LOGIQUE

L3 Informatique

Salim Lardjane

Université Bretagne Sud

5. Logique du premier ordre (LP1)

5.2 Syntaxe de la LP1

Syntaxe

Définition 1 (Langage de la LP1). On suppose donnée une *signature* $\Omega = \{\mathcal{V}, \mathcal{F}, \mathcal{P}\}$ où :

$\mathcal{V} = \{x_1, x_2, \ldots\}$ est l'ensemble des *variables* ;

$\mathcal{F} = \{f_1^{n_1}, f_2^{n_2}, \ldots\}$ est l'ensemble des *symboles fonctionnels* ; n_i désigne l'arité de f_i ($n_i \geq 0$) ;

Les symboles fonctionnels d'arité 0 sont les *constantes*, dont l'ensemble est noté $\mathcal{C}$ ($\mathcal{C} \subseteq \mathcal{F}$).

$\mathcal{P} = \{=^2, P_1^{k_1}, P_2^{k_2}, \ldots\}$ est l'ensemble des *symboles de prédicats* ; k_i désigne l'arité de P_i ($k_i \geq 1$) ;

$\mathcal{V} \cap \mathcal{F} = \mathcal{V} \cap \mathcal{P} = \mathcal{F} \cap \mathcal{P} = \emptyset$.

Syntaxe

Le *langage* (c'est-à-dire l'ensemble des fbf) de la LP1, noté $\mathcal{L}_1$, est le plus petit ensemble tel que :

i) si $t_1, \ldots, t_{k_n} \in \Sigma(\mathcal{V}, \mathcal{F})$ (voir chapitre 4), alors $P_n^{k_n}(t_1, \ldots, t_{k_n}) \in \mathcal{L}_1$

$P_n^{k_n}(t_1, \ldots, t_{k_n})$ est une *formule atomique* ;

Un *littéral* est une formule atomique ou sa négation ;

ii) Si $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B} \in \mathcal{L}_1$ et $x \in \mathcal{V}$, alors :

$\neg\mathcal{A} \in \mathcal{L}_1$, $\mathcal{A} \wedge \mathcal{B} \in \mathcal{L}_1$, $\mathcal{A} \vee \mathcal{B} \in \mathcal{L}_1$, $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B} \in \mathcal{L}_1$, $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B} \in \mathcal{L}_1$, $\forall x.\mathcal{A} \in \mathcal{L}_1$, $\exists x.\mathcal{B} \in \mathcal{L}_1$

(on écrit aussi $\forall x\mathcal{A}, \forall x(\mathcal{A}), \exists x\mathcal{B}, \exists x(\mathcal{B})$;

Syntaxe

$\forall, \exists$ s'appellent *quantificateur universel* et *quantificateur existentiel* respectivement ; x est la *variable quantifiée*. On ne quantifiera pas plus d'une fois la même variable (cela n'aurait pas de sens) ;

Dans $\forall x(\mathcal{A}), \exists x(\mathcal{A})$, $\mathcal{A}$ est *la portée* des quantificateurs ;

L'ensemble $\mathcal{V} \cup \{\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow, =, \forall, \exists\}$ est l'ensemble des *symboles logiques* ou *constantes logiques* ;

L'ensemble $\mathcal{F} \cup \mathcal{C} \cup \mathcal{P}$ est l'ensemble des *symboles non logiques* correspondant à la théorie considérée ;

Syntaxe

Si la signature ne contient pas de symbole fonctionnel d'arité n ($n \geq 0$) ni le symbole de prédicat $=$, on parle de *logique pure du premier ordre* (LP1P) ;

On peut voir une fbf comme un *mot* sur le *vocabulaire* Ω (c'est-à-dire une chaîne finie de symboles de Ω). Une *sous-formule* d'une fbf $\mathcal{A}$ esr un *sous-mot* de $\mathcal{A}$ (considérée comme un mot) qui est aussi une fbf ;

(w est un sous mot de v si et seulement s'il existe des mots x, y, possiblement vides, tels que $v = xwy$)

Syntaxe

Une fbf est dite en *forme normale négative* (abrégé *n.n.f* en anglais) si elle est construite avec des littéraux, des connectifs $\wedge$ et $\vee$ et les quantificateurs $\forall, \exists$. *Toute fbf peut être transformée dans une autre équivalente en forme normale négative*. ■

Syntaxe

Remarque. L'ensemble des variables étant infini dénombrable, l'ensemble des autres symboles logiques fini, et l'ensemble des symboles non-logiques infini dénombrable, il est possible de concevoir un algorithme qui énumère toutes les fbf.

