LOGIQUE

L3 Informatique

Salim Lardjane

Université Bretagne Sud

5. Logique du premier ordre (LP1)

5.1 Syllogismes et limites de la LP0

Syllogismes

Il n'y a pas de document prouvant l'existence d'un exposé théorique de la logique avant Aristote (384-322 avant notre ère).

Avant lui (par exemple dans les dialogues de Platon) il y a des argumentations, mais on ne s'occupe pas d'étudier les *façons d'argumenter*.

Les œuvres logiques d'Aristote nous sont parvenues comme un recueil de traités appelé Organon, qui veut dire « instrument » (Aristote voyait la logique comme une discipline préparatoire).

Il introduisit le *syllogisme*.

Ce terme, qui est passé dans le langage courant depuis longtemps, identifie au sens large tout raisonnement rigoureux n'utilisant aucune proposition implicite.

Syllogismes

Aristote considéra quatre types de propositions (dites *catégoriques*) : l'universelle affirmative, l'universelle négative, la particulière affirmative et la particulière négative que les scolastiques nommèrent A, E, I et O respectivement (du latin AffIrmo et nEgO) :

A : Tout P est Q

E : Aucun P n'est Q

I : Quelques P sont Q

O : Quelques P ne sont pas Q

Syllogismes

Définition 1. Deux propositions sont dites :

– *contradictoires* si et seulement si elles ne peuvent être toutes les deux vraies ni toutes les deux fausses ;

– *contraires* si et seulement si elles peuvent être fausses toutes les deux mais pas vraies toutes les deux ;

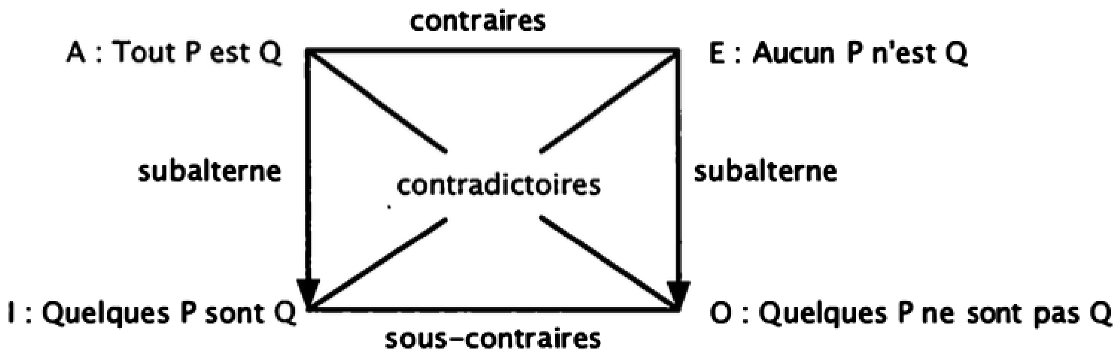
Syllogismes

– *sous-contraires* si et seulement si elles peuvent être vraies toutes les deux mais pas fausses toutes les deux ;

– *subalternes* : une proposition Q est dite subalterne d'une proposition P si et seulement si Q est nécessairement vraie chaque fois que P est vraie et P est nécessairement fausse quand Q est fausse.
On suppose qu'il y a des objets satisfaisant la propriété P.

Syllogismes

Celai donne pour les propositions catégoriques, le diagramme connu sous le nom de *carré d'opposition* et qui établi des relations entre deux propositions catégoriques données :



Syllogismes

La contribution (généralement considérée comme) la plus importante d'Aristote à la logique fut la théorie des syllogismes (*syllogistique*).

La syllogistique d'Aristote fut l'un des piliers de la logique pendant vingt siècles.

Définition 2. Un *syllogisme catégorique* est un argument, comportant exclusivement des propositions A, E, I, O, avec deux prémisses et une conclusion et contenant trois termes, chacun apparaissant une fois (et seulement une) dans exactement deux propositions.

