LOGIQUE
L3 Informatique

Salim Lardjane
Université Bretagne Sud

3. La logique propositionnelle (LP0)

3.2. Concepts et terminologie

Formes normales

Une formule bien formée (fbf) F est dite en *forme normale négative (fnn)* si et seulement si les symboles de négations qui apparaissent dans F s'appliquent *exclusivement* aux formules atomiques.

Une fbf est dite sous *forme normale conjonctive (fnc)* ou *forme clausale* si et seulement si elle est de la forme

$$C_1 \wedge C_2 \wedge \cdots \wedge C_n \quad (n \geq 1)$$

On la note également :

$$\bigwedge_{i=1}^{n} C_i$$

où chaque C_i, appelé *conjoint* (ou *clause*) est de la forme :

$$A_1 \vee A_2 \vee \cdots \vee A_{m_i}$$

ce qu'on note également

$$\bigvee_{j=1}^{m_i} A_j$$

avec $A_i \neq A_j$ pour $i \neq j$.

Formes normales

Les clauses sont aussi définies comme des *ensembles* de littéraux.

La *longueur* d'une clause est le nombre de ses littéraux.

Une clause de longueur 1 (c'est-à-dire telle que $m_i = 1$) est appelée *unitaire*.

On associe à la fnc l'ensemble des clauses $\{C_1, \ldots, C_n\}$.

Formes normales

Une fbf est dite sous *forme normale disjonctive (fnd)* si et seulement si elle est de la forme :

$$D_1 \vee D_2 \vee \cdots \vee D_n \quad (n \geq 1)$$

ce qu'on note également

$$\bigvee_{i=1}^{n} D_i$$

où chaque D_i, appelé *disjoint*, est de la forme :

$$A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_{m_i}$$

ce qu'on note également

$$\bigwedge_{j=1}^{m_i} A_j.$$

Formes normales

Pour des questions d'homogénéité, on admet des conjonctions (resp. disjonctions) d'ensembles *vides* de littéraux. Dans ce cas, la conjonction (resp. la disjonction) n'apporte *aucun* symbole à la syntaxe de la fbf dans laquelle elle intervient.

Dans les deux cas A_j est un *atomeprop* (c'est-à-dire un symbole de proposition de base) ou la négation d'un atomeprop, appelé aussi un *littéral*.

Si L (resp. $\neg L$) est un littéral, $\neg L$ (resp. L) est appelé le *littéral complémentaire* de L (resp. $\neg L$). Il est noté L^c.

L est un *littéral positif* et $\neg L$ un *littéral négatif*.

On parlera ainsi du *signe* d'un littéral : positif ou négatif.

Formes normales

Si tous les littéraux de la clause sont positifs (resp. négatifs), la clause est dite *positive* (resp. *négative*).

On dit que la fbf G est la fnc (resp. la fnd) de la fbf F si et seulement si G et F sont équivalentes (c'est-à-dire que $F \Leftrightarrow G$ est une formule tautologique) et G est en fnc (resp. fnd).

Formes normales

La notion de *forme normale* d'une formule est très importante, pour deux raisons au moins :

1. Elle permet une économie de pensée, parce que l'on peut toujours supposer (une fois qu'on a prouvé l'existence de cette forme normale) que la formule étudiée est déjà sous cette forme normale.

2. Quand elle est unique, on peut prouver l'équivalence (égalité) de formules syntaxiquement différentes par réduction à cette forme normale.

On a introduit précédemment deux formes normales pour les formules de la logique propositionnelle : la *forme normale conjonctive* et la *forme normale disjonctive*.

Les règles suivantes permettent d'obtenir ces formes normales.

