LOGIQUE
L3 Informatique

Salim Lardjane
Université Bretagne Sud

2. Logique et paradoxes

Un peu d'histoire

Revenons un peu sur l'histoire de la logique et essayons d'analyser quelques concepts bien connus qui en font partie.

Les difficultés logiques sont apparues très tôt dans la philosophie, la théologie et la littérature.

Voici trois exemples :

1. le paradoxe du menteur, attribué à Eubulide de Milet : "Je mens" ;

2. La phrase : "Cette phrase est fausse" ;

Un peu d'histoire

3. la version du paradoxe du menteur due au crétois Epimènide de Cnossos qui dit : "Tous les Crétois sont des menteurs".

S'agit-il de vrais paradoxes ?

Qu'est-ce qu'un paradoxe ?

Un peu d'histoire

Étymologiquement (XVème s.) :

paradoxe : contraire à l'opinion commune (doxa : opinion, d'où hétérodoxe, orthodoxe).

D'autres définitions caractérisent les paradoxes comme des arguments (ou assertions) menant à contradiction (paradoxes logiques).

Parfois on les associe à des résultats (obtenus en utilisant des raisonnements corrects) contraires à l'intuition et au bon sens et provoquant l'étonnement et la perplexité.

On appelle aussi « paradoxes » des propositions qui semblent être vraies (resp. fausses) et sont fausses (resp. vraies).

Un peu d'histoire

D'autres exemples :

4. La règle "Toute règle a des exceptions" pose problème.

Il s'agit d'une règle et elle doit donc avoir des exceptions.

Par conséquent, il existe des règles sans exception.

Un peu d'histoire

5. i) La phrase ci-dessous est fausse.
ii) La phrase ci-dessus est vraie.

Si i) est V alors ii) est F donc i) est F .

Si i) est F alors ii) est V donc i) est V .

Si ii) est F alors i) est V donc ii) est V .

Si ii) est V alors i) est F donc ii) est F .

Paradoxes et théorie des ensembles

Les paradoxes qui ont eu le plus de retentissement sont ceux qui concernent la théorie des ensembles : très probablement à cause de l'importance de la théorie des ensembles en mathématiques.

Bolzano introduit (en 1847) la notion d'ensemble pour la première fois : *un ensemble est une collection dont l'ordre des éléments n'est pas pertinent et à laquelle on ne change rien d'essentiel en en changeant seulement l'ordre*.

Mais celui qui a développé la théorie des ensembles a été Cantor.

Dans la théorie naïve des ensembles, un ensemble est, selon Cantor : *toute collection d'objets définis et différents, issue de notre intuition ou de notre pensée*.

Cependant, admettre n'importe quelle propriété pour définir un ensemble peut-être problématique :

Paradoxes et théorie des ensembles

Ainsi, il y a des ensembles qui ne se contiennent pas eux-mêmes. Par exemple : L'ensemble des nombres premiers < 150.

Il y en a d'autres qui se contiennent eux-mêmes. Par exemple : L'ensemble de toutes les idées, le catalogue de tous les catalogues ou, d'une façon plus abstraite, l'ensemble de tous les ensembles.

Paradoxes et théorie des ensembles

On peut facilement montrer qu'accepter comme ensemble la collection de tous les ensembles de l'univers (U) pose problème.

En effet, si c'est un ensemble il doit se contenir lui même.

Mais l'ensemble de ses parties $\mathcal{P}(U)$ est aussi un ensemble.

Or card($\mathcal{P}(U)$) $>$ card(U).

Il existerait donc un ensemble qui contient plus d'ensembles que l'univers !

Paradoxes et théorie des ensembles

Bertrand Russell conçut en 1902 un ensemble qui mène à un paradoxe, celui connu comme *le paradoxe de Russell* :

Soit B l'ensemble de tous les ensembles A tel que A n'est pas un élément de A (c'est-à-dire l'ensemble de tous les ensembles qui ne se contiennent pas eux-mêmes).

L'existence de B mène à une contradiction :

– Si $B \in B$ alors B contient un ensemble qui se contient lui-même (B) et B ne doit pas contenir B (puisque B contient seulement ceux qui ne se contiennent pas eux-mêmes), donc $B \notin B$.

– Si $B \notin B$, comme B ne se contient pas lui-même, B doit contenir B (puisque B contient tous les ensembles qui ne se contiennent pas eux-mêmes), donc $B \in B$.

Paradoxes et théorie des ensembles

Le paradoxe de Russell a été popularisé comme *le paradoxe du barbier* : un barbier doit raser tous ceux qui ne se rasent pas eux- mêmes. Mais lui, doit-il se raser ?

S'il se rase, alors il rase quelqu'un qui se rase lui-même. Donc il ne doit pas se raser.

