LOGIQUE
L3 Informatique

Salim Lardjane
Université Bretagne Sud

5. Logique du premier ordre (LP1)

5.6 Forme normale prénexe

Introduction

Il est *impossible* d'avoir une procédure de décision pour la LP1.

En effet, en utilisant des formules de cette logique on peut décrire le fonctionnement d'une machine de Turing et pouvoir décider de la validité d'une fbf quelconque de cette logique équivaut à résoudre le problème de l'arrêt (qui est lui, *indécidable*).

Introduction

Mais rien n'empêche de chercher une procédure de *semi-décision* pour cette logique, c'est-à-dire une procédure qui, pour toute formule, si elle s'arrête donne la réponse correcte, mais si elle ne s'est pas arrêtée à un certain moment, on ne peut rien dire.

Pour tester si une formule est satisfaisable ou valide, on est (potentiellement) amené à tester une infinité d'univers, ce qui n'est évidemment pas envisageable. On verra dans la suite qu'il suffira de s'intéresser à un univers privilégié qui aura de « bonnes propriétés ».

Le premier pas dans ce sens est de transformer les formules dans une forme normale.

Forme normale prénexe

Étant donné un ensemble d'objets dont la forme peut être très variée, une transformation dans une forme normale est en général souhaitable.

Elle permet, entre autres, d'étudier les propriétés de ces objets d'une façon uniforme et d'énoncer plus simplement lesdites propriétés.

Forme normale prénexe

Définition 1. Une fbf de la LP1 F est dite en *forme normale prénexe*, ou simplement en *forme prénexe* (abrégé pr(F)) si et seulement si elle est de la forme :

$$Q_1 x_1 \dots Q_n x_n \, \mathcal{M} \quad (n \geq 0)$$

($n = 0$ signifie que la formule ne contient pas de quantificateur)
où Q_i : $\forall$ ou $\exists$
$Q_1 x_1 \dots Q_n x_n$ est appelé *le préfixe*
$\mathcal{M}$: ne contient pas de quantificateur, est appelé *la matrice*.

On sous-entend que si $Q_i \neq Q_j$ alors $x_i \neq x_j$ (c'est-à-dire qu'on ne quantifie pas la même variable avec des quantificateurs différents).

Forme normale prénexe

Théorème 1 (existence de la forme normale prénexe). *Si F est une fbf de la LP1 alors il existe une pr(F) équivalente.*

Preuve (plan). Appliquer les équivalences ci-dessous et raisonner par induction sur le nombre de connectifs.

Les règles supposent $x \notin Var(G)$ (renommer si nécessaire).

Forme normale prénexe

1. $\neg\forall x F$ équiv. $\exists x \neg F$
2. $\neg\exists x F$ équiv. $\forall x \neg F$
3. $\forall x F \wedge G$ équiv. $\forall x (F \wedge G)$

3'. $G \wedge \forall x F$ équiv. $\forall x (G \wedge F)$

4. $\exists x F \wedge G$ équiv. $\exists x (F \wedge G)$

4'. $G \wedge \exists x F$ équiv. $\exists x (G \wedge F)$

5. $\forall x F \Rightarrow G$ équiv. $\exists x (F \Rightarrow G)$

5'. $G \Rightarrow \forall x F$ équiv. $\forall x (G \Rightarrow F)$

6. $\exists x F \Rightarrow G$ équiv. $\forall x (F \Rightarrow G)$

6'. $G \Rightarrow \exists x F$ équiv. $\exists x (G \Rightarrow F)$

7. $\forall x F \vee G$ équiv. $\forall x (F \vee G)$

7'. $G \vee \forall x F$ équiv. $\forall x (G \vee F)$

8. $\exists x F \vee G$ équiv. $\exists x (F \vee G)$

8'. $G \vee \exists x F$ équiv. $\exists x (G \vee F)$

En fait, 1., 2., 3., 4. suffisent (les autres règles peuvent être obtenues par équivalence).

Forme normale prénexe

Exemple 1. Nous pouvons utiliser la méthode des tableaux sémantiques pour prouver la validité, ou la non-validité via un contre exemple, des expressions dénotant des fbf et que nous appellerons « formules génériques », c'est-à-dire des ensembles de formules avec une certaine structure, que l'on peut caractériser en nommant leurs sous-formules.

Nous prouvons ci-après la validité de la règle 5. utilisée dans la preuve du théorème 1.

Forme normale prénexe

Nous nous servons aussi des informations fournies par la méthode des tableaux sémantiques pour construire un contre-exemple d'une règle de transformation (incorrecte) que l'on pourrait être tenté d'utiliser : *Comme la sous formule* G *ne contient pas la variable quantifiée* x*, on peut inclure* G *dans la portée de* $\forall x$.

Forme normale prénexe

1. $\neg\{(\ \forall x F[x] \Rightarrow G\ ) \Leftrightarrow \exists x (F[x] \Rightarrow G)\}$

2. $\forall x F[x] \Rightarrow G$ 1.
3. $\neg[\exists y (F[y] \Rightarrow G)]$ 1. et renom.

