LOGIQUE
L3 Informatique

Salim Lardjane
Université Bretagne Sud

5. Logique du premier ordre (LP1)

5.5 Tableaux sémantique en LP1

Introduction

La méthode des tableaux sémantiques en LP1 est obtenue par réduction à la méthode des tableaux sémantiques pour la LP0.

Deux différences fondamentales par rapport à la méthode étudiée pour la LP0 doivent être signalées (elles sont inhérentes à la LP1) :

– la présence des quantificateurs $\forall$ et $\exists$;

– a méthode peut ne pas s'arrêter (la LP1 est indécidable).

Notre façon de faire sera essentiellement i*ntuitive*, s'appuyant sur les mêmes idées que le raisonnement formel correspondant.

Introduction

Le *théorème de Löwenheim-Skolem* assure que la recherche de modèles pour des formules de la LP1 peut se restreindre à des domaines dénombrables.

Dorénavant, nous nous restreignons donc aux univers (interprétations, modèles) dénombrables, c'est-à-dire les seuls que l'on puisse traiter en informatique.

Ceci permet de résoudre le problème du traitement des quantificateurs.

Introduction

Sur un univers dénombrable

$$D = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$$

les quantificateurs $\forall$ et $\exists$ correspondent à :

$$\forall x P(x) : P(a_1) \wedge P(a_2) \wedge P(a_3) \wedge \ldots$$

$$\exists x P(x) : P(a_1) \vee P(a_2) \vee P(a_3) \vee \ldots$$

Ce ne sont pas des fbf de la LP1, mais une façon informelle de dire les choses.

Introduction

Deux questions importantes doivent être soulevées :

1. quand on remplace des variables par des éléments du domaine D, ce que l'on obtient en général ne sont pas des fbf de la LP1.

Mais l'intuition, aidée par la pratique mathématique, suggère que « ce n'est pas grave ».

En effet, dans la pratique mathématique, on ne se sent pas obligé de déclarer des signatures et l'on introduit des symboles au fur et à mesure des besoins.

D'autre part, en général, le domaine du discours (côté sémantique) sera décrit en utilisant un ensemble de symboles disjoint de celui utilisé pour écrire les formules (côté syntaxique).

On peut donc supposer que chaque fois que l'on essaiera de trouver des modèles pour des formules de la LP1 (ou de prouver qu'elle n'en ont pas) on dispose d'un ensemble infini dénombrable de paramètres, noté Par (avec $Par \cap \mathcal{C} = \emptyset$), qui pourront remplacer les variables apparaissant dans les formules et dénoteront aussi les valeurs des termes fermés ;

2. le deuxième point-clé est que dans la preuve du théorème de Löwenheim-Skolem, on suppose que la formule considérée F est sous *forme normale de Skolem* (notée $sk(F)$), c'est à dire sur une forme normale qui, elle, ne sera pas exigée pour traiter la formule par tableaux sémantiques.

Une opération capitale pour l'obtention de $sk(F)$ est l'élimination des $\exists$ par *skolemisation*.

Introduction

Dans le remplacement de $\forall x \exists y P(x,y)$ par $\forall x P(x, f(x))$, la skolemisation introduit une fonction f (non définie, mais dont on est sûr de l'existence en acceptant l'axiome du choix).

Cette fonction peut être remplacée par son graphe avec domaine et co-domaine Par, c'est-à-dire qu'on remplacera $\forall x \exists y P(x,y)$ par $P(a_1, a2)$, $P(a_3, a_4)$, ...

Introduction

On peut aussi se dire, en utilisant un argument similaire à celui utilisé dans la preuve du théorème de Löwenheim-Skolem : si la formule $\forall x \exists y P(x, y)$ a un modèle $\mathcal{M}$ avec domaine non dénombrable D, ceci veut dire que pour tout $x \in D$, il existe $y \in D$ tel que $P^{\mathcal{M}}(x, y)$ (où $P^{\mathcal{M}}$ est la relation assignée à P dans le modèle).

