# LOGIQUE

L3 Informatique

Salim Lardjane

*Université Bretagne Sud*

# 5. Logique du premier ordre (LP1)

# 5.3 Sémantique de la LP1 - Première approche

## Introduction

Les concepts *d'interprétation*, *modèle*, *sémantique*, que nous définirons sont, à l'instar des concepts de *sens* et *signification* pour les langues naturelles, extrêmement subtils et méritent un peu de réflexion avant d'en donner une définition formelle (dans le cadre de la LP1).

La notion de *modèle* est capitale en logique, informatique et science en général.

Dans son usage courant elle recouvre beaucoup de notions différentes et l'on dit souvent que le mot modèle est *polysémique*.

## Notion de modèle

A u XVIème siècle apparaît le mot *modèle* signifiant : mesure, mesure musicale, mélodie ; mesure imposée aux choses ; manière de se conduire.

Le terme est utilisé de façons bien différentes aussi bien dans la langue courante que dans son usage scientifique.

Une des rares définitions que l'on peut trouver dans la bibliographie propose :

*X est un modèle de Y seulement si X et Y ont la même structure ou une structure similaire*.

(On pourrait aussi parler d'existence d'un *morphisme* entre X et Y)

## Notion de modèle

On peut distinguer deux usages différents concernant beaucoup d'utilisations :

1. **Représentation dont le but est de rendre compte d'une partie observée de la réalité**. En général, on se permet des hypothèses simplificatrices, des idéalisations, etc.

Un problème qui se pose concerne les limites de validité du modèle, c'est-à dire : comment peut-on être sûr que toutes les inférences faites sur le modèle correspondent à la réalité ?

Un problème-clé est celui de distinguer les propriétés pertinentes de celles qui ne le sont pas et peuvent être négligées.

## Notion de modèle

Ceci est de la plus grande importance quand il s'agit de modéliser des systèmes complexes où tous les paramètres ne sont pas bien connus.

Un exemple informatique est celui de *modèle de calcul* : fonctions calculables, machine de Turing, lambda-calcul, algorithmes de Markov, ADN computing, calcul quantique, etc.

## Notion de modèle

2. **L'usage en logique mathématique**. *Etant donnée une formule logique, en donner un modèle correspond à donner une interprétation des symboles non logiques (c'est-à-dire les symboles de constantes, fonctions, prédicats) qui permettent de rendre vraie la formule*.

A noter que cette notion de modèle peut aussi être appliquée aux axiomes d'une théorie empirique : on peut tester des configurations « réelles » de l'axiomatique de la théorie.

Cette vue peut être utile (comme en mathématiques) pour vérifier que les axiomes de la théorie ne sont pas contradictoires : un modèle au sens logique est une réalisation possible.

## Notion de modèle

**Remarques**.

1. La conception d'un modèle est à la base de l'activité scientifique pour toutes les sciences de la nature. Il s'agit d'essayer de choisir tous (et seulement) les propriétés, facteurs, paramètres, etc. prétendument pertinents pour les phénomènes étudiés ;

2. Souvent la distinction entre *théorie* et *modèle* n'est pas claire. Généralement on considère qu'un modèle est une étape dans le chemin qui mène à une théorie.

## Notion de modèle

Les modèles peuvent avoir des *fonctions* différentes.

Par exemple en biologie, les modèles peuvent avoir des fonctions *normatives* pour organiser les données. Le rôle capital est ici de classifier les inférences valides.

Elle peut être aussi *explicative* (en physique, médecine, etc.) ou encore *pédagogique* (cf. émissions TV de vulgarisation scientifique), *prospective* (sciences sociales, écologie, etc.), *heuristique* (informatique, sciences de la vie, etc.), *descriptive* (simulation), etc.

## Vérité et satisfaction

La notion de *sémantique* (entendue comme étude d'un langage c'est-à-dire ses mots et ses énoncés du point de vue des significations) est très difficile à préciser et notre intuition semble l'associer à celle de *traduction*.

Étroitement liée à la notion de signification, il y a celles de **vrai** et de **faux**.

Donner une caractérisation de la notion de vérité est un vieux problème de la philosophie et de la logique.

## Vérité et satisfaction

Comme le fait remarquer Tarski (1901-1983), le mot vérité et ses dérivés sont utilisés dans le langage courant dans différents domaines :

– psychologique (par exemple « Anne aime t-elle Bernard vraiment ? » )

– esthétique (par exemple « Ce roman est-il vraiment un chef d'œuvre ? »)

– moral (par exemple « Pourquoi ce politicien ne dit-il pas la vérité ? »)

– religieux (par exemple « Ce miracle a-t-il vraiment eu lieu ? ») , etc.

## Vérité et satisfaction

Pour certains, les véhicules du vrai et du faux ce sont les énoncés, pour d'autres leur signification.

Une fois que l'on s'est mis d'accord sur ce point il reste à décider comment leur attribuer une valeur de vérité (ou en quoi consiste leur valeur de vérité).

Ce sur quoi il y a un large consensus est : ce qui est vrai ou faux ce sont les *propositions*.

## Vérité et satisfaction

Mais, en quoi consiste alors la vérité de ces énoncés ? Ils se qualifient comme vrais (d'après Tarski) en correspondance avec la réalité.

« La neige est blanche » est vrai si et seulement si la neige est blanche (autrement dit la vérité est la *décitation*) .

Le prédicat de vérité est un intermédiaire entre les mots et énoncés et le monde.

Ce qui est vrai est l'énoncé, mais sa vérité consiste en ce que le monde est comme l'énoncé le dit.

## Vérité et satisfaction

En analysant des paradoxes, on conclut que le prédicat de vérité est incohérent sauf à être restreint de quelque façon (il existe un théorème de Tarski sur l'indéfinabilité de la vérité) .

En gros, le problème est résolu en instaurant une hiérarchie (similaire a ce qui a été fait pour la théorie des ensembles)

$vrai_0$ qui décite tous les énoncés ne contenant aucun prédicat de vérité ; $vrai_1$ ensuite qui décite tous les énoncés ne contenant aucun prédicat de vérité au-delà de $vrai_0$... et ainsi de suite en montant.

Nous nous restreignons ici à la notion de vérité dans les systèmes axiomatiques (logique, mathématique), concernant les formules (sous-entendu bien formées) d'un langage formel.

## Vérité et satisfaction

Avant de passer à la formalisation une question se pose naturellement : « Quels critères doit satisfaire une définition satisfaisante de vérité ? ».

A. Tarski en a donné les trois suivants :

1. métalangage : si $L$ est le langage objet (langage de travail) la définition de vérité doit être donnée dans un métalangage $M$, avec $L \subset M$. $M$ doit essentiellement pouvoir dire « plus de choses » que $L$. Si $L$ permet de parler de sa propre sémantique on arrive facilement à des paradoxes comme celui du menteur.

Il y a dans $M$ un prédicat unaire **Vrai**, dont la signification voulue est **Vrai**(prop) : la proposition prop est vraie ;

## Vérité et satisfaction

2. correction formelle : le prédicat **Vrai** doit être de la forme (ou d'une forme prouvée équivalente à) :

$$(*)\ \mathsf{Vrai}(x) \Leftrightarrow \Psi[x]\, x \notin Var(\Psi[x])$$

Si l'on utilise une forme équivalente, l'équivalence doit être prouvée en utilisant les axiomes de $M$, mais ne doit pas utiliser le prédicat **Vrai** ;

## Vérité et satisfaction

3. adéquation matérielle : les objets satisfaisant la définition (*) dans (2) doivent être exactement ceux qui, intuitivement, sont des propositions vraies dans $L$ et ceci doit être prouvé à partir des axiomes de $M$.

## Vérité et satisfaction

Pour éviter les problèmes liés à la définition de vérité, Tarski a introduit la relation de *satisfaction*.

La clé qui permet d'éviter les problèmes est que la définition de satisfaction est inductive (elle est dite *compositionnelle*) : on commence par la satisfaction des énoncés atomiques et on définit la satisfaction des énoncés de complexité plus élevée en fonction de la satisfaction de leur composants (on retrouve ici l'idée de hiérarchie).

La vérité concerne des énoncés clos (c'est-à-dire sans variable libre).

L'analogue de vérité pour les énoncés ouverts est la satisfaction.

## Vérité et satisfaction

Une assignation d'objets *satisfait* un énoncé si celui-ci est vrai pour les valeurs en question de ses variables libres.

La notion de satisfaction ne permet pas de traduire, par exemple « non ($x$ satisfait $x$) » (« $x$ »dénote une variable).

Afin de mieux saisir l'idée derrière la définition formelle nous donnons d'abord quelques exemples informels.

## Vérité et satisfaction

**Exemple 1**.

En abusant un peu du terme, on considère un "système formel" $\mathcal{S} =< \mathcal{L}, \mathcal{R}, \mathcal{A} >$ avec :

$\mathcal{L}$ : langue française

$\mathcal{R}$ : les règles "usuelles" des mathématiques

## Vérité et satisfaction

$\mathcal{A}$ : soient $K$ et $L$ deux ensembles

$(A_1)$ : tout élément de $L$ contient exactement deux éléments de $K$

$(A_2)$ : aucun élément de $K$ n'est contenu en plus de deux éléments de $L$

$(A_3)$ : aucun élément de $L$ ne contient tous le éléments de $K$

$(A_4)$ : l'intersection de deux éléments (différents) quelconques de $L$ contient exactement un élément de $K$

## Vérité et satisfaction

Un *modèle, interprétation, signification, etc.* possible de ces axiomes (qui montre aussi que les axiomes ne sont pas contradictoires) est :

$K = \{A, B, C\}$

$L = \{\{A, B\}, \{B, C\}, \{C, A\}\}$

(on peut le voir aussi comme un triangle avec sommets (non colinéaires) $A$, $B$, $C$).