S'il ne se rase pas, il ne rase pas tous ceux qui ne se rasent pas eux-mêmes. Donc il doit se raser.

Paradoxes et théorie des ensembles

La source du problème est *l'axiome d'abstraction* (dit aussi de *compréhension naïve*) : étant donné une propriété, il existe un ensemble dont les membres sont exactement les entités ayant cette propriété.

Autrement dit, pour tout *prédicat* P, il existe un ensemble dont les éléments sont tous les objets (et eux seuls) satisfaisant P :

$$\exists x \forall y : y \in x \Leftrightarrow P(y)$$

Paradoxes et théorie des ensembles

Plus précisément, la cause des paradoxes concernant la théorie des ensembles fut cherchée dans l'attribution de la qualité d'ensemble à des objets mal définis.

Quand un ensemble S et un objet ob sont définis de telle façon que :

i) ob est un membre de S
ii) la définition de ob dépend de S

on dit que la définition est *imprédicative* (Poincaré).

Ceci correspond à ce que l'on appelle en langage courant un cercle vicieux.

Pour éviter les paradoxes, les définitions imprédicatives doivent être considérées comme illégitimes.

Paradoxes et théorie des ensembles

Signalons que des définitions importantes et imprédicatives sont utilisées en mathématiques, telles que celles de plus petite borne supérieure (elle est parmi toutes les bornes considérées), max d'une fonction dans un intervalle (le max est parmi toutes les valeurs considérées) , etc.

Ce type de définition a montré son utilité aussi en informatique (systèmes communicants, streams).

Paradoxes et théorie des ensembles

L'*axiome du choix* et l'*hypothèse du continu* ont une très grande importance dans la théorie des ensembles et dans les fondements des mathématiques.

Nous donnons trois versions de l'axiome du choix (AC) :

Version 1 : Pour tout ensemble X d'ensemble non vides y, il existe une fonction f de domaine X, tel que $f(y) \in y$ pour tout $y \in X$. (Son usage est seulement nécessaire quand X est infini).

Version 2 : Soit S un ensemble d'ensembles non vides disjoints deux à deux. Il existe un ensemble C contenant exactement un élément de chaque membre de S.

Version 3 (formalisation de la version 1) : $\forall X \exists f$: (f fonction de domaine X) $\wedge$ $(\forall z : (z \in X \wedge \exists u : u \in z) \Rightarrow (f(z) \in z))$

Paradoxes et théorie des ensembles

L'hypothèse du continu (HC) affirme que entre $\aleph_0$ (la cardinalité de $\mathbb{N}$) et $\aleph_1$ (aussi noté $2^{\aleph_0}$) (la cardinalité de $\mathbb{R}$) il n'y a pas d'autre cardinal transfini.

L'*hypothèse généralisée du continu* affirme que la suite de transfinis est :

$$\aleph_0, \aleph_1 = 2^{\aleph_0}, \aleph_2 = 2^{\aleph_1}, \ldots, \aleph_{n+1} = 2^{\aleph_n}, \ldots$$

Paradoxes et théorie des ensembles

Kurt Gödel prouva (en 1940) que si l'axiomatique ZF (Zermelo-Fraenkel) de la théorie des ensembles est consistante (c'est-à-dire ne permet pas de déduire une formule et sa négation) alors ZF + AC et ZF + AC + HC le sont aussi.

Autrement dit, AC et HC ne peuvent pas être réfutés.

Paul Cohen prouva (en 1963) que AC et HC sont indépendants des autres axiomes de ZF, c'est-à-dire que AC et HC ne peuvent pas être prouvés si ZF est consistante. HC ne peut pas être prouvée dans ZF + AC.

AC et HC sont *indécidables* dans ZF.

Paradoxes et arithmétique

Exemple 1 (paradoxe de Berry) : Soit l'arithmétique formalisée avec les axiomes de Peano (formalisation classique). Soit A : ensemble de tous les naturels qui peuvent être définis en français par une phrase contenant au plus mille caractères (lettres ou symboles de séparation). A est donc fini. Il existe par conséquent des naturels n'appartenant pas à A.

La phrase : « n est le plus petit naturel qui ne peut pas être défini au moyen d'une phrase en français contenant au plus mille caractères » contient moins de mille caractères et définit un naturel n. Donc n appartient à A. D'autre part, n n'appartient pas à A d'après la définition de n.

On peut résoudre le paradoxe en introduisant les notions de *théorie* (langage) et de *métathéorie* (métalangage).

Exemple 2 (Le problème de l'arrêt) : L'idée sous-jacente dans le paradoxe de Russell peut être appliquée pour prouver l'indécidabilité (insolubilité) du problème de l'arrêt. Cette idée peut être caractérisée comme la possibilité pour une expression désignant un objet de faire référence à une totalité à laquelle cet objet appartient.

Ce problème peut être énoncé comme suit.

Problème de l'arrêt : étant donné un programme dans un langage (avec même pouvoir d'expression que la machine de Turing) et des données d'entrée (ou un état initial de son ruban d'entrée) décider si le programme (la machine de Turing) s'arrête ou pas.

Paradoxes et arithmétique

Pour prouver que le problème peut être résolu dans un certain langage, il suffit de donner le programme solution.

Mais, pour prouver qu'il ne peut pas être résolu, il faut une méthode indirecte (par exemple réduction à l'absurde).

Nous supposons donc que l'on peut écrire un programme A qui, pour tout programme P, décide s'il s'arrête ou pas, c'est-à-dire que $A(P)$ retourne V en un temps fini si P s'arrête et retourne F en un temps fini si P ne s'arrête pas.

On définit alors un programme D de la façon suivante :

Paradoxes et arithmétique

```
procedure D(x):
    si A(x,x) == V :
        boucle infinie
    sinon
        return(V)
```

et on considère $D(D)$. Alors :

– le programme D s'arrête si le programme D ne s'arrête pas ;

– le programme D ne s'arrête pas si le programme D s'arrête.

Contradiction.

Donc A ne peut pas exister.

Formalismes et notions connues

Pour être convaincu que des problèmes importants nous sont souvent cachés par nos habitudes, il est instructif de s'arrêter, par exemple, sur un mot qui revient très souvent dans les énoncés mathématiques :

Existe-t-il . . . tel que . . . ?

1. Pour les formalistes, existence : cohérence, non contradiction.

2. Pour les intuitionnistes, existence : construction, signification.

Dans les mathématiques standard, c'est la vision 1, qui est consciemment ou inconsciemment adoptée, mais peut-être cette notion n'est pas si naturelle que ça.

L'exemple suivant, dû à Frege (XIXème - XXème s.), devrait nous faire réfléchir :

Formalismes et notions connues

Exemple 1 :

Considérons les trois propositions suivantes :

1. G est un être intelligent ;
2. G est omniprésent ;
3. G est omniscient.

et supposons que ces trois propositions avec toutes leurs conséquences ne soient pas contradictoires.

Peut-on conclure *à l'existence de* G ?

Exemple 2 :

$\exists a, b$ irrationnels tels que a^b soit rationnel ?

Réponse (classique) : oui.

Preuve (classique) :

Prendre $a = \sqrt{2}$ et $b = \sqrt{2}$, alors si $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ est rationnel, on a prouvé le résultat ; si $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ est irrationnel, prendre $a = sqrt2^{\sqrt{2}}$ et $b = \sqrt{2}$.

Dans le deuxième cas $a^b = (\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = (\sqrt{2})^2 = 2$.

Ceci n'est pas une preuve constructive parce que l'on ne peut pas dire laquelle des deux possibilités est celle qui prouve la conjecture.

Formalismes et notions connues

Preuve *constructive* :

Prendre $a = \sqrt{2}$ et $b = 2\log_2 5$.

Alors, $a^b = \sqrt{2}^{2\log_2 5} = 2^{\log_2 5} = 5$ en vertu de la définition du logarithme.

Un concept clef dans l'intuitionnisme est celui de *contruction*. Il peut parfois ébranler nos certitudes quand à notre compréhension des mathématiques.

Toutefois, dire si une preuve est constructive ou pas peut parfois poser problème.

Considérons par exemple la preuve donnée par Euclide de l'existence d'une infinité de nombres premiers :

Supposons qu'il y en ait un nombre fini et ordonnons-les par ordre croissant : $p_1, \ldots, p_n$.

p_n est donc le plus grand nombre premier.

Mais $p_1 \times p_2 \times \cdots \times p_n + 1$ est aussi premier et il est plus grand que p_n, ce qui est absurde.

Par conséquent, il y a une infinité de nombres premiers.

Formalismes et notions connues

La méthode de preuve utilise le *tiers exclu*, mais elle donne *aussi* une façon de *construire* une infinité de nombres premiers.

Quelques notions connues et ardues

a. Définition et principe du tiers exclu :

Le principe du tiers exclu est très ancré dans nos habitudes de preuves, notamment dans les preuves par réduction à l'absurde.

Mais, dans certaines circonstances, son emploi est litigieux, surtout si l'on se place du point de vue de l'informaticien qui ne se contente pas de savoir si un objet peut être défini mais qui veut savoir aussi comment le *construire*.

Quelques notions connues et ardues

A titre d'exemple, soit (a_{mn}) une suite d'entiers $(m, n \in \mathbb{Z})$.