Mais si ceci est vrai pour tout $x \in D$, ceci est aussi vrai pour un sous-ensemble dénombrable de D, et en particulier, à un renommage près, sur le domaine Par.

Un raisonnement identique s'applique à des formules quantifiées exclusivement avec des $\forall$.

Quelques équivalences

Nous utiliserons les équivalences suivantes (ne pas le faire peut être source d'erreurs) :

$\forall x P(x)\ \mathcal{K}\ \forall x Q(x)$ equiv $\forall x P(x)\ \mathcal{K}\ \forall y Q(y)$

$\exists x P(x)\ \mathcal{K}\ \exists x Q(x)$ equiv $\exists x P(x)\ \mathcal{K}\ \exists y Q(y)$

avec $\mathcal{K} \in \{\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$,

ainsi que

$\neg\forall x\ \mathcal{P}$ equiv $\exists x\ \neg\mathcal{P}$

$\neg\exists x\ \mathcal{P}$ equiv $\forall x\ \neg\mathcal{P}$

$\neg\forall x\ \neg\mathcal{P}$ equiv $\exists x\ \mathcal{P}$

$\neg\exists x\ \neg\mathcal{P}$ equiv $\forall x\ \mathcal{P}$

où $\mathcal{P}$ dénote une fbf.

Quelques équivalences

Les quatre dernières règles sont fréquemment utilisées. Par exemple, si l'on veut exprimer que *la fonction f n'est pas injective* :

$$f \text{ injective : } \forall x \forall y (x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y))$$

f non injective : $\neg[\forall x \forall y (x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y))]$

équivaut à :

$$\exists x \exists y \neg (x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y))$$

équivaut à :

$$\exists x \exists y (x \neg y \wedge \neg (f(x) \neq f(y))))$$

(où l'on a utilisé le fait que $(\neg(A \Rightarrow B)$ equiv $A \wedge \neg B))$
équivaut à :

$$\exists x \exists y (x \neq y \wedge f(x) = f(y)).$$

Tableaux sémantiques en LP1

Les règles à utiliser pour la méthode des tableaux dans la LP1 sont les règles α et β de la LP0, auxquelles il faut ajouter les équivalences ci-dessus et les règles de la figure ci-dessous :

γ	$\gamma(t)$	δ	$\delta(t)$
$\forall x F$	$F[x \leftarrow t]$	$\exists x F$	$F[x \leftarrow t]$
$\neg \exists x F$	$\neg F[x \leftarrow t]$	$\neg \forall x F$	$\neg F[x \leftarrow t]$
	t : *terme clos*		t : *symbole de constante* **nouveau**

Des exemples d'application des règles γ et δ seront vus dans la suite.

Tableaux sémantiques en LP1

Remarque. Il devrait être clair que, bien que syntaxiquement différentes d'une proposition (formule de base), des formules atomiques telles que $P(a_1)$ avec a_1 une constante, correspondent à la définition de proposition et il est correct de les considérer comme telles.

Souvent on appelle les formules atomiques comme $P(x)$ *fonctions propositionnelles*.

Pour fixer les idées, penser à $H(x)$ (x est un homme). On ne peut pas l'évaluer tant que l'on connaît pas la valeur de x. Ce n'est pas le cas de $H(a)$ (Socrate est un homme) ou $H(b)$ (La mère de Socrate est un homme).

Tableaux sémantiques en LP1

Comme pour la LP0, on **ferme** *une branche quand on y détecte une contradiction élémentaire (par exemple de la forme* $P(a)$, $\neg P(a)$*), qui est la seule que l'on puisse toujours détecter syntaxiquement (c'est-à-dire mécaniquement).*

L'algorithme de construction des tableaux sémantiques en LP1 est présenté ci-après (L1O est une autre notation pour LP1).

Algorithme

procédure TABLEAUX SÉMANTIQUES (L1O)
% construit l'arbre
entrée : un ensemble fini de fbff de la L1O $\mathcal{F} = \{f_1, \ldots, f_n\}$
sortie : (si la procédure s'arrête) des modèles de $\mathcal{F}$ ou $\mathcal{F}$ contradictoire
% elle peut **ne pas s'arrêter** (L1O indécidable)
début
racine de l'arbre $\leftarrow \mathcal{F}$
tantque $\mathcal{F} \neq \emptyset$ **et** (il y a des branches ouvertes)
faire
si une branche $\mathcal{B}$ contient 2 c-littéraux compl. fermer $\mathcal{B}$
(c'est-à-dire mettre une $\times$)
% le modèle correspondant **n'est pas** viable
choisir $f_i \in \mathcal{F}$
si f_i de la forme $[\neg]$ (F [$<$ *connectif* $>$ G])
% [...] : possiblement inexistant
alors appliquer règles α et β : on obtient f_i^j $(1 \leq j \leq 2)$
Greffer f_i^j $(1 \leq j \leq 2)$ dans **toutes** les
branches **ouvertes** passant par le noeud étiquetté f_i
$\mathcal{F} \leftarrow \mathcal{F} \setminus \{f_i\}$
sinon si f_i de la forme $\exists x G$
alors appliquer règle δ **et** faire $\mathcal{F} \leftarrow (\mathcal{F} \setminus \{f_i\}) \cup G[x \leftarrow t]$
% on utilise les formules existentielles **1 seule fois**
sinon si f_i de la forme $\forall x G$ **alors** appliquer règle γ **et** faire $\mathcal{F} \leftarrow \mathcal{F} \cup G[x \leftarrow t]$
% on garde f_i **indéfiniment**
finfaire

si arbre fermé
alors retourner $\mathcal{F}$ contradictoire
sinon retourner les ensembles de littéraux des branches ouvertes
fin

Tableaux sémantiques en LP1

Remarque.

L'algorithme précédent est *non déterministe*, autrement dit, les choix sont libres.

Mais, quand on n'arrive pas à fermer un arbre, on est en droit de se demander si ceci est dû au fait qu'il est effectivement impossible de le fermer ou tout simplement au fait que l'on a choisi une mauvaise stratégie qui retarde indéfiniment certains choix qui auraient permis de fermer l'arbre.

Une telle stratégie sera dite *inéquitable* (*unfair*).

Tableaux sémantiques en LP1

Ceci ne veut pas dire qu'en utilisant une stratégie *équitable* (c'est à-dire une stratégie qui ne repousse pas indéfiniment un choix possible) on transformera un problème indécidable en un autre décidable, mais simplement on veut éliminer des cas de non-terminaison *artificielle*.

Le cas suivant en est un exemple convaincant.

Tableaux sémantiques en LP1

Exemple 1. Supposons que l'on veut montrer la correction du raisonnement suivant (a dénote une constante)

$$\frac{\forall x \exists y P(x, y)}{\exists y P(a, y)}$$

Tableaux sémantiques en LP1

Si l'on applique une stratégie équitable on prouve facilement qu'il s'agit d'un raisonnement correct :

$$
\begin{array}{lll}
1. & \forall x \exists y P(x,y) & \\
2. & \neg(\exists y P(a,y)) & \\
 & \downarrow & \\
3. & \forall y \neg P(a,y) & 2. \\
 & \downarrow & \\
4. & \exists y P(a,y) & 1.\ x \leftarrow a \\
 & \downarrow & \\
5 & P(a,b) & 4.\ y \leftarrow b \\
 & \downarrow & \\
6. & \neg P(a,b) & 3.\ y \leftarrow b \\
 & \times & 5.\ \textit{et}\ 6.
\end{array}
$$

Tableaux sémantiques en LP1

Maintenant, si l'on retarde indéfiniment certains choix :

$$
\begin{array}{lcl}
1. & \forall x \exists y P(x,y) & \\
2. & \neg(\exists y P(a,y)) & \\
 & \downarrow & \\
3. & \exists y P(a,y) & 1.\ x \leftarrow a \\
 & \downarrow & \\
4. & P(a,b) & 3.\ y \leftarrow b \\
 & \downarrow & \\
5 & \exists y P(b,y) & 1.\ x \leftarrow b \\
 & \downarrow & \\
6. & P(b,c) & 5.\ y \leftarrow c \\
 & \downarrow & \\
7 & \exists y P(c,y) & 1.\ x \leftarrow c \\
 & \downarrow & \\
 & \vdots &
\end{array}
$$