Formes normales

1. Règle 1 : élimination de $\Leftrightarrow$ et $\Rightarrow$
   1.1. $A \Leftrightarrow B \rightarrow (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$
   1.2. $(A \Rightarrow B) \rightarrow (\neg A \vee B)$
2. Règle 2 : coller les $\neg$ aux atomes
   2.1. $\neg(\neg A) \rightarrow A$
   2.2. $\neg(A \vee B) \rightarrow \neg A \wedge \neg B$
   2.3. $\neg(A \wedge B) \rightarrow \neg A \vee \neg B$
3. Règle 3 : distributivité de $\vee$ et $\wedge$
   3.1. $A \vee (B \wedge C) \rightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
   3.2. $A \wedge (B \vee C) \rightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

Formes normales

4. Règles complémentaires :

   4.1. $\neg(A \Rightarrow B) \rightarrow A \wedge \neg B$

   4.2. $A \vee A \rightarrow A$

   4.3. $A \wedge A \rightarrow A$

   4.4. $(A \vee \neg A) \wedge B \rightarrow B$

   4.5. $(A \wedge \neg A) \vee B \rightarrow B$

   4.6. $A \vee B \rightarrow B \vee A$

   4.7. $A \wedge B \rightarrow B \wedge A$

Toute formule bien formée de la logique propositionnelle peut être mise sous forme normale conjonctive (resp. disjonctive).

Interprétation

Une *interprétation* I d'un langage (d'une fbf $\mathcal{A}$) est une application :

$$I : \Pi \rightarrow \{V, F\}$$

où Π est l'ensemble des symboles propositionnels (formules de bases, formules atomiques, formules élémentaires) du langage (de $\mathcal{A}$).

Si l'on restreint le domaine de l'interprétation à un sous-ensemble propre de Π, on parle *d'interprétation partielle*.

Plus particulièrement :

Interprétation

Une interprétation d'une formule $\mathcal{F}$ (respectivement d'un ensemble de formules $\mathcal{S}$) est la restriction de l'interprétation du langage auquel $\mathcal{F}$ (respectivement $\mathcal{S}$) appartient à l'ensemble de symboles propositionnels de $\mathcal{F}$ (respectivement de $\mathcal{S}$), ensemble que nous noterons en général $Ensprop(\mathcal{F})$ (respectivement $Ensprop(\mathcal{S})$).

Une interprétation partielle d'une formule $\mathcal{F}$ est la restriction de l'interprétation du langage auquel $\mathcal{F}$ appartient à un ensemble $\mathcal{D}$ avec $\mathcal{D} \subsetneq Ensprop(\mathcal{F})$.

Une extension d'une interprétation partielle d'une formule $\mathcal{F}$ avec domaine $\mathcal{D}$ est une interprétation partielle avec domaine $\mathcal{E}$, telle que $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{E}$.

Evaluation

Une *évaluation* $\mathcal{E}$ d'une fbf $\mathcal{A}$ pour une interprétation I est la valeur de vérité de $\mathcal{A}$ pour cette interprétation.

On la note $\mathcal{E}(\mathcal{A}, I)$, ou parfois $\overline{I}(\mathcal{A})$.

Modèle et contre-modèle

Un *modèle* d'une fbf $\mathcal{A}$ (resp. d'un ensemble de fbf $\mathcal{S}$) est une interprétation I de $\mathcal{A}$ (resp. de $\mathcal{S}$) telle que

$$\mathcal{E}(\mathcal{A}, I) = V$$

(resp.

$$\mathcal{E}(\mathcal{A}, I) = V \text{ pour toute } \mathcal{A} \in \mathcal{S}.$$

)

Modèle et contre-modèle

Un *contre-modèle* (contre-exemple) d'une fbf $\mathcal{A}$ (resp. d'un ensemble de fbf $\mathcal{S}$) est une interprétation I de $\mathcal{A}$ (resp. de $\mathcal{S}$) telle que

$$\mathcal{E}(\mathcal{A}, I) = F$$

(resp.

$\mathcal{E}(\mathcal{A}, I) = F$ pour au moins une $\mathcal{A} \in \mathcal{S}$.

)

On dit que I *falsifie* $\mathcal{A}$ (resp. $\mathcal{S}$).

Modèle et contre-modèle

Une fbf est dite *satisfaisable* (consistante, cohérente) si et seulement si elle au moins un modèle.

Une fbf $\mathcal{A}$ est dite *insatisfaisable* ou *contradictoire* si et seulement si elle n'a pas de modèle, c'est-à-dire que pour toute interprétation I : $\mathcal{E}(\mathcal{A}, I) = F$.