Soit la fonction f définie par :

$$f(m) \;=\; \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \forall n : a_{mn} = 0 \\ 1 & \text{si} \quad \exists n : a_{mn} \neq 0 \end{cases}$$

Du point de vue du mathématicien, cette fonction est parfaitement définie, parce que pour m donné (en utilisant le principe du tiers exclu) soit $a_{mn} = 0$ pour tout n et donc $f(m) = 0$, soit il existe n tel que $a_{mn} \neq 0$ et donc $f(m) = 1$.

Mais que se passe-t-il si on veut *effectivement calculer* les valeurs de $f(m)$? on doit examiner une infinité de termes, ce qui évidemment *n'est pas possible*.

Quelques notions connues et ardues

b. L'implication :

Il y a des choix qui ont été faits en logique classique qui donnent parfois des résultats un peu étonnants à première vue.

Par exemple, l'implication matérielle (V représente vrai et F représente faux) :

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

où, par définition, on a :

$$p \Rightarrow q : \neg(p \wedge \neg q)$$

Quelques notions connues et ardues

En prenant deux propositions quelconques p, q, la formule :

$$(p \Rightarrow q) \vee (q \Rightarrow p)$$

est une **tautologie**, c'est-à-dire une formule toujours vraie.

Il en est de même pour $p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$.

Ainsi, la définition de $\Rightarrow$ est sans doute un peu trop large.

Quelques notions connues et ardues

Un autre exemple est que :

$$(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow \neg q)$$

n'est pas une formule contradictoire : il suffit de prendre $p : F$ et $q : F$.

Ce qui pourrait induire à penser qu'elle est contradictoire est le fait qu'en mathématiques quand on pense à un théorème, on ne s'intéresse qu'au cas où les prémisses sont vraies.

Quelques notions connues et ardues

De plus, le *connectif* $\Rightarrow$ a été parfois critiqué par les philosophes de la logique pour ne pas être une traduction adéquate du *si. . . alors. . .* de la langue naturelle.

En langue naturelle le *si. . . alors. . .* est utilisé pour exprimer, par exemple :

– la causalité : si on met une bouilloire avec de l'eau sur le feu alors l'eau à l'intérieur chauffe ;

– l'implication : si Jean est plus petit que Pierre et Pierre est plus petit que Marc alors Jean est plus petit que Marc ;

– l'explication (possible) : si les fleurs sont par terre alors quelqu'un les a fait tomber.

Quelques notions connues et ardues

Concernant la causalité, il faut remarquer que l'implication matérielle ne traduit pas cette notion de façon adéquate pour au moins les trois raisons suivantes :

1. $p \Rightarrow p$ est une tautologie et la connexion causale est essentiellement irréfiexive (c'est-à-dire qu'aucun phénomène n'est la cause de lui-même).

2. La relation causale est essentiellement asymétrique (irreversibilité), ce qui n'est pas nécessairement le cas pour $\Rightarrow$: $p \Rightarrow q$ et $q \Rightarrow p$ peuvent être vrais tous les deux.

3. $p \Rightarrow q$ est V si $p : F$ et $q : V$. Si p correspond à la cause et q à l'effet, l'implication matérielle se traduit ici par : l'absence de cause implique n'importe quel effet.

Définitions de la logique

a. Quelques définitions tous publics

Etymologie (XIIIème siècle) : du grec « art du raisonnement ».

– Manière de raisonner, telle qu'elle s'exerce en fait, conformément ou non aux règles de la logique formelle.

– Raisonnement abstrait, schématique, souvent opposé à la complexité du réel.

– Enchaînement cohérent d'idées, manière de raisonner juste, suite dans les idées.

On appelle *raisonnement* une suite de propositions liées les unes aux autres selon des principes déterminés et aboutissant à une conclusion.

b. Quelques définitions plus techniques

– La logique étudie ce qui s'ensuit de quoi.

– La logique étudie les ensembles cohérents d'opinions (ou d'hypothèses).

– La logique est une science des vérités.

– La logique est une science des déductions.

– La logique est une manière d'évaluer des arguments.

– La logique étudie les méthodes et principes utilisés pour distinguer le raisonnement correct du raisonnement incorrect.

Définitions de la logique

c. Définition formelle

Une *logique abstraite* est un couple

$$(\mathcal{L}, \vdash_{\mathcal{L}})$$

où $\mathcal{L}$ est un *langage formel* et $\vdash_{\mathcal{L}}$ une *relation de conséquence*.

Les différents *calculs* (tableaux sémantiques, résolution, ...) que nous verrons dans la suite sont différentes *implémentations* d'une relation de conséquence.

Nous détaillerons les différents éléments de cette définition dans la suite du cours.