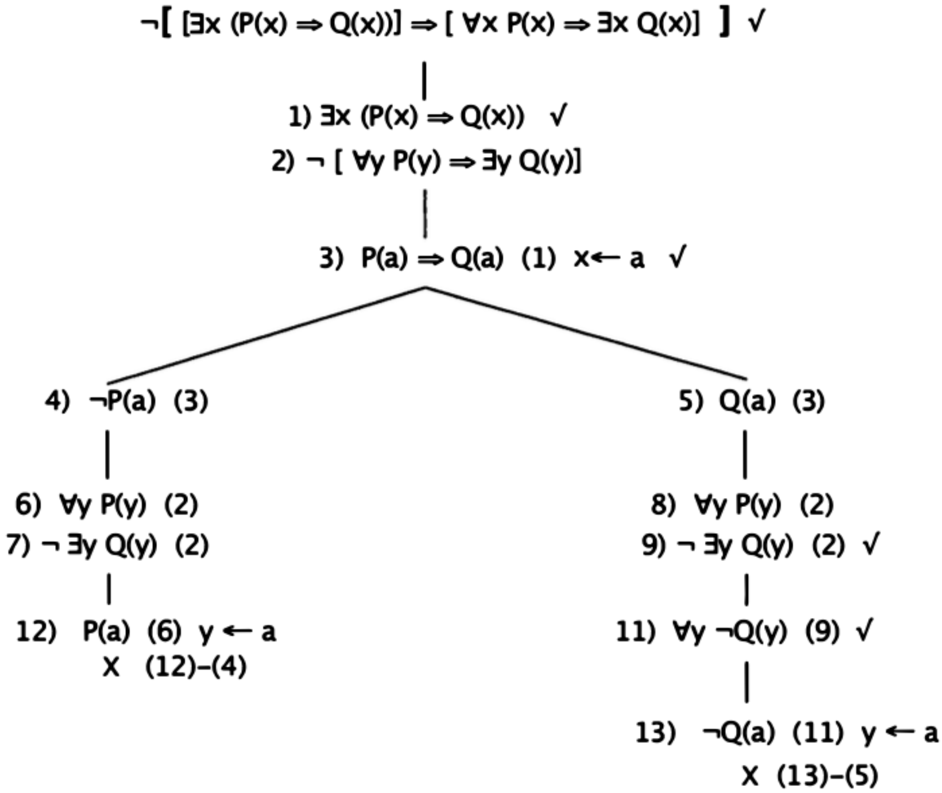
i) $(\ \forall x(P(x) \vee Q(f(x))\ ) \Rightarrow (\ \forall x \exists y(P(x) \vee Q(y))\ )$



j) Déterminer, en utilisant la méthode des tableaux sémantiques si la formule ci-dessous :

j_1) n'est pas valide, dans ce cas extraire un contre-exemple du tableau.

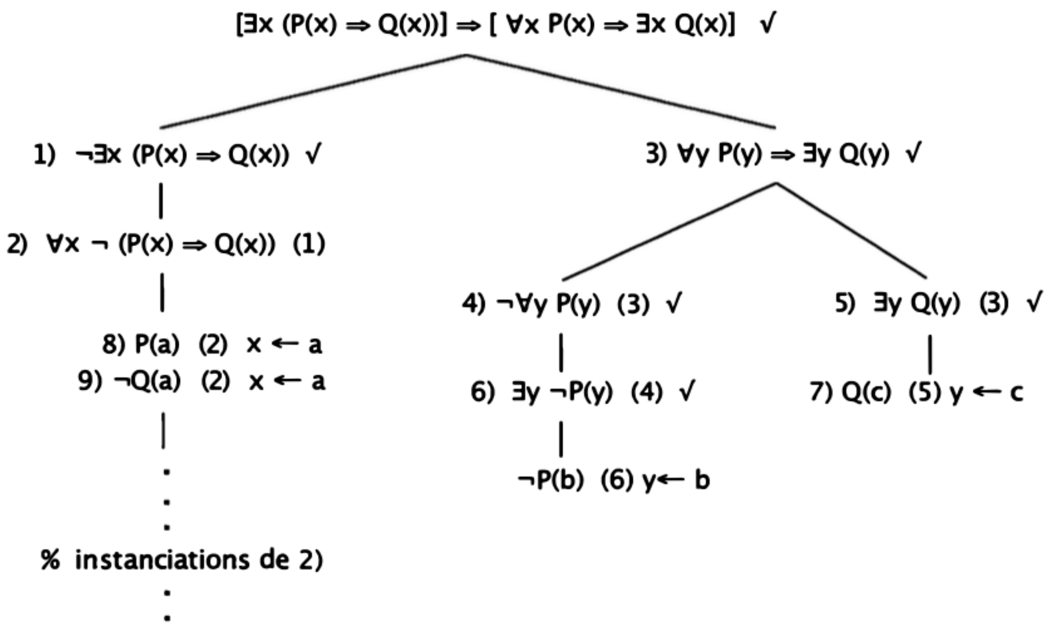
Pour vérifier la validité de la formule nous la nions.



j_2) est valide, dans ce cas donner un modèle obtenu au moyen de la méthode des tableaux.

$$[\exists x(P(x) \Rightarrow Q(x))] \Rightarrow [\forall x P(x) \Rightarrow \exists x Q(x)]$$

Pour essayer d'en construire un modèle on ne nie pas la formule.

