LOGIQUE
L3 Informatique

Salim Lardjane
Université Bretagne Sud

5. Logique du premier ordre (LP1)

5.4 Sémantique de la LP1 - Structures, Modèles, Théories

Structures

Définition 1. Etant donné un langage du premier ordre $\mathcal{L}_1$, une *structure du premier ordre* ou *structure* $\mathcal{M}$ est un triplet :

$$\mathcal{M} =< D; \mathcal{F}, \mathcal{R} >$$

où D est un ensemble non vide appelé *domaine* ou *univers* du discours ;

$$\mathcal{F} = \{f_1^{(i_1)}, \ldots, f_n^{(i_n)}, \ldots\}$$

est un ensemble de fonctions $f_j^{(i_j)} : D^{i_j} \to D$;

$$\mathcal{R} = \{r_1^{(k_1)}, \ldots, r_n^{(k_n)}, \ldots\}$$

est un ensemble de relations $r_j^{(k_j)} \subseteq D^{k_j}$. Les $f_j^{(i_j)}$ (en particulier les constantes) et les $r_j^{(k_j)}$ correspondant respectivement aux symboles fonctionnels et aux prédicats dans $\mathcal{L}_1$.

Deux cas particuliers :
$\mathcal{M} =< D, \mathcal{F} >$: *algèbre (abstraite)*.
$\mathcal{M} =< D, \mathcal{R} >$: *système relationnel*.

Structures

Exemples.

$\mathcal{M}_1 =< \mathbb{Z}; \{+\}, \{\leq\} >$: structure.
$\mathcal{M}_2 =< \mathbb{Z}; \{\leq\} >$: système relationnel.
$\mathcal{M}_3 =< \mathbb{R}; \{+, -, \times\} >$: algèbre.

En cherchant des interprétations pour des fbf ou des ensembles de fbf, on remarque souvent que différentes interprétations sont « essentiellement » les mêmes.

Plus précisément, à chaque élément du domaine de l'une correspond un élément du domaine de l'autre avec les mêmes propriétés et réciproquement.

Cette particularité est formalisée dans la définition suivante.

Structures

Définition 2. Etant données deux structures $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$:

$$\mathcal{M}_1 =< D_1; \mathcal{F}_1, \mathcal{R}_1 >$$

$$\mathcal{M}_2 =< D_2; \mathcal{F}_2, \mathcal{R}_2 >$$

une bijection :

$$\mathcal{I} : D_1 \to D_2$$

est dite un *isomorphisme de structure* si et seulement si : (les exposants $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$ identifient la structure à laquelle appartiennent les objets)

Structures

– pour toute constante c dans la signature de $\mathcal{L}_1$:

$$\mathcal{I}(c^{\mathcal{M}_1}) = c^{\mathcal{M}_2}$$

– pour tout n-uplet $(d_1, d_2, \ldots, d_n) \in D_1^n$ et tout symbole fonctionnel n-aire $f^{(n)}$ dans la signature de $\mathcal{L}_1$:

$$\mathcal{I}(f^{(n)\mathcal{M}_1}(d_1, d_2, \ldots, d_n)) = f^{(n)\mathcal{M}_2}(\mathcal{I}(d_1), \mathcal{I}(d_2), \ldots, \mathcal{I}(d_n))$$

– pour tout n-uplet $(d_1, d_2, \ldots, d_n) \in D_1^n$ et tout symbole de prédicat n-aire $P^{(n)}$ dans la signature de $\mathcal{L}_1$:

$$P^{(n)\mathcal{M}_1}(d_1, d_2, \ldots, d_n) = P^{(n)\mathcal{M}_2}(\mathcal{I}(d_1), \mathcal{I}(d_2), \ldots, \mathcal{I}(d_n))$$

$\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$ sont dites *isomorphes*.

Structures

L'idée derrière la définition suivante est la même que nous avons utilisée informellement et intuitivement dans les exemples.

Etant donné un langage (ou une fbf) du premier ordre on se place dans un univers D, à une constante dans la fbf on fait correspondre un élément de D, aux symboles fonctionnels d'arité n une fonction totale (c'est-à-dire définie partout dans D) d'arité n sur D et aux symboles de prédicats d'arité k des relations d'arité k sur D.

Aux variables on fait « parcourir » D et on interprète $\forall$ et $\exists$ comme d'habitude, c'est-à-dire « pour tous » et « il existe (au moins un) » respectivement.

