

Histoire Culturelle des Mathématiques

L. E. J. Brouwer, le Walden hollandais et les origines de la Topologie

Salim Lardjane

Université Bretagne Sud

LMBA



Introduction

- Au début du Xxème siècle, mathématiciens et artistes hollandais se trouvèrent pris dans une résurgence de Romantisme allemand.
- En réponse au matérialisme déterministe qu'ils associaient à la Science et à la Technologie, des intellectuels, peintres et poètes quittèrent Amsterdam pour s'établir à la campagne.

Introduction

- Ce faisant, ils espéraient se reconnecter à la Nature, pouvoir suivre leurs instincts et – méfiants envers la logique et la raison – rechercher la connaissance par la voie de **l'intuition**.
- Ce fut notamment le cas de **Luitzen Egbertus Jan Brouwer** (1881-1966), mathématicien hollandais le plus célèbre du XXème siècle, qui vécut dans une cabane au toit de chaume, consacrant de longues périodes de méditation silencieuse à penser aux **nombre**s.

Introduction



Introduction

- Brouwer considérait que les nombres et formes géométriques élémentaires (cercles, triangles) étaient des créations de l'esprit humain et il devint un critique acharné du Platonisme moderne.
- De nos jours, l'approche de Brouwer est appelée **constructivisme** car ceux qui l'adoptent s'attachent à **constituer** tous les objets mathématiques qu'ils considèrent à partir de **nombres**.

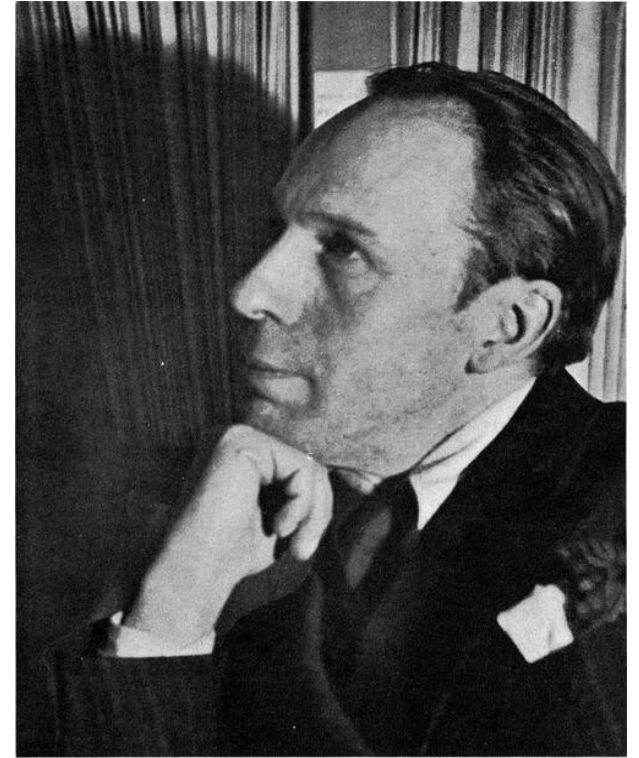
Introduction

- En plus de s'intéresser à la Philosophie des Mathématiques, Brouwer pratiqua celles-ci en développant la **Topologie**, dont il est considéré comme l'un des fondateurs.
- Des artistes du cercle de fréquentations de Brouwer partageaient sa confiance en **l'intuition** et en la **méditation**.
- La liaison entre Brouwer et ces artistes passait par un ancien prêtre catholique et philosophe des Mathématiques, **M. H. J. Schoenmakers**.

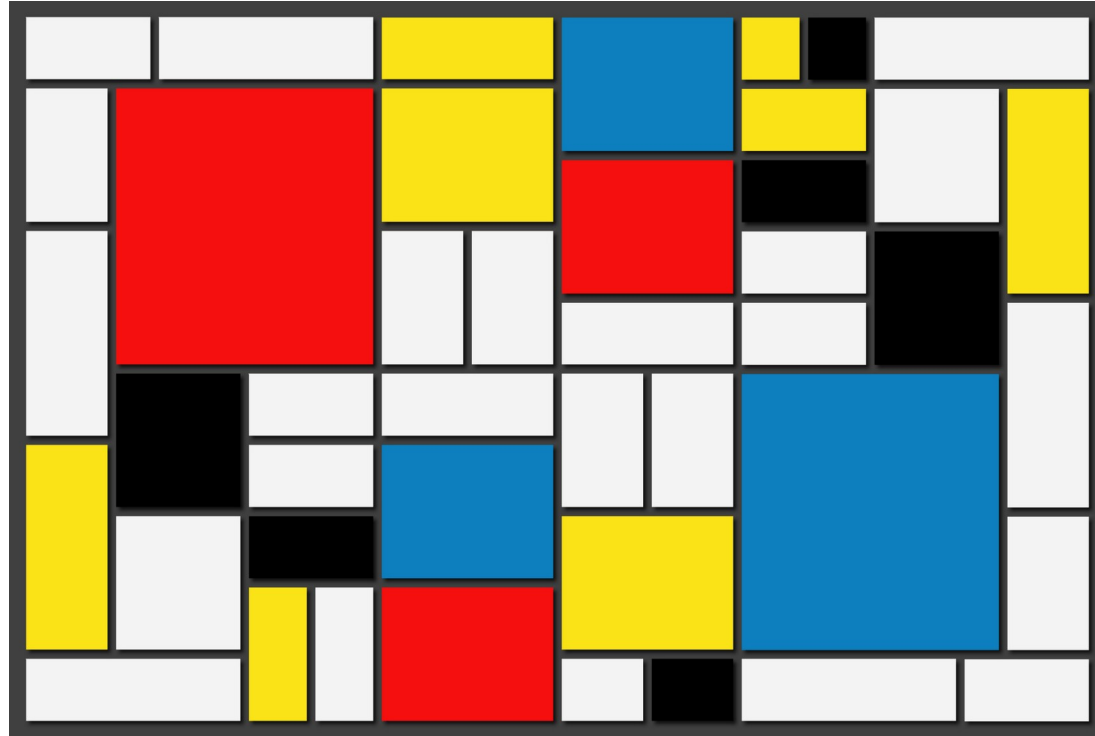
Introduction

- Sous l'influence de Schoenmakers, **Piet Mondrian** (1872-1944) et **Theo Van Doesburg** (1883-1931) se mirent à utiliser des formes géométriques et des couleurs primaires pour symboliser des objets mathématiques incarnés dans le monde réel.
- D'autres exposés pourront leur être consacrés.

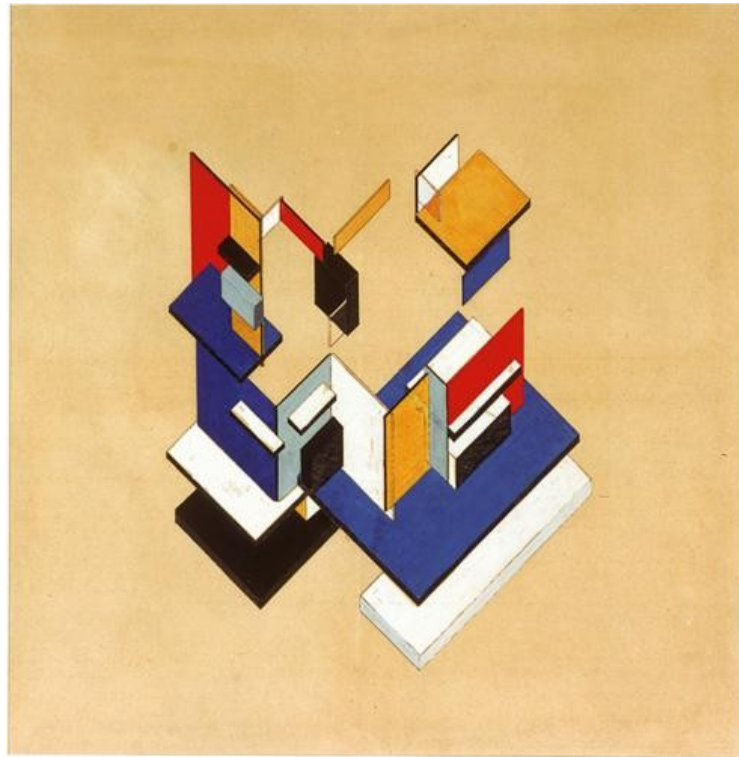
Introduction



Introduction



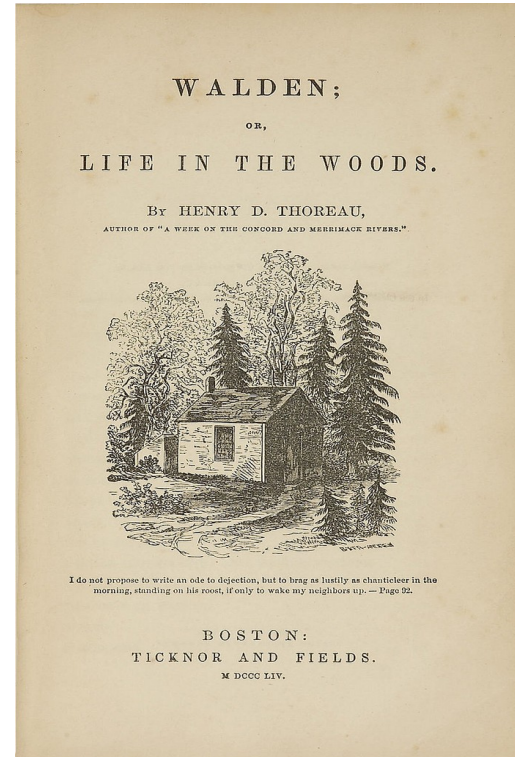
Introduction



Le Walden Hollandais

- Suite à la lecture de l'ouvrage *Walden, or Life in the Woods* (1854) du philosophe politