LOGIQUE

L3 Informatique

Salim Lardjane

Université Bretagne Sud

5. Logique du premier ordre (LP1)

5.7 Forme normale de Skolem

Skolemisation

La *skolemisation* (du nom du logicien norvegien T. Skolem) permet d'éliminer les quantificateurs **existentiels** tout en préservant la *satisfaisabilité* (mais pas la validité) des formules.

L'idée est que :

$$(*)\ \forall x \exists y P(x,y)$$

a un modèle si et seulement si :

$$(**)\ \forall x P(x, f(x))$$

a un modèle, où f est un symbole fonctionnel qui n'apparaît pas dans la formule traitée.

Cependant, $(*)$ et $(**)$ *ne sont pas équivalentes*, c'est-à-dire évaluées à la même valeur de vérité dans les *mêmes* interprétations.

Skolemisation

D'une façon plus générale, la formule :

$$\forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_m \exists y \forall x_{m+1} \ldots \forall x_{m+p}$$
$$P(x_1, x_2, \ldots, x_m, y, x_{m+1}, \ldots, x_{m+p})$$

donne par skolemisation :

$$\forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_m \forall x_{m+1} \ldots \forall x_{m+p}$$
$$P(x_1, x_2, \ldots, x_m, f(x_1, \ldots, x_m), x_{m+1}, \ldots, x_{m+p})$$

et, si $m = 0$:

$$\forall x_{m+1} \ldots \forall x_{m+p}\, P(a, x_{m+1}, \ldots, x_{m+p})$$

Skolemisation

Nous montrerons, à l'aide la méthode des tableaux sémantiques que :

$$(***)\ \forall x \exists y P(x,y) \not\models \forall x P(x, f(x))$$

c'est-à-dire qu'il existe des modèles de $\forall x \exists y\, P(x,y)$ qui sont des contre-modèles de $\forall x\, P(x, f(x))$.

On essaiera donc de construire des modèles de :

$$S = \{\forall x \exists y\, P(x,y), \neg[\forall x\, P(x, f(x))]\}$$

et si l'on réussit, on aura prouvé $(***)$.

Skolemisation

$$\begin{array}{rl}
1) & \forall x \exists y P(x, y) \\
2) & \exists z \neg P(z, f(z))
\end{array}$$

$$\begin{array}{cl}
\downarrow & \\
\neg P(a, f(a)) & 2),\ \ z \leftarrow a \\
\downarrow & \\
P(a, b) & 1),\ \ y \leftarrow b,\ \ x \leftarrow a \\
\vdots &
\end{array}$$

En se servant de ce tableau, il est facile de construire le contre-exemple cherché (en posant $f(a) \neq b$) :

Skolemisation

$$\mathcal{M} =< D; \{f^{\mathcal{M}}\}, \{P^{\mathcal{M}}\} >$$

avec :

$$D = \{a, b\}$$

$$P \mapsto P^{\mathcal{M}} = \{(a, b), (b, a)\}$$

$$f \mapsto f^{\mathcal{M}} = \{(a, a), (b, b)\}$$

(f est une fonction *totale*).

Skolemisation

On doit aussi remarquer que le tableau nous permet d'assurer que l'on peut toujours (si $(a, b) \in P^{\mathcal{M}}$) transformer un modèle de $\forall x \exists y\, P(x, y)$ en modèle de $\forall x\, P(x, f(x))$ (en posant $f(a) = b$).

Cette non-équivalence (appelée parfois *équivalence faible*) n'est pas vraiment un problème quand on essaie de montrer qu'une fbf *n'a pas de modèle* (c'est-à-dire que sa négation est valide) .

Skolemisation

Si l'on voulait préserver l'équivalence il faudrait remplacer :

$$\forall x \exists y \, P(x, y)$$

par

$$\exists f \forall x \, P(x, f(x))$$

...mais cette formule *n'est pas une fbf* de la LP1.

Skolemisation

Remarque. Une autre façon de prouver que la skolemisation ne préserve pas l'équivalence (mais seulement la satisfaisabilité) est de considérer le contre-exemple suivant.

La formule

$$(*)\,\forall x P(x) \vee P(a)$$

est valide, comme l'on peut vérifier très facilement, par exemple par tableaux sémantiques ou en remarquant que cette formule est équivalente à $\forall x P(x) \Rightarrow P(a)$.

Skolemisation

Si l'on transforme ($*$) on obtient d'abord :

$$\exists x \, \neg P(x) \vee P(a)$$

et en skolemisant :

$$\neg P(b) \vee P(a)$$

formule *satisfaisable mais non valide* (puisque l'on peut évaluer $P(a)$ à F et $P(b)$ à V).

Forme normale de Skolem

À partir d'une fbf de la logique du premier ordre F, par transformation en forme prénexe et skolemisation, on obtient la forme de Skolem de F (notée sk(F)) :

$$\mathsf{sk}(F) : \forall x_1 \ldots \forall x_n F'$$

où F' ne contient pas de quantificateur et $Var(F') = \{x_1, \ldots, x_n\}$.