Tout ensemble infini de fbf de la LP1 sera donc infini dénombrable (puisque sous-ensemble d'un ensemble infini dénombrable).

Syntaxe

Définition 2 (variables libres et liées). Une occurrence d'une variable x dans une fbf de $\mathcal{L}_1$ est dite liée si et seulement si x apparaît immédiatement après un quantificateur ou si elle est dans la portée d'un quantificateur (et porte le *même nom* que la variable quantifiée). Toute autre occurrence est dite libre. ■

Définition 3 (fbf fermées et ouvertes). Une fbf est dite *fermée*, noté fbff, ssi elle ne contient aucune occurrence de variable libre. Elle est dite *ouverte*, noté fbfo, si elle n'est pas fermée. ■

Ci-après $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ désignent des fbf de $\mathcal{L}_1$.

Syntaxe

Ensemble de variables libres d'une formule :

$Lb(P_n^{k_n}(t_1, \ldots, t_{k_n})) = \bigcup_{i=1}^{k_n} Var(t_i)$

$Lb(\neg\mathcal{A}) = Lb(\mathcal{A})$

$Lb(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) = Lb(\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) = Lb(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) = Lb(\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}) = Lb(\mathcal{A}) \cup Lb(\mathcal{B})$

$Lb(\forall x.\mathcal{A}) = Lb(\exists x.\mathcal{A}) = Lb(\mathcal{A}) \setminus \{x\}$

Syntaxe

Ensemble de variables liées d'une formule :

$$Li(P_n^{k_n}(t_1, \ldots, t_{k_n})) = \emptyset$$

$$Li(\neg \mathcal{A}) = Li(\mathcal{A})$$

$$Li(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) = Li(\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) = Li(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) = Li(\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}) = Li(\mathcal{A}) \cup Li(\mathcal{B})$$

$$Li(\forall x.\mathcal{A}) = Li(\exists x.\mathcal{A}) = Li(\mathcal{A}) \cup \{x\}$$

Remarques.

1. La *même* variable peut avoir des occurrences libres et liées dans une formule ; par exemple, dans la formule :

$$(P(x) \vee \exists y Q(y)) \wedge \forall x (P(x) \vee Q(y))$$

La première occurrence de x est libre, la deuxième et troisième sont liées.

La première et deuxième occurrences de y sont liées, la troisième est libre.

Syntaxe

2. La notion de variable liée correspond à celle d'une variable telle que la fbf dans laquelle elle apparaît a un sens *indépendamment* de cette variable. Par exemple dans :

$$\int_0^y xydx$$

x est liée et y est libre.

Dans les langages de programmation, les variables locales sont liées, les variables globales sont libres.

Traduction en LP1

Soit l'assertion :

Quelqu'un qui aime tous les animaux aime tous les hommes.

Nous la reformulons comme un raisonnement, en explicitant les connaissances implicites.

Deux traductions semblent "naturelles" selon que l'on traduise "quelqu'un" par :

1. animal (non nécessairement humain) ou ;

2. humain

Traduction en LP1

c'est-à-dire, respectivement :

1. En sachant que tout être humain est aussi un animal, et qu'il existe un animal qui aime tous les animaux alors il existe un animal qui aime tous les hommes.

2. En sachant que tout être humain est aussi un animal, et qu'il existe un être humain qui aime tous les animaux alors il existe un être humain qui aime tous les hommes.

Traduction en LP1

Nous traduisons les deux versions en introduisant les prédicats :

$A(x)$: x est un animal ;

$H(x)$: x est un être humain ;

$L(x, y)$: y aime x ;

$C(x)$: qui doit être remplacé par $A(x)$ (cas 1) ou par $H(x)$ (cas 2).

Le raisonnement est représenté en LP1 par :

$$\frac{\begin{array}{l}\forall x[H(x) \Rightarrow A(x)] \\ \exists y \forall v[C(y) \wedge (A(v) \Rightarrow L(v, y))]\end{array}}{\exists u \forall z[C(u) \wedge (H(z) \Rightarrow L(z, u))]}$$