La sémantique (sens, signification) de la fbf est ainsi donnée par celle des fonctions et relations dans l'univers choisi, supposées elles connues.

Définition 3. Soit $\mathcal{L}_1$ un langage de premier ordre et $\mathcal{M} =< D; \mathcal{F}, \mathcal{R} >$ une structure. Une *fp-assignation* (f pour fonction, p pour prédicat) est une fonction a_{f_p} satisfaisant :

i) pour tout symbole de prédicat $P_k^{(k_n)}$, $a_{f_P}(P_k^{(k_n)})$ est une relation $P_k^{\mathcal{M}} \subseteq D^{k_n}$ de $\mathcal{R}$;

ii) pour tout symbole de fonction $f_j^{(j_n)}$, $a_{f_p}(f_j^{(j_n)})$ est une fonction (totale)

$$f_j^{\mathcal{M}} : D^{j_n} \to D$$

de $\mathcal{F}$.

Pour les constantes :

$$a_{f_p}(a) = \text{a} \;\; \text{avec} \;\; \text{a} \in D.$$

Structures

Une *v-assignation* est une fonction :

$$a_v : \mathcal{V} \to D$$

où $\mathcal{V}$ désigne l'ensemble des variables de $\mathcal{L}_1$.

Pour les termes, on définit la *t-assignation* a_t de la façon suivante :

iii) si $t \in \mathcal{V}$, alors $a_t(t) = a_v(t)$

iv) si $t \in \mathcal{C}$, alors $a_t(t) = a_{f_p}(t)$

v) sinon

$a_t(f_j^{(j_n)}(t_1, \ldots, t_{j_n})) = f_j^{\mathcal{M}}(a_t(t_1), \ldots, a_t(t_{j_n}))$

Structures

Une *interprétation* d'un langage $\mathcal{L}_1$ (ou d'une fbf de $\mathcal{L}_1$) est une fp, v, t-assignation.

Une relation de *satisfaction* :

$$\mathcal{M} \vDash_{\mathcal{I}} \varphi$$

lue « la formule φ est satisfaite dans la structure $\mathcal{M}$ avec l'interprétation $\mathcal{I}$ », est définie comme suit :

1. $\mathcal{M} \vDash_{\mathcal{I}} P_k^{(k_n)}(t_1, \ldots, t_{k_n})$ si et seulement si $(t_1, \ldots, t_{k_n}) \in P_k^{\mathcal{M}}$

2. $\mathcal{M} \vDash_{\mathcal{I}} \neg\varphi$ si et seulement si non $\mathcal{M} \vDash_{\mathcal{I}} \varphi$ (autrement dit, on a une logique à deux valeurs de vérité)

Structures

3. $\mathcal{M} \models_{\mathcal{I}} \varphi \wedge \psi$ si et seulement si $\mathcal{M} \models_{\mathcal{I}} \varphi$ et $\mathcal{M} \models_{\mathcal{I}} \psi$

4. $\mathcal{M} \models_{\mathcal{I}} \varphi \vee \psi$ si et seulement si $\mathcal{M} \models_{\mathcal{I}} \varphi$ ou $\mathcal{M} \models_{\mathcal{I}} \psi$

5. $\mathcal{M} \models_{\mathcal{I}} \varphi \Rightarrow \psi$ si et seulement si (non $\mathcal{M} \models_{\mathcal{I}} \varphi$) ou $\mathcal{M} \models_{\mathcal{I}} \psi$

6. $\mathcal{M} \models_{\mathcal{I}} \varphi \Leftrightarrow \psi$ si et seulement si $\mathcal{M} \models_{\mathcal{I}} \varphi \Rightarrow \psi$ et $\mathcal{M} \models_{\mathcal{I}} \psi \Rightarrow \phi$

Structures

7. $\mathcal{M} \models_{\mathcal{I}} t_1 = t_2$ si et seulement si $t_1^{\mathcal{M}} = t_2^{\mathcal{M}}$

8. $\mathcal{M} \models_{\mathcal{I}} \exists x \varphi$ si et seulement si il existe $a \in D$ tel que $\mathcal{M} \models_{\mathcal{I}[x|a]} \varphi$

9. $\mathcal{M} \models_{\mathcal{I}} \forall x \varphi$ si et seulement si pour tout $a \in D$ on a $\mathcal{M} \models_{\mathcal{I}[x|a]} \varphi$

$\mathcal{I}[x|a]$ coïncide avec $\mathcal{I}$ sauf dans $a_v(x)$.