Exemple 2. Considérons le célèbre syllogisme « Tous les hommes sont mortels. Socrate est un homme. Donc, Socrate est mortel ». Sa traduction, en LP1 donne :

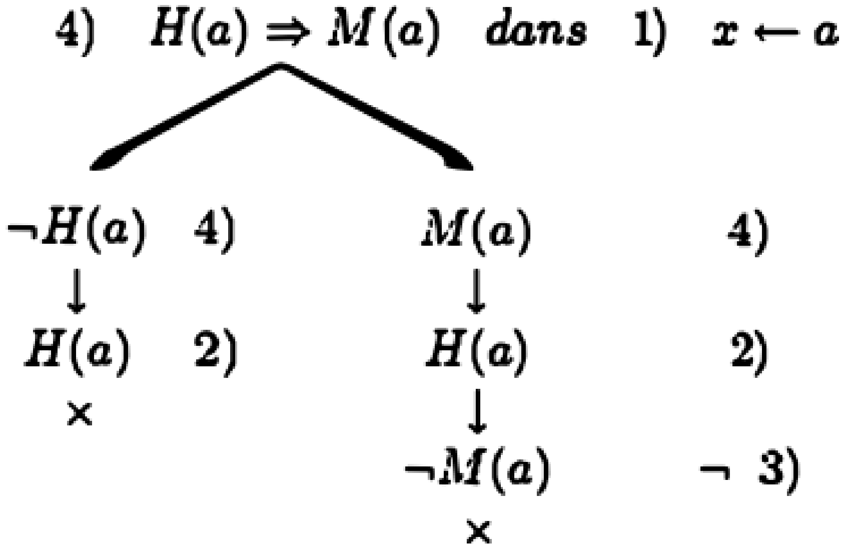
$$\begin{array}{lc} 1) & \forall x(H(x) \Rightarrow M(x)) \\ 2) & H(a) \\ \hline 3) & M(a) \end{array}$$

où
$H(x)$: x est un homme
$M(x)$: x est mortel
a : Socrate.

Pour prouver la correction du raisonnement, nous prenons l'ensemble :

$$\{\forall x(H(x) \Rightarrow M(x)), H(a), \neg M(a)\}$$

Tableaux sémantiques en LP1



Tableaux sémantiques en LP1

Exemple 3. Soit le raisonnement :

$$\frac{\begin{array}{c}\forall x(P(x,b) \Rightarrow P(a,b)) \\ \neg P(a,b)\end{array}}{\neg \exists x P(x,b)}$$

On essaie donc de construire des modèles pour l'ensemble de fbf 1, 2, 3 ci-dessous (2 correspond à la négation de la conclusion).

Tableaux sémantiques en LP1

1)	$\neg P(a,b)$	$\checkmark$	
2)	$\exists x P(x,b)$	$\checkmark$	
3)	$\forall x (P(x,b) \Rightarrow P(a,b))$		
	$\downarrow$		
4)	$P(c,b)$	*dans* 2)	$x \leftarrow c$
5)	$P(c,b) \Rightarrow P(a,b)$	*dans* 3)	$x \leftarrow c$

6)	$\neg P(c,b)$	5)	7)	$P(a,b)$	5)
	$\times$	4) – 5)		$\times$	1) – 7)

Tableaux sémantiques en LP1

Remarques.