**Exemple 2**. Dans l'apprentissage de l'algorithmique on s'aperçoit que des *schémas* de programmes reviennent dans des problèmes différents.

Prenons le schéma suivant, pour lequel nous donnerons des interprétations différentes.

**programme X** ;
**début**
  lire ($x$) ; % $x$ est une variable
  $y_1 \leftarrow x$ ;
  $y_2 \leftarrow a$ ; % $a$ est une constante
    **tantque** $\neg P(y_1)$
    **faire**
    $y_2 \leftarrow g(y_1, y_2)$ ;
    $y_1 \leftarrow f(y_1)$ ;
    **finfaire**
  $z \leftarrow y_2$ ; % $z$ contient le résultat
**fin**

## Vérité et satisfaction

**1ère interprétation**.

$D$ (univers considéré) : $\mathbb{N}$

$a$ : 1

$f(y_1) : y_1 - 1$

$g(y_1, y_2) : y_1 \times y_2$

$P(y_1) : y_1 = 0$

*Le programme représente* factorielle($x$).

## Vérité et satisfaction

**2ème interprétation**.

$D$ (univers considéré) : les listes

$a$ : $nil$

$f(y_1)$ : $cdr(y_1)$ c'est-à-dire la liste $y_1$ sans son premier élément

$g(y_1, y_2)$ : $cons(car(y_1), y_2)$ c'est-à-dire la liste obtenue en mettant à la place du premier élément de $y_2$ le premier élément de $y_2$

$P(y_1)$ : $null(y_1)$ c'est-à-dire que la liste est vide

*Le programme représente* reverse($x$).

**3ème interprétation**.

$D$ (univers considéré) : $\mathbb{N}$

$a$ : 0

$f(y_1) : y_1 - 1$

$g(y_1, y_2) : y_1 + y_2$

$P(y_1) : y_1 = 0$

*Le programme représente* la somme des $x$ premiers naturels.

## Vérité et satisfaction

**Exemple 3**.

Soient les fbf suivantes :

a) $\forall x(\neg P(x,x) \wedge (\forall y \forall z((P(x,y) \wedge P(y,z)) \Rightarrow P(x,z))) \wedge \exists w P(x,w))$

On peut se dire qu'elle exprime, par exemple : tout naturel n'est pas inférieur à lui-même, la relation inférieur est transitive et il existe toujours un naturel plus grand qu'un naturel donné.

## Vérité et satisfaction

b) $\forall y \exists x P(x, y)$

On peut se dire qu'elle exprime (par exemple) : pour tout entier, il en existe un plus petit.

c) $\forall y \exists x P(x, y)$

On peut se dire qu'elle est fausse si l'on considère les naturels et $P$ représente la relation inférieur.

d) $\forall x \neg D(a, x)$

On peut se dire qu'elle exprime (par exemple) : 0 ne divise aucun entier.

## Vérité et satisfaction

e) $\forall x P(f(x))$

On peut se dire qu'elle exprime (par exemple) : le carré de tout entier est positif.

f) $\forall x \forall y (P(x, y) \Rightarrow P(x, y))$

On peut se dire : pour n'importe quelle relation que l'on imagine représentée par $P$, cette fbf est vraie.

g) $\exists x \exists y \neg(P(x, y) \Rightarrow P(x, y))$

On peut se dire : pour n'importe quelle relation que l'on imagine représentée par $P$, cette fbf est fausse .

## Vérité et satisfaction

On donne la fbf suivante :

h) $\forall x \exists y P(x, y)$

et on demande si elle est vraie ou fausse.

La réponse (correcte) qui semble la plus naturelle est : ça dépend.

En effet, si l'on interprète la formule sur $\mathbb{N}$ et $P(x, y)$ représente la relation $x \leq y$, elle est vraie. Si $P(x, y)$ représente $x > y$, elle est fausse.

i) $\forall x \exists y (P(x, y) \wedge \forall w (P(y, w) \Rightarrow y = w))$

On peut se dire : si les valeurs des variables $x$, $y$ et $w$ sont des instants et $P(x, y)$ dénote la relation $x \leq y$ entre ces instants, la formule exprime qu'il y aura une fin des temps.