Remarques.

1. Dans le cadre de la LP0, non ($\phi \models \varphi$) *n'est pas* équivalent à $\phi \models \neg\varphi$.

2. Dans la définition de la sémantique pour la LP1, la seule contrainte sur le domaine du discours est qu'il soit non vide. On peut donc prendre comme domaine du discours un ensemble de termes fermés. Cette remarque sera utile dans la suite.

Structures

Exemple. La fbf :

$$\forall x \exists y \exists z (x + y = y \wedge \exists w (w + w = y))$$

dénote dans ce que l'on appelle *arithmétique de Presburger*, c'est-à-dire la théorie de la structure :

$$\mathbb{N}_A = \langle \mathbb{N}; 0, succ, +, =, < \rangle$$

« il y a une infinité de nombres pairs ».

Cette théorie est décidable, mais la procédure de décision est de complexité super-exponentielle (2^{2^n}).

Structures

Définition 4.

On dit qu'une fbf φ est *valide* si et seulement si elle est satisfaite dans toutes les interprétations sur toutes les structures. On le note $\models \varphi$.

Une structure $\mathcal{M}$ est un *modèle* d'un ensemble de fbf S si et seulement si il existe $\mathcal{I}$ tel que $\mathcal{M} \models_{\mathcal{I}} \varphi$ pour tout $\varphi \in S$.

Remarques.

1. Un modèle d'une théorie axiomatique est un ensemble d'objets choisis dans une *autre théorie*, celle où les objets assignés à ceux de la première sont censés avoir une signification en « eux mêmes » (par exemple ensemble, fonction, relation, etc.) tout en satisfaisant les axiomes.

2. (formules ouvertes et fermées)
– Une **fbff** (formule bien formée fermée) dénote une *valeur de vérité*.

Par exemple $\forall x \exists y P(x, y)$ dénote **vrai** dans $\mathbb{N}$ si P désigne $<$.

Structures

- -Une **fbfo** (formule bien formée ouverte) dénote *un ensemble* : l'ensemble des valeurs qui la rendent vraie.

Par exemple Premier(x) dénote tous les nombres premiers.

Structures

– Les fbfo sont utilisées dans la définition des classes (ensembles), par exemple l'ensemble $\{x|\text{Premier}(x)\}$.

– Les variables libres, donc les fbfo, interviennent très fréquemment en mathématiques informelles dans les expressions telles que :

i) Soit x un naturel ou :

ii) Soit x un naturel tel que . . .

Dans i) on leur donne une interprétation de généralité (c'est-à-dire pour tout x).

Dans ii) on leur donne une interprétation conditionnelle (c'est-à-dire pour quelques x particuliers).

Quand ces expressions (ou plutôt leurs formalisations) interviennent dans des raisonnements on les traitera, en accord avec l'usage, comme des variables universellement quantifiées.

En effet, quand on ne pose pas de conditions particulières sur x, ceci revient à dire pour n'importe quel x ou, ce qui est pareil, pour tout x.

Exemple (ensemble des nombres premiers).

L'ensemble des nombres premiers dans $\mathbb{N}$ peut être défini par :

$$\text{Premier}(x) = \{x \neq 1 \wedge \forall y \forall z((x = y \times z) \Rightarrow (y = 1 \vee z = 1))\}$$

Dans le cas où l'on pose des conditions sur x ceci revient à dire *pour tout* x *avec telle condition* (condition qui sera traduite dans la formule). Par exemple, on traduira l'expression *Soit* x *premier*, par $\forall x(x \in \mathbb{N} \wedge \text{Premier}(x))$.

Structures

Pour les fbfo intervenant dans des raisonnement on utilisera leur fermeture définie comme :

$$\text{fbfo}(\mathcal{F}) :^{def} \text{ si } \mathcal{F} : \text{fbff alors } \mathcal{F} \text{ sinon } \forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_n \mathcal{F}$$

où $VLb(\mathcal{F}) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ (variable libres de $\mathcal{F}$).

Structures multisortes

On a dit précédemment qu'il n'était pas nécessaire de spécifier dans une formule le domaine dans lequel une variable prend ses valeurs.