Dans cet exemple, nous avons utilisé dans la méthode quelques principes généraux (indiqués dans l'algorithme) qui correspondent aux pratiques courantes en mathématiques :

- nous avons remplacé le $\exists x$ par c, une constante nouvelle (c'est-à-dire qui n'apparaissait pas dans l'ensemble de fbf du raisonnement) ;

Tableaux sémantiques en LP1

- une fois que l'on a introduit une constante à la place de $\exists x$, on n'a plus le droit d'utiliser 2) (c'est la raison pour laquelle nous marquons 2) comme *utilisée* ($\surd$)) ;

- dans 3), on peut remplacer la variable x potentiellement une infinité de fois, c'est pourquoi on ne doit pas la marquer comme utilisée. Nous voyons que $\forall x$ peut être donc à l'origine d'arbres infinis ;

- de la même façon que chaque fois que l'on utilisait une fbf de la LP0 on la marquait (au moins implicitement) *utilisée*, on a marqué 1) avec $\surd$.

Tableaux sémantiques en LP1

Exemple 4. Le problème se pose : que se passe-t-il quand le raisonnement que l'on vérifie n'est pas correct, c'est-à-dire que l'ensemble des fbf correspondant n'est pas contradictoire ?

La réponse est la même que pour la LP0 : il y aura des branches ouvertes.

Mais la différence est qu'il peut y avoir dans le cas de la LP1 des branches infinies.

Nous voyons un cas où la méthode s'arrête et d'autres où elle ne s'arrête pas.

Tableaux sémantiques en LP1

$$\frac{\exists x P(x)}{\forall x P(x)}$$

On considère donc l'ensemble de fbf 1, 2 ci-dessous :

$$\begin{array}{llll}
1) & \exists x P(x) & & \checkmark \\
2) & \neg(\forall x P(x)) & & \\
 & \downarrow & & \\
3) & \exists y \neg P(y) & & \checkmark \\
 & \downarrow & & \\
 & \neg P(a) & dans \;\; 3) \;\; y \leftarrow a & \\
 & \downarrow & & \\
 & P(b) & dans \;\; 1) \;\; x \leftarrow b &
\end{array}$$

Tableaux sémantiques en LP1

On arrête sans pouvoir fermer l'arbre.

On a un modèle de l'ensemble de fbf, c'est-à-dire un contre-exemple du raisonnement initial.

La signification de la branche ouverte est simple : une relation unaire (c'est-à-dire une propriété) correspondant à P qui est vraie pour la valeur b (c'est-à-dire b appartient à la relation) et fausse pour a (c'est-à-dire a n'appartient pas à la relation) .

Cette interprétation rend vraie la prémisse et fausse la conclusion.

Tableaux sémantiques en LP1

Plus formellement, on peut extraire de la branche ouverte du tableau une interprétation $\mathcal{I}$ contre-exemple du raisonnement proposé :

$$\mathcal{M} =< D; \mathcal{R} >$$

avec :

$$D = \{a, b\}$$

$$\mathcal{R} = \{b\}$$

dans $\mathcal{I}$, a_{f_p} : $P \rightarrow \mathcal{R}$.

...d'autres fois ce n'est pas possible (pour la méthode, un humain qui observe son fonctionnement peut, dans ce cas particulier, se rendre compte sans difficulté qu'elle ne s'arrêtera pas) .

Tableaux sémantiques en LP1

Si l'on veut tester la validité de la fbf :

$$\exists x \forall y \neg P(x,y)$$

on teste l'insatisfaisabilité de :

$$\begin{array}{c}
\neg(\exists x \forall y \neg P(x,y)) \\
\downarrow \\
\forall x \exists y P(x,y) \\
\downarrow \\
P(a_1,b_1) \\
\downarrow \\
P(a_2,b_2) \\
\downarrow \\
P(a_3,b_3) \\
\vdots
\end{array}$$

On "voit" que la méthode essaie de construire un modèle *infini* (penser à D : $\mathbb{N}$ et $P(x,y)$: $x < y$).