4. $\neg[\forall u F[u] \Rightarrow G]$ 1. et renom.
$\surd$ 5. $\exists v (F[v] \Rightarrow G)$ 1. et renom.

6. $\forall y \neg (F[y] \Rightarrow G)$ 3.

15. $F[b] \Rightarrow G$ 5., $v \leftarrow b$

16. $\forall u F[u]$ 4.
17. $\neg G$ 4.

7. $\neg \forall x F[x]$ 2.

8. G 2.

18. $F[b]$ 16., $u \leftarrow b$

13. $F[a]$ 6., y $\leftarrow$ a
14. $\neg G$ 6.
$\times$ 8. $-$ 14.

$\surd$ 9. $\exists x \neg F[x]$ 7.

10. $\neg F[a]$ 9., x $\leftarrow$ a

11. $F[a]$ 6., y $\leftarrow$ a
12. $\neg G$ 6.
$\times$ 10. $-$ 11.

Forme normale prénexe

1. $\neg\{(\forall x F[x] \Rightarrow G) \Rightarrow \forall x(F[x] \Rightarrow G)\}$

2. $\forall x F[x] \Rightarrow G$ 1.
3. $\neg[\forall y(F[y] \Rightarrow G)]$ 1., et renom.

$\surd$ 4. $\exists y \neg(F[y] \Rightarrow G)$ 3.

5. $\neg(F[a] \Rightarrow G)$ 4., y $\leftarrow$ a

6. $\boxed{F[a]}$ 5.
7. $\boxed{\neg G}$ 5.

8. $\neg(\forall x F[x])$ 2.

$\surd$ 10. $\exists x \neg F[x]$ 8.

11. $\boxed{\neg F[b]}$ 10., x $\leftarrow$ b

9. G. 2.

$\times$ (7. – 9.)

Forme normale prénexe

On peut extraire un modèle de la négation de la formule (c'est-à-dire un contre exemple de la formule considérée) de la branche ouverte (il ne reste plus de formule quantifiée universellement : 2. a été remplacée par 8. et 9.), en prenant par exemple :

$$F[x] \leftarrow P(x)$$

$$G \leftarrow Q(y)$$

(Ce remplacement respecte les hypothèses de départ)
et comme structure $\mathcal{M} =< D; \mathcal{R} >$ avec :

$$D = \{a, b\}$$

et

$$\mathcal{R} = \{\{a\}, \{b\}\}$$

Forme normale prénexe

Le contre-exemple construit par l'arbre correspond à :

$$P \mapsto \{a\}$$

c'est-à-dire $P(a)$: V, $P(b)$: F, et

$$Q \mapsto \{b\}$$

c'est-à-dire $Q(b)$: V, $Q(a)$: F.

Forme normale prénexe

Il s'agit bien d'un contre-exemple, la vérification en est immédiate :

$$(*)(\forall x P(x) \Rightarrow Q(y)) \Rightarrow \forall x(P(x) \Rightarrow Q(y))$$

Or, $\forall x P(x)$: F puisque $P(b)$: F, donc $\forall x P(x) \Rightarrow Q(y)$: V et $\forall x(P(x) \Rightarrow Q(y))$: F puisque $P(a) \Rightarrow Q(a)$: F.

$(*)$ est donc évaluée à F dans l'interprétation proposée.

Forme normale prénexe

La forme normale prénexe est-elle unique ? L'exemple suivant montre que la réponse est non.

Exemple 2 (non-unicité de la forme normale prénexe). L'ordre d'application des règles peut donner différentes formes prénexe pour la même formule. Considérons la formule :

$$\forall x \exists y F \Rightarrow \exists z G \ (x,\ y \notin Var(G),\ z \notin Var(F))$$

- $\forall x \exists y F \Rightarrow \exists z G \xrightarrow{6'} \exists z(\forall x \exists y F \Rightarrow G) \xrightarrow{5} \exists z(\exists x(\exists y F \Rightarrow G)) \xrightarrow{6} \exists z \exists x \forall y(F \Rightarrow G)$
- $\forall x \exists y F \Rightarrow \exists z G \xrightarrow{5} \exists x(\exists y F \Rightarrow \exists z G) \xrightarrow{6} \exists x(\forall y(F \Rightarrow \exists z G)) \xrightarrow{6'} \exists x \forall y \exists z(F \Rightarrow G)$
- $\forall x \exists y F \Rightarrow \exists z G \xrightarrow{5} \exists x(\exists y F \Rightarrow \exists z G) \xrightarrow{6'} \exists x(\exists z(\exists y F \Rightarrow G)) \xrightarrow{6} \exists x \exists z \forall y(F \Rightarrow G)$

Forme normale prénexe

Le préfixe de la forme prénexe contient des quantificateurs existentiels.

Pour établir des théorèmes fondamentaux pour l'automatisation de la LP1, nous devons introduire une opération permettant de les éliminer. Il s'agira de la *skolemisation*.