Syllogismes

Exemple.

Si tous les oiseaux sont des animaux,
et tous les moineaux sont des oiseaux,
alors tous les moineaux sont des animaux.

Animaux est le *terme majeur*, oiseaux est le *terme moyen*, moineaux est le *terme mineur*.

La prémisse contenant le terme majeur est appelée majeure.

L'autre prémisse est appelée mineure.

La conclusion est formée avec les termes mineur et majeur.

Syllogismes

Remarque. Dans la vie courante, on utilise souvent *l'enthymème*, syllogisme abrégé avec une seule prémisse (l'autre étant implicite) et une conclusion.

Par exemple (en parlant d'une personne) : « Il bouge, donc il est vivant ».

Syllogismes

Le problème principal de la syllogistique était de distinguer les syllogismes (raisonnements) corrects des syllogismes (raisonnements) incorrects.

Aristote classifia les raisonnements en 256 syllogismes possibles, dont 24 corrects.

Syllogismes

Le nombre 256 est obtenu en énumérant toutes les possibilités (Maj , Moy, Min dénotent respectivement les termes majeur, moyen et mineur d'un syllogisme) :

Prémisse 1	Prémisse 2
(Maj-Moy)	(Min-Moy)
(Moy-Maj)	(Min-Moy)
(Maj-Moy)	(Moy-Min)
(Moy-Maj)	(Moy-Min)

c'est-à-dire quatre possibilités.

Pour chacune de ces possibilités il y a seize combinaisons possibles de ces deux prémisses : AA, AE, AI, AO, EA, EE, EI, EO, IA, IE, II, IO, OA, OE,OI, OO.

Il y a par ailleurs quatre conclusions possibles (correspondant aux quatre propositions catégoriques). On a donc au total $4 \times 16 \times 4 = 256$ syllogismes possibles.

Syllogismes

La syllogistique est encore utilisée aujourd'hui (avec un formalisme mathématique). On traduit :

(A) Tout P est Q : $\forall x.(P(x) \Rightarrow Q(x))$

(E) Aucun P n'est Q : $\forall x.(P(x) \Rightarrow \neg Q(x))$

(I) Quelques P sont Q : $\exists x.(P(x) \wedge Q(x))$

(O) Quelques P ne sont pas Q : $\exists x.(P(x) \wedge \neg Q(x))$

Syllogismes

Exemples.

$$\frac{\begin{array}{c}\text{Tous les } \textit{mammifères} \text{ sont des animaux}\\ \text{Tous les hommes sont des } \textit{mammifères}\end{array}}{\text{Tous les hommes sont des animaux}}$$

qui correspond auu sylllogisme connu sous le nom de BARBARA :

$$\frac{\begin{array}{l}\text{Tous les B sont C}\\ \text{Tous les A sont B}\end{array}}{\text{Tous les A sont C}}$$

Syllogismes

Autre syllogisme :

$$\frac{\begin{array}{c}\text{Tous les A sont B}\\ \text{Quelques A sont C}\end{array}}{\text{Quelques C sont B}}$$

Certains raisonnements que l'on considère d'habitude comme corrects, ne peuvent pas être identifiés comme tels en utilisant la syllogistique d'Aristote. Par exemple :

$$\frac{\begin{array}{c}A \vee B\\ \neg A\end{array}}{B}$$

ou encore :

$$\frac{\text{Tous les p sont Q ou R}}{\text{Tous les p qui ne sont pas Q sont R}}$$

Un indice de l'influence de la syllogistique aristotélicienne à travers le temps est qu'au XIXe siècle on a construit des machines permettant de l'automatiser.

Les limites de la LP0

Dans la syllogistique d'Aristote tout énoncé consiste dans l'attribution d'une propriété à un objet, c'est-à-dire qu'ils sont exprimés à l'aide de prédicats *unaires* et donc formalisés à l'aide de la LP0.

Ceci ne suffit plus quand on a besoin de parler de *relations* (binaires, ternaires, etc.) entre objets.