Donc, d'après théorème 1, et la propriété de la skolemisation :

F fbf de la LP1 est satisfaisable si et seulement si sk(F) est satisfaisable.

Interprétation de Herbrand

Étant donné un ensemble fini de formules sous forme de Skolem S construit sur l'ensemble des symboles de prédicats π et de symboles fonctionnels $\mathcal{F}$, *l'univers de Herbrand* sur $\mathcal{F}$ (ou univers de Herbrand de S) est définit de la façon suivante :

$$H_0 = \{a | a \in \mathcal{F}\}$$

si $\mathcal{F}$ ne contient pas de constante, alors $H_0 = \{a\}$, où a est une constante choisir arbitrairement ;

$H_{i+1} = \{f_j^{(n)}(t_1, \ldots, t_n) | f_j^{(n)} \in \mathcal{F};\ t_k \in H_i\} \cup H_i$ pour $1 \leq k \leq n$, $i \geq 0$, $n \geq 1$.

$$H(S) = H_\infty = \Sigma(\mathcal{F})$$

Les termes dans $H(S)$ sont des termes clos ou termes fermés et sont appelés *termes de Herbrand*.

Interprétation de Herbrand

Exemple 1. Soit :

$$S = \{P(a), \forall x. \neg P(x) \vee P(f(x))\}$$

Alors :

$H_0 = \{a, f(a)\}$

$H1 = \{a, f(a), f(f(a))\}$

$H_\infty = \{a, f(a), f(f(a)), f(f(f(a))), ...\}$

Interprétation de Herbrand

Exemple 2. Soit :

$S = \{\forall x P(x), \forall x \forall y. R(x) \vee Q(y, x), \forall y. \neg Q(y, y)\}$

Pas de constante on en choisit une arbitrairement : a et $H_0 = \{a,\}$

$H_1 = \{a\}$ car il n'y a pas de fonction

$H_\infty = \{a\}$

Interprétation de Herbrand

La *base de Herbrand* de S, notée $B(S)$ est l'ensemble de littéraux positifs (c'est-à-dire des formules atomiques) éléments de FA_c ou de la forme $L[\overline{x}|\overline{t}_{H(S)}]$ avec $L(\overline{x}) \in C \in S$ ou $L(\overline{x})^c \in C \in S$ et $\overline{t}_{H(S)} \in H(S)$.

$L[\overline{x}|\overline{t}_{H(S)}]$ signifie que toutes les variables dans L sont remplacées par des termes de Herbrand.

Interprétation de Herbrand

$L[\overline{x}|\overline{t}_{H(S)}]$ est *une instance de Herbrand*, ou simplement *instance constante* ou *instance fermée* ou *instance close* de $L(x)$.

On parlera aussi de *clause fermée* ou *clause close*.

FA_c désigne l'ensemble des formules atomiques closes (fermées) dans S.

Notation : ici, en accord avec l'usage, $\overline{x}$ dénote un n-uplet de variables et $\overline{t}_{H(S)}$ un n-uplet de termes de Herbrand.

Interprétation de Herbrand

Une interprétation de Herbrand d'un ensemble de formules universellement quantifiées S construit sur $(\pi, \mathcal{F})$ est une interprétation $\mathcal{I}_{H(S)}$ telle que :

$$D = H(S)$$

si $a \in \mathcal{F}$: $a_{f_p}(a) = a$
si $f_j^{(n)} \in \mathcal{F}$: $a_{f_p}(f_j^{(n)}) = f_j^{(n)H(s)}(t_1, \ldots, t_n)$ avec $t_i \in H(S)$ pour $1 \leq i \leq n$.
si $P_k^{(m)} \in \pi$: $a_{f_p}(P_k^{(m)}) = P_k^{(m)H(S)}$ avec $P_k^{(m)H(S)} \subseteq H(S)^m$

Une interprétation de Herbrand peut être représentée par $\mathcal{I}_{H(S)} \subseteq B(S)$.

L'ensemble des interprétations de Herbrand de S correspond donc à l'ensemble des parties de $B(S)$.

Interprétation de Herbrand

Exemple 4. Soit l'ensemble de fbf :

$$S = \{C_1, C_2, C_3\}$$

avec :
$C_1 : \forall x P(x)$
$C_2 : \forall x. \neg P(x) \vee Q(f(x))$
$C_3 : \neg Q(f(a))$

Alors,

$$H(S) = \{a, f(a), \ldots, f^n(a), \ldots\}$$

$$B(S) = \{P(a), Q(f(a)), P(f(a)), Q(f(f(a))), \ldots\}$$

Interprétation de Herbrand

Une interprétation de Herbrand :

$$\mathcal{I}_{H(S)} = \{P(a), Q(f(a))\}$$

c'est-à-dire : $P(a)$ est évaluée à V et sur tous les autres éléments de $H(S)$, P est évalué à F. $Q(f(a))$ est évaluée à V et Q est évalué à F sur tous les autres éléments de $H(S)$.