Tautologie

Une fbf $\mathcal{A}$ est dite *valide* ou *tautologique* si et seulement si pour toute interprétation I : $\mathcal{E}(\mathcal{A}, I) = V$. On note alors :

$$\models \mathcal{A}$$

Conséquence logique

Une fbf $\mathcal{B}$ est dite une *conséquence logique* de la fbf $\mathcal{A}$, ce qu'on note

$$\mathcal{A} \models \mathcal{B}$$

si et seulement si tout modèle de $\mathcal{A}$ est un modèle de $\mathcal{B}$.

Les définitions précédentes s'étendent naturellement à des *ensembles de fbf*.

On pourra donc écrire $\{P_1, P_2, \ldots, P_n\} \models C$ ou, de façon plus standard,

$$P_1, P_2, \ldots, P_n \models C.$$

Exemples

i) Comment spécifier les interprétations ? L'exemple suivant en donne les trois façons utilisées habituellement.

Soit la formule :

$$\mathcal{A} : (((A \wedge B) \vee C) \Rightarrow (C \wedge \neg D)) \Leftrightarrow E$$

On donne ci-dessous trois notations différentes spécifiant la même interprétation :

1. $I = \{< A, F >, < B, F >, < C, V >, < D, F >, < E, V >\}$

2. $I = \{\neg A, \neg B, C, \neg D, E\}$

3. $I = \{C, E\}$ (ici on mentionne seulement les propositions évaluées à V).

Une vérification immédiate montre que :

$$\overline{I}(\mathcal{A}) = \mathcal{E}(\mathcal{A}, I) = V.$$

Exemples

$ii)$ Les *tautologies* suivantes sont souvent utilisées en mathématiques dans les énoncés des théorèmes :

$$A \Rightarrow (B \Rightarrow C) \Leftrightarrow (A \wedge B \Rightarrow C)$$

$$A \Rightarrow (B \Rightarrow (C \Rightarrow D)) \Leftrightarrow (A \wedge B \wedge C \Rightarrow D)$$

Langage et métalangage

Soulignons la différence entre $\Rightarrow$ (implication) et $\models$ (conséquence logique).

$\Rightarrow$ est un symbole du *langage*.

$\models$ est un symbole du *métalangage*.

La notation $\models_I \mathcal{F}$ signifie « l'interprétation I est un modèle de $\mathcal{F}$ ».

La notation $\mathcal{F} \models_I \mathcal{G}$ ou, ce qui est équivalent (cf. TD) $\models_I \mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{G}$, signifie « l'interprétation I est un modèle de $\mathcal{F}$ et de $\mathcal{G}$ ».

Les *métathéorèmes* suivants, bien que faciles à prouver, sont très importants.

Métathéorème 1

$H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n \models C$ si et seulement si $H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n \wedge \neg C$ est insatisfaisable, c'est-à-dire qu'il est impossible de l'évaluer à V.

Métathéorème 2

$\mathcal{A}$ est valide, ce qu'on note $\models \mathcal{A}$, si et seulement si $\neg\mathcal{A}$ est insatisfaisable.

Métathéorème 3 (d'interpolation)

Soient $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ des fbf de la logique propositionnelle. Notons $Ensprop(\mathcal{X})$ l'ensemble des symboles propositionnels de la fbf $\mathcal{X}$.

Si $\mathcal{A} \models \mathcal{B}$ et $Ensprop(\mathcal{A}) \cap Ensprop(\mathcal{B}) \neq \emptyset$, alors il existe $\mathcal{C}$ telle que $Ensprop(\mathcal{C}) = Ensprop(\mathcal{A}) \cap Ensprop(\mathcal{B})$ et

$$\mathcal{A} \models \mathcal{C} \quad \text{et} \quad \mathcal{C} \models \mathcal{B}.$$

$\mathcal{C}$ est appelé l'interpolant *de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$.*

Métathéorème 3 (d'interpolation)

Exemple. Soit :

$$Q \wedge R \models P \vee Q$$

Alors :

$$Q \wedge R \models Q \quad \text{et} \quad Q \models P \vee Q$$

On est dans le cadre du métathéorème d'interpolation, avec : $\mathcal{A}$: $Q \wedge R$, $\mathcal{B}$: $P \vee Q$, $\mathcal{C}$: Q.