Cependant, en pratique on veut fréquemment identifier ces domaines (ensembles appelés *sortes*), en particulier quand les différentes variables peuvent prendre leurs valeurs dans des domaines des natures différentes (par exemple scalaires et vecteurs dans les espaces vectoriels).

Structures multisortes

On peut se demander si l'utilisation des sortes augmente le pouvoir d'expression de la LP1, c'est-à-dire si l'on peut dire plus de choses que celles que l'on peut dire sans sortes ou s'il s'agit simplement d'un confort syntaxique.

La réponse est que le pouvoir d'expression de la LP1 avec sortes est le même que celui de la LP1, ce qui est prouvé en utilisant la technique dite de *réduction des sortes*, qu'on présente à présent.

Structures multisortes

Sans perte de généralité on considère une structure avec deux sortes :

$$\mathcal{M} =< D, E; \mathcal{F}, \mathcal{R} >$$

On élargit la signature avec les prédicats P_D et P_E.

On considère la structure

$$\mathcal{M}' =< D \cup E; \mathcal{F}, \mathcal{R} \cup \{\mathcal{R}_D, \mathcal{R}_E\} >$$

avec $R_D = D$, $R_E = E$ (R_D et R_E sont des relations unaires, c'est-à-dire des sous-ensembles de D et E respectivement) et :

$$a_{f_p}(P_D) = R_D \quad \text{et} \quad a_{f_p}(P_E) = R_E$$

Structures multisortes

Donc, si l'on a utilisé des sortes pour écrire les formules, il suffit de remplacer de la façon suivante, où $F[x]$ signifie que la variable c apparaît dans la fbf F :

1. $\forall x \in D.F[x]$ par $\forall x.P_D(x) \Rightarrow F(x)$

2. $\forall x \in E.F[x]$ par $\forall x.P_E(x) \Rightarrow F(x)$

3. $\exists x \in D.F[x]$ par $\exists x.P_D(x) \wedge F(x)$

4. $\exists x \in E.F[x]$ par $\exists x.P_E(x) \wedge F(x)$

Ceci montre que le pouvoir d'expression de la LP1 avec sortes est le même que celui de la LP1.

Théories

Une t**héorie** (de premier ordre) est un ensemble de fbff de $\mathcal{L}_1$.

Une fois introduite une notion de conséquence (elle peut être syntaxique ou sémantique), une théorie est dite **fermée** si et seulement si elle est fermée par la relation de conséquence (en accord avec le théorème de complétude de Gödel, on peut utiliser $\vdash$ ou $\models$).

Une théorie T est **complète** (en $\mathcal{L}_1$) si et seulement si l'ensemble de ses conséquences est maximal consistant (c'est-à-dire s'il est consistant et aucun de ses sur-ensembles n'est consistant).

Théories

Un **ensemble d'axiomes** d'une théorie T est un ensemble de fbff avec le même ensemble des conséquences que T.

T est un ensemble d'axiomes de T et $\emptyset$ est un ensemble d'axiomes de T si et seulement si T est l'ensemble des fbff valides de $\mathcal{L}_1$ (point de vue sémantique).

T est **finiment axiomatisable** si et seulement si elle axiomatisable à l'aide d'un nombre fini d'axiomes.

Théories

La manière standard de spécifier une théorie est d'en donner un ensemble d'axiomes.

Une autre façon de faire : étant donnée une structure $\mathcal{M}$ et une interprétation $\mathcal{I}$ de $\mathcal{L}_1$, la théorie de $\mathcal{M}$ est l'ensemble de toutes les fbff F de $\mathcal{L}_1$ telles que $\mathcal{M} \models_{\mathcal{I}} F$. La théorie de $\mathcal{M}$ est complète.

Une théorie T est complète si et seulement si pour toute fbff F soit $T \models F$ soit $T \models \neg F$.

Théories

Pour une théorie T, les assertions 1 à 4 ci-dessous sont équivalentes :

1. l'ensemble des conséquences de T est maximal consistant ;

2. T est complète (c'est-à-dire que pour toute fbff F soit $T \models F$ soit $T \models \neg F$) ;

3. T a exactement un modèle ;

4. il existe un modèle $\mathcal{M}$ tel que pour toute fbff F, $T \models F$ si et seulement si $\mathcal{M} \models F$.