Interprétation de Herbrand

Autre interprétation de Herbrand :

$$\mathcal{I}_{H(S)} = \{P(a), P(f(a)), P(f(f(a))), \ldots\}$$

c'est-à-dire : P est évalué à V sur tous les éléments de $H(S)$, Q à F sur tous les éléments de $H(S)$.

Interprétation de Herbrand

Remarque. Par construction, l'univers de Herbrand (et la base de Herbrand) d'un ensemble de formules S est soit *fini* (si aucun symbole de fonction n'apparaît dans S) soit infini dénombrable.

Par conséquent, le nombre d'interprétations de Herbrand pour un ensemble de formules S est respectivement *fini* ou *infini non dénombrable*.

Étant donnée par exemple la formule $\forall x \exists y P(x, y)$ on peut en donner un modèle non *dénombrable* : par exemple $\langle \mathbb{R}, < \rangle$, mais on peut aussi en donner un modèle *dénombrable* : $\langle \mathbb{N}, < \rangle$. Cet exemple est un cas particulier du théorème suivant.

Théorème de Löwenheim-Skolem

Théorème 1 (de Löwenheim-Skolem). *Si F fbf de la LP1 a un modèle, alors F a un modèle dénombrable.*

Preuve. Il suffit de s'intéresser à sk(F).

– On suppose que D est le domaine du discours du modèle de sk(F).

– Si une fbf universellement quantifiée (comme l'est sk(F)) est satisfaite sur un domaine D elle l'est aussi sur tout domaine $D' \subseteq D$.

Théorème de Löwenheim-Skolem

– On considère $H(\mathsf{sk}(F))$ et à partir de $H(\mathsf{sk}(F))$ on construira D' dénombrable.

– On commence par l'ensemble de constantes dans F ou de la constante ajoutée (ensemble nécessairement fini) dénotant, dans le modèle, des éléments de D. Ces éléments de D sont aussi des éléments de D'.

– Les termes $f^{(n)H(\mathsf{sk}(F))}(t_1, \ldots, t_n)$ dénotent dans le modèle des éléments dans D que nous ajoutons à D' (D' est fermé par cette opération, par définition d'univers d'Herbrand).

– Par construction D' est fini ou infini dénombrable. Le théorème est prouvé.

Théorème de Löwenheim-Skolem

Exemple. Soit une fbf :

$$F : \forall x \exists y P(x, y)$$

dont l'interprétation voulue est : *pour tout réel il existe un réel plus grand* ;

après skolémisation on obtient :

$$\mathsf{sk}(F) : \forall x P(x, f(x))$$

Un modèle peut être donné sur la structure :

$$\mathcal{M} = \langle \mathbb{R}; \{f^{\mathbb{R}}\}, \{<^{\mathbb{R}}\} \rangle$$

où $f^{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f^{\mathbb{R}}(x) = x + 0.5$.

$f \mapsto f^{\mathbb{R}}$ et $P \mapsto <^{\mathbb{R}}$.

$H(\mathsf{sk}(F)) = \{a, f^n(a) | n \geq 1\} = \{f^n(a) | n \geq 0\}$

Théorème de Löwenheim-Skolem

Si on fixe par exemple $a \mapsto -5$, on aura :
$f(a) \mapsto -4.5$
$f^2(a) \mapsto -4$
$f^3(a) \mapsto -3.5$
$\vdots$

$$D' = \{-5, -4.5, -4, -3.5, -3, \ldots\}$$

Un modèle de Herbrand :

$$M = B(\mathsf{sk}(F)) = \{P(x, f(x)) | x \in H(\mathsf{sk}(F))\}$$

Théorème de Löwenheim-Skolem

Un corollaire important du Théorème de Löwenheim-Skolem est le suivant.

Corollaire 1 (Löwenheim-Skolem pour les ensembles finis de formules). *Si un ensemble fini de fbf de la LP1 S a un modèle alors S a un modèle dénombrable.*

Preuve. Soit $S = \{F_1, F_2, \ldots, F_n\}$. Par définition, S a un modèle si et seulement si il existe un modèle satisfaisant toutes les formules de S, c'est-à-dire si et seulement si $F : \bigwedge_{i=1}^{n} F_i$ en a un. On prouve alors le corollaire en appliquant le théorème 1 à F.

Théorème de Löwenheim-Skolem

Remarques.

1. Le théorème de Löwenheim-Skolem s'applique aussi à des ensembles infinis dénombrables de fbf de la LP1 : *Si un ensemble dénombrable S de fbf de la LP1 a un modèle alors S a un modèle dénombrable.*

Théorème de Löwenheim-Skolem

2. Une conséquence immédiate du théorème de Löwenheim-Skolem est que la signification (interprétation) voulue ou souhaitée (*intended interpretation*) d'une fbf de la LP1 n'est pas unique : il y en a aussi des inespérées ou inattendues (*unintended interpretations*) .

Ainsi, les formules de la LP1 ne peuvent pas caractériser un ensemble *non dénombrable*, parce que l'on sait que en plus d'un tel ensemble (interprétation voulue, en fait modèle voulu) elles auront aussi un modèle dénombrable (c'est-à-dire dénoteront aussi un ensemble dénombrable).