Tableaux sémantiques en LP1

Exemple 5. Il s'agit de vérifier la correction (ou l'incorrection) du raisonnement suivant à l'aide de la méthode des tableaux.

$$\frac{\begin{array}{c}\text{Tous les ingénieurs ont un diplôme de l'enseignement supérieur}\\ \text{Quelques personnes ayant un diplôme de l'enseignement supérieur sont pauvres}\end{array}}{\text{Quelques ingénieurs sont pauvres}}$$

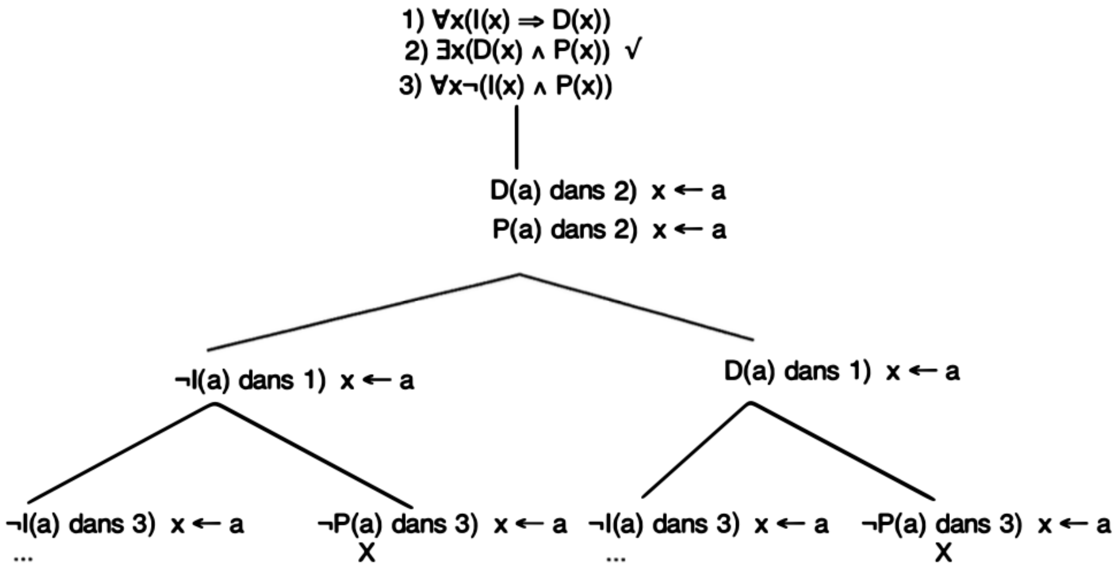
Que nous formalisons en LP1 et en utilisant les prédicats :
$I(x)$: x est ingénieur ;
$D(x)$: x a un diplôme de l'enseignement supérieur ;
$P(x)$: x est pauvre.

Le raisonnement se met alors sous la forme :

$$\frac{\begin{array}{c}\forall x(I(x) \Rightarrow D(x))\\ \exists x(D(x) \wedge P(x))\end{array}}{\exists x(I(x) \wedge P(x))}$$

Tableaux sémantiques en LP1

On essaie donc de construire des modèles des prémisses et de la négation de la conclusion.



La branche la plus à gauche ne pourra pas être fermée (ce n'est pas la méthode qui détecte cette propriété), ce qui nous donne un contre-exemple du raisonnement initial : quelqu'un qui a un diplôme de l'enseignement supérieur ($D(a)$), qui est pauvre ($P(a)$) et qui n'est pas ingénieur ($\neg I(a)$).

Tableaux sémantiques en LP1

On peut penser à un univers contenant, par exemple seulement un avocat pauvre... ou à un univers où parmi les diplômés de l'enseignement supérieur pauvres il n'y a aucun ingénieur.

Bien entendu, il peut y avoir des ingénieurs pauvres, mais le raisonnement proposé n'en est pas une preuve.

Tableaux sémantiques et unification

Dans la méthode des tableaux sémantiques dans la LP1 il y a deux problèmes principaux, l'un lié à la règle γ, correspondant à l'instantiation des variables quantifiées universellement et l'autre lié à la règle δ, correspondant à l'introduction des constantes uniques et nouvelles comme instantiations des variables quantifiées existentiellement.

Tableaux sémantiques et unification

– Concernant la règle γ, à l'origine des branches potentiellement infinies, le problème est de trouver les instances adéquates de manière à fermer les branches (qui peuvent être fermées) à la plus petite profondeur possible.