Théories et Modèles

Deux structures isomorphes ne diffèrent en rien d'essentiel.

Le théorème suivant confirme cette intuition et montre que l'on ne peut pas à l'aide de la LP1 distinguer deux structures isomorphes.

Théorème 1 (discrimination de structures). *Soient $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$ deux structures isomorphes. Alors, pour toute fbf F de la LP1, on a $\mathcal{M}_1 \models F$ si et seulement si $\mathcal{M}_2 \models F$.*

Théories et Modèles

Il semble légitime de se demander si la réciproque n'est pas aussi un théorème.

La réponse (négative) est donnée par le résultat suivant.

Théorème 2 (modèle non standard). *Il existe un ensemble de formules de la LP1 S ayant pour modèles les structures*

$$\mathcal{M}_1 =< \mathbb{N}, \{<^{\mathbb{N}}\} >$$

et

$$\mathcal{M}_2 =< D, \{<^{\mathbb{Q}}\} >$$

avec $\mathcal{M}_1$, $\mathcal{M}_2$ non isomorphes.

S et D sont définis dans la preuve ci-après.

Preuve.

Considérer l'ensemble S de formules suivantes (nous indiquons entre parenthèses l'interprétation voulue du prédicat P) :

1. $\forall x \neg P(x,x)$ (irréflexif)

2. $\forall x \forall y . P(x,y) \Rightarrow \neg P(y,x)$ (asymétrique)

3. $\forall x \forall y \forall z P(x,y) \wedge P(y,z) \Rightarrow P(x,z)$ (transitif)

4. $\forall x \forall y . P(x,y) \vee P(y,x) \vee x = y$ (relation totale)

5. $\exists x \forall y . \neg P(y,x)$ (il y a un premier élément)

6. $\forall x \exists y [P(x,y) \wedge \forall z (\neg (P(x,z) \wedge P(z,y)))]$ (tout élément a un successeur immédiat unique)

7. $\forall x [\exists y (P(x,y) \Rightarrow \forall z (P(z,x) \Rightarrow P(z,y)))]$ (tout élément, sauf le premier, a un prédécesseur unique)

On peut vérifier que :

$$\mathcal{M}_1 =< \mathbb{N}, \{<^{\mathbb{N}}\} >$$

où $<^{\mathbb{N}}$ dénote la relation d'ordre usuelle sur $\mathbb{N}$, est un modèle de S.

Considérons maintenant les ensembles suivants :

$$D_1 = \{0\} \cup \{1 - \frac{1}{n} | n \in \mathbb{N}, n \neq 0\}$$

$$D_2 = \{1 + \frac{1}{n} | n \in \mathbb{N}, n \neq 0\}$$

$$D_3 = \{3 - \frac{1}{n} | n \in \mathbb{N}, n \neq 0\}$$

$$D = D_1 \cup D_2 \cup D_3$$

et la structure

$$\mathcal{M}_2 =< D, \{<^{\mathbb{Q}}\} >$$

où $<^{\mathbb{Q}}$ dénote la relation d'ordre usuelle sur $\mathbb{Q}$.

On peut vérifier qu'elle est aussi un modèle de S.

Mais $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$ ne sont pas des structures isomorphes comme on peut le vérifier en prenant un élément de D, par exemple 3/2, qui a une *infinité* de prédécesseurs, ce qui n'est le cas pour aucun élément de $\mathbb{N}$.

$\mathcal{M}_2$ est appelé *modèle non standard* parce qu'il n'est pas isomorphe au modèle $\mathcal{M}_1$, dit *standard*.

Théories et Modèles

Remarques.

1. Si deux modèles quelconques d'une théorie sont isomorphes on dit que la théorie est **catégorique** (categorical).

2. L'axiomatique de Peano n'est pas catégorique dans la LP1, ainsi que le montre le théorème précédent, mais elle l'est dans la LP2.

Raisonnements en LP1

De façon similaire à ce qui a été fait pour la LP0, on peut donner une approche syntaxique (avec un système formel), ou une approche sémantique (basée sur la notion d'interprétation) des raisonnements. Nous privilégierons cette dernière.

En fait, les méthodes seront obtenues à partir de notions sémantiques, mais à l'instar de ce qui a été fait, par exemple pour la résolution dans la LP0, le but est d'obtenir un système déductif.

Nous verrons cela dans la suite.