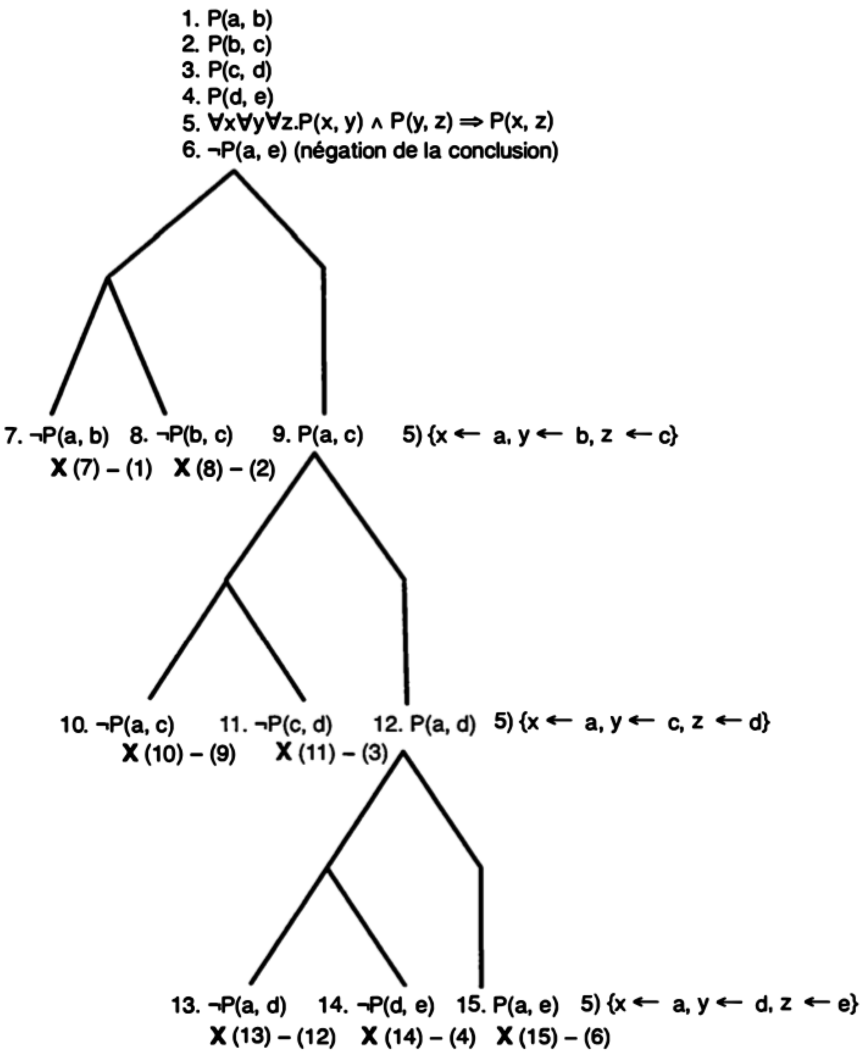


Des branches ouvertes *finies*, on peut extraire les modèles :
$\{Q(c)\} \rightsquigarrow [\quad] \Rightarrow [\quad \Rightarrow \mathbf{V}]$
$\{\neg P(b)\} \rightsquigarrow [\quad] \Rightarrow [\mathbf{F} \Rightarrow$

De la branche ouverte *infinie*, on peut extraire le modèle :
$\{P(a), \neg Q(a)\} \rightsquigarrow [\mathbf{V} \Rightarrow \mathbf{F}] \Rightarrow [\quad]$

k) a, b, c, d, e dénotent des constantes.

$$\begin{array}{l} 1.\, P(a,b) \\ 2.\, P(b,c) \\ 3.\, P(c,d) \\ 4.\, P(d,e) \\ 5.\, \forall x \forall y \forall z. P(x,y) \wedge P(y,z) \Rightarrow P(x,z) \\ \hline 6.\, P(a,e) \end{array}$$