Ces relations ne peuvent pas être réduites à des relations unaires (propriétés).

Par exemple, en mathématiques l'énorme majorité des relations, désignées en utilisant des prédicats, sont *binaires*.

Les limites de la LP0

Comment faire pour parler des objets ayant les propriétés P, Q, . . . ou qui sont en relation avec d'autres objets ?

Par exemple, comment faire pour classer comme correct, en utilisant la LP0, le raisonnement :

Tous les chevaux sont des animaux.
Quelques chevaux sont (des chevaux) blancs.
Donc, quelques chevaux blancs sont des animaux.

Les limites de la LP0

Ou encore, comment faire pour traduire en LP0, le raisonnement, que l'on veut évidemment classer comme correct :

Pour tout x, xRa donc il existe x tel que aRx ?

si l'on appelle P : Pour tout x, xRa

et Q : il existe x tel que aRx

on le classerait clairement comme *incorrect* (on peut évaluer P à vrai et Q à faux).

Les limites de la LP0

Or il s'écrit sous la forme :

$$\frac{\forall x.R(x,a)}{\exists y.R(a,y)}$$

et maintenant, on "voit" qu'il est correct.

La correction de ces raisonnements repose en fait dans la relation entre « pour tous » (ou « tous ») et « il existe » (ou « quelques »).

Les limites de la LP0

Un autre exemple très familier est celui de la *transitivité* : pour n'importe quels objets nommés x, y, z, si x est en relation avec y et y est en relation avec z alors x est en relation avec z.

Manifestement, ce type de phrases ne peut pas être exprimé en LP0 en vue de leur utilisation dans un raisonnement.

On peut l'appeller P (ou Q,. . .), mais ceci ne serait pas d'une grande utilité.

Les limites de la LP0

Un dernier exemple ; comment traduire en LP0 :

L'objet nommé 0 a la propriété P, et si un objet x a la propriété P, alors le successeur de x a la propriété P. . .

C'est un fait que, que pour des univers *finis*, on peut rester dans la LP0.

Les limites de la LP0

Par exemple, l'argument : "si tous les hommes sont mortels et un certain objet a la propriété d'être un homme alors cet objet est mortel" pourrait, sur un univers contenant disons n hommes, être spécifié avec le schéma propositionnel suivant :

$$\begin{array}{l} \bigwedge_1^n H_i \\ \bigwedge_1^n (H_i \Rightarrow M_i) \\ H_k \ (1 \leq k \leq n) \\ \hline M_k \ (1 \leq k \leq n) \end{array}$$

où les symboles propositionnels H_i et M_i dénotent respectivement : i est un homme et i est mortel.

Les limites de la LP0

Cette façon de faire est peu naturelle, limitée théoriquement à des univers finis et pratiquement par la taille des univers et, plus important, occulte la possibilité d'utiliser des *variables* (parce que l'on est obligé d'énumérer tous les cas).

Nous sommes en train de parler de *limites* (et comment les surmonter) du *pouvoir d'expression* d'un langage.

Comme l'on peut s'y attendre, dès que l'on peut exprimer plus de choses, on risque de ne plus pouvoir répondre à toutes les questions sur des fbf de ce langage.

En informatique, il est bien connu que si l'on utilise un langage qui interdit certaines structures de contrôle, le problème de l'arrêt devient décidable pour les programmes écrits dans ce langage.

Les limites de la LP0

Du point de vue de la décidabilité : les syllogismes aristotéliciens peuvent être formalisés dans un fragment de la Logique du Premier Ordre (LP1) appelé Logique du Premier Ordre Monadique Pure (LP1M).

Comme il s'agit d'un fragment *décidable* de la LP1 et que cette dernière est *indécidable*, **la syllogistique ne suffit pas pour raisonner dans la LP1**.

En fait, dès que l'on autorise des prédicats avec arité supérieure ou égale à 2, on a des fragments indécidables.