LOGIQUE

L3 Informatique

Salim Lardjane

*Université Bretagne Sud*

# 3. La logique propositionnelle (LP0)

## 3.1. Première approche

## Définitions

La première logique que nous étudiérons est la **logique propositionnelle** LP0, et bien que son pouvoir d'expression soit limité, la variété de ses applications ainsi que son rôle dans les fondements de l'automatisation de la logique du premier ordre rend son étude indispensable.

## Définitions

Une **proposition** est un *énoncé* (c'est-à-dire une suite syntaxiquement correcte de caractères) exprimant une relation entre plusieurs éléments, auquel on peut assigner une et une seule *valeur de vérité*.

En général, la valeur de vérité sera soit V (vrai) soit F (faux).

Les éléments de l'énoncé sont appelés *termes*.

On utilise également le terme *expression* pour *énoncé*.

## Exemples

*Phrases déclaratives et impératives* :

« La factorielle de 0 est 1 » est une proposition.

« La factorielle de 1 est 1 » est une proposition.

« La factorielle de $n$ $(n > 1)$ et $n-1$ fois la factorielle de $n-2$ » est une proposition.

« Aller à l'étiquette ETIQ » n'est pas une proposition.

« Mettre la valeur 3 dans la case étiquetée » n'est pas une proposition.

## Syntaxe et sémantique

Nous étudierons la LP0 suivant deux approches (sémantique et syntaxique).

La notion-clé dans l'approche sémantique est celle *d'interprétation*.

Dans l'approche syntaxique ce sera la *manipulation symbolique* (indépendante de toute signification).

Dans les deux nous aurons besoin d'un *langage*.

Le langage sera celui défini par la syntaxe du Calcul Propositionnel (CP).

## Syntaxe du CP

Les seules formules acceptées sont celles dont la syntaxe correspond aux règles ci-dessous. On les appellera *formules bien formées* ou, plus fréquemment en abrégé, *fbf*.

Soit Π un ensemble infini dénombrable de formules de base (ou *formules atomiques* ou *formules élémentaires* ou *symboles propositionnels*, etc.) que l'on notera, par exemple, $P_1, P_2, \ldots$ ou $P, Q, R, \ldots$, etc.

## Syntaxe du CP

L'ensemble des formules propositionnelles (noté $\mathcal{L}_0$) est le plus petit ensemble contenant les éléments de $\Pi$ et fermé par la règle :

Si $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont des formules propositionnelles, alors :

$$\neg\mathcal{A}, \mathcal{A} \wedge \mathcal{B}, \mathcal{A} \vee \mathcal{B}, \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}, \mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$$

le sont aussi.

$\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ sont appelés *connectifs* (ou *connecteurs*) logiques ou plus simplement *connectifs*.

## Syntaxe du CP

La *hiérarchie* (ou *priorité*) des connectifs logiques est, par ordre décroissant (c'est-à-dire la négation est le premier à être appliqué) :

$\neg$ : négation, $\wedge$ conjonction, $\vee$ : disjonction, $\Rightarrow$ : implication, $\Leftrightarrow$ : équivalence.

Pour le même opérateur : de gauche à droite.

Par exemple :

$A \vee \neg B \Leftrightarrow C$ correspond à : $(A \vee (\neg B)) \Leftrightarrow (C)$.

## Ensemble des fbf

L'ensemble des fbf de la LP0 est infini dénombrable : il y a une infinité dénombrable de symboles de base et l'on peut donner une procédure d'énumération des fbf.

Tout ensemble infini de fbf de la LP sera un sous-ensemble d'un ensemble infini dénombrable, donc aussi infini dénombrable.

## Sémantique du CP

Une fonction de vérité n-aire est une application :

$$\{V,F\}^n \to \{V,F\}, \quad n \geq 1$$

Parmi les $2^{(2^2)}$ fonctions de vérités *binaires* possibes, on utilise couramment l'ensemble suivant de connectifs : $\{\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$.

*Il suffit pour exprimer toutes les fonctions binaires possibles* (voir TD).

## Inerprétation

Soit Π l'ensemble des formules de base du langage.

Une *interprétation* $I$ est une application :

$$I : \Pi \to \{V, F\}$$

En pratique on s'intéresse en général à des ensembles finis de formules, il suffit donc de prendre pour Π l'ensemble de formules de base de l'ensemble de formules considéré.

## Inerprétation des fbf non élémentaires Tables de vérité

On définit l'extension de l'interprétation $I$ à l'ensemble des *formules propositionnelles*, notée $\bar{I}$, comme :

1) $\bar{I}(A) = I(A)$ si $A$ est atomique.

2)

$$\bar{I}(\neg A) = \begin{cases} F & \text{si} \quad \bar{I}(A) = V \\ V & \text{si} \quad \bar{I}(A) = F \end{cases}$$

3)

$$\bar{I}(A \wedge B) = \begin{cases} V & \text{si} \quad \bar{I}(A) = \bar{I}(B) = V \\ F & \text{sinon.} \end{cases}$$

## Inerprétation des fbf non élémentaires
## Tables de vérité

4)

$$\bar{I}(A \vee B) = \begin{cases} V \quad \text{si} \quad \bar{I}(A) = V \text{ ou } \\ \qquad \bar{I}(B) = V \text{ ou les deux} \\ F \quad \text{sinon.} \end{cases}$$

5)

$$\bar{I}(A \Rightarrow B) = \begin{cases} V \quad \text{si} \quad \bar{I}(A) = F \text{ ou } \bar{I}(B) = V \\ F \quad \text{sinon.} \end{cases}$$

6)

$$\bar{I}(A \Leftrightarrow B) = \begin{cases} V \quad \text{si} \quad \bar{I}(A) = \bar{I}(B) \\ F \quad \text{sinon.} \end{cases}$$

## Inerprétation des fbf non élémentaires Tables de vérité

$\bar{I}(A)$, également notée $\mathcal{E}(A, I)$ correspond aux tables de vérités bien connues :

| $P$ | $Q$ | $\neg P$ | $P \wedge Q$ | $P \vee Q$ | $P \Rightarrow Q$ | $P \Leftrightarrow Q$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| V | V | F | V | V | V | V |
| V | F | F | F | V | F | F |
| F | V | V | F | V | V | F |
| F | F | V | F | F | V | V |

## Langage Naturel et CP

La traduction des phrases du langage courant dans le langage du CP ne va pas sans poser des problèmes ; il faut donc être prudent et tenir compte, entre autres, des habitudes dans l'usage de la langue.

**Exemple.**

Considérons les propositions suivantes :

a) S'il pleut, j'irai au cinéma.
b) Cet après-midi à 14 heures j'irai au cinéma ou au foot.

## Langage Naturel et CP

Si l'on veut traduire la sémantique (la plus probable) de a), ce serait par un $\Leftrightarrow$ et non par un $\Rightarrow$ parce qu'en suivant l'usage, on veut dire : « s'il pleut j'irai au cinéma » et « s'il ne pleut pas, je n'irai pas au cinéma ».

« Si $A$ alors $B$ » doit être traduite le plus souvent par $(A \Rightarrow B) \wedge (\neg A \Rightarrow \neg B)$.

b) quant à elle doit être traduite par un *ou exclusif*.