Exercice 2

En utilisant la méthode des tableaux sémantiques, dire si le raisonnement suivant est correct ou incorrect. S'il est incorrect, extraire du tableau un contre-exemple de *cardinalité minimale.*

$$
\begin{array}{l}
1.\ \exists x(P(x) \wedge Q(x)) \\
2.\ \exists x(R(x) \wedge S(x)) \\
3.\ \exists x(\neg P(x) \wedge \neg R(x)) \\
\hline
4.\ \exists x(S(x) \wedge Q(x))
\end{array}
$$

Le tableau correspondant au raisonnement donné :

$$
\begin{array}{lcl}
1. & \exists x(P(x) \wedge Q(x)) & \checkmark \\
2. & \exists y(R(y) \wedge S(y)) & \checkmark \\
3. & \exists z(\neg P(z) \wedge \neg R(z)) & \checkmark \\
4' & \neg(\exists u(S(u) \wedge Q(u))) & \checkmark \\
 & \downarrow & \\
4'' & \forall u \neg(S(u) \wedge Q(u)) & \\
 & \downarrow & \\
 & P(a) & 1.\ x \leftarrow a \\
 & Q(a) & 1.\ x \leftarrow a \\
 & R(b) & 2.\ y \leftarrow b \\
 & S(b) & 2.\ y \leftarrow b \\
 & \neg P(c) & 3.\ z \leftarrow c \\
 & \neg R(c) & 3.\ z \leftarrow c
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
\neg S(a) \quad 4''.\ u \leftarrow a & \qquad \neg Q(a) \quad 4''.\ u \leftarrow a \\
 & \qquad \times
\end{array}
$$

– si la cardinalité du domaine du discours est 1, c'est-à-dire $a = b = c$, on obtient un arbre fermé $(P(a), \neg P(c))$;

– de même si la cardinalité du domaine du discours est 2, c'est-à-dire $a = b$ $(S(b), \neg S(a))$ ou $a = c$ $(P(a), \neg P(c))$ ou $b = c$ $(R(b), \neg R(c))$;

En revanche si la cardinalité du domaine du discours est 3, c'est-à-dire $a \neq b$ et $a \neq c$

et $b \neq c$, on obtient le modèle suivant de l'ensemble de formules 1., 2, 3, 4". :

$$\mathcal{M} = \{P(a), Q(a), R(b), S(b), \neg P(c), \neg R(c), \neg S(a)\}$$

$(P(b), Q(b), Q(c), R(a)$ pouvant appartenir ou non à $\mathcal{M})$

Il est facile de vérifier que ceci est un contre-exemple du raisonnement sur un domaine du discours de cardinalité 3.

Par construction $\mathcal{M}$ est un modèle des prémisses. Concernant la conclusion :

– si $x = a$ on a dans $\mathcal{M}$ $S(a) : F$ et $Q(a) : V$;

– si $x = b$ ona dans $\mathcal{M}$ $S(b) : V$ et $Q(b) : F$;

– si $x = c$ on a dans $\mathcal{M}$ $S(c) : F$ et $Q(c) : F$

c'est-à-dire que dans tous les cas la conclusion est évaluée à F .

Exercice 3

Montrer que le raisonnement suivant est correct en appliquant la méthode des tableaux avec variables libres (c'est-à-dire en utilisant l'unification).

$$\frac{\forall x \exists y (P(x) \Rightarrow Q(y))}{\exists y \forall x (P(x) \Rightarrow Q(y))}$$

Le tableau correspondant au raisonnement donné :

1) $\forall x \exists y (P(x) \Rightarrow Q(y))$ premise

2) $\neg[\exists v \forall u (P(u) \Rightarrow Q(v))]$ neg. conclusion and var. ren.

3) $\forall v \exists u \neg (P(u) \Rightarrow Q(v))$ (2)

4) $\exists u \neg (P(u) \Rightarrow Q(V))$ (3), $v \longrightarrow V$

5) $\neg(P(f(V)) \Rightarrow Q(V))$ (4), Skolemization

6) $P(f(V))$ (5)

7) $\neg Q(V)$ (5)

8) $\exists y (P(X) \Rightarrow Q(y))$ (1), $x \longrightarrow X$

9) $P(X) \Rightarrow Q(g(X))$ (7), Skolemization

10) $\neg P(X)$ 9.
$\times$ (6.-10.) $\{X \leftarrow f(V)\}$

11) $Q(g(X))$ 9.
(7.-11.) : $\{V \leftarrow g(f(V))\}$

$\boxed{\text{Unification fails (cycle)}}$

6$'$) $P(f(V_1))$ (5), $V \longrightarrow V_1$

7$'$) $\neg Q(V_1)$ (5), $V \longrightarrow V_1$
$\times$ (11.-7$'$.) $\{V_1 \leftarrow g(f(V))\}$