Une solution fréquemment adoptée dans les implémentations est de remplacer une variable quantifiée universellement, disons x par une variable (libre), disons X.

Nous noterons ce renommage : $x \to X$.

Évidemment, la « disparition » des quantificateurs $\forall$ ne doit pas faire oublier que les variables libres introduites peuvent être remplacées par le nombre de termes que l'on souhaite. Pour préserver cette propriété, nous introduirons des renommages des variables libres que nous noterons : $x \to X_1$, $X_1 \to X_2$, $X_2 \to X_3$,...

Tableaux sémantiques et unification

– Concernant la règle δ, quand il y aura, disons$n$ variables libres $X_1, X_2, \ldots, X_n$ qui ont été introduites dans la branche correspondant à la formule F où $\exists y$ apparaît dans la portée des $X_1, X_2, \ldots, X_n$, on supprimera, comme d'habitude $\exists y$ et on remplacera y par $f(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, où f est un symbole fonctionnel nouveau appelé *fonction de Skolem*.

Ceci nous garantit l'introduction d'un nom (constante) nouveau (nouvelle) à chaque instantiation de la variable existentiellement quantifiée, qui est dans la portée de variables universellement quantifiées (les termes syntaxiquement différents correspondent à des noms différents), c'est-à-dire le cas le plus général.

Tableaux sémantiques et unification

– L'algorithme d'unification est utilisé pour trouver les instantiations permettant de fermer les branches ou détecter que l'on ne peut pas (encore) les fermer, suggérant donc des renommages des variables libres (et implicitement des variables existentiellement quantifiées dans la portée de ces variables libres).

Tableaux sémantiques et unification

Exemple 1. Prouver la validité de la formule :

1. $\forall x(P(x) \vee Q(x)) \Rightarrow (\exists x P(x) \vee \forall x Q(x))$

1'. $\neg[\forall x(P(x) \vee Q(x)) \Rightarrow (\exists x P(x) \vee \forall x Q(x))]$ % négation de 1.

2. $\forall x(P(x) \vee Q(x))$ 1'.
3. $\neg(\exists y P(y) \vee \forall z Q(z))$ 1'. et renommage des variables

4. $P(X) \vee Q(X)$ 2., $x \longrightarrow X$
5. $\neg\exists y P(y)$ 3.
6. $\neg\forall z Q(z)$ 3.

7. $\forall y \neg P(y)$ 5.
$\surd$ 8. $\exists z \neg Q(z)$ 6.

9. $\neg P(Y)$ 7. $y \longrightarrow Y$
10. $\neg Q(a)$ 8., $z \leftarrow a$

11. $P(X)$ 4.
$\times$ (9. – 11.), $\{X \leftarrow a, Y \leftarrow a\}$

12. $Q(X)$ 4.
$\times$ (10. – 12.), $\{X \leftarrow a\}$

Remarquer que dans les formules 11. et 12. il s'agit du même X.

Tableaux sémantiques et unification

Exemple 2. Prouver la non-validité de la formule :

1. $\forall x \exists y P(x,y) \Rightarrow \exists y \forall x P(x,y)$

$|$

1′. $\neg[\forall x \exists y P(x,y) \Rightarrow \exists y \forall x P(x,y)]$ % négation de 1.

$|$

2. $\forall x \exists y P(x,y)$ 1′.
3. $\neg[\exists u \forall v P(v,u)]$ 1′. et renommage des variables

$|$

4. $\exists y P(X,y)$ 2., $x \longrightarrow X$
5. $P(X, f(X))$ 4., skolemisation

$|$

6. $\forall u \exists v \neg P(v,u)$ 3.

$|$

7. $\exists v \neg P(v,U)$ 6., $u \longrightarrow U$
8. $\neg P(g(U),U)$ 7., skolemisation

$|$

arguments (5. - 8.) unifiables ?

$\boxed{\text{Unification échoue (cycle)}}$

$|$

% En renommant $\mathbf{X \longrightarrow X_1}$, $\mathbf{U \longrightarrow U_1}$ l'algorithme d'unification échouera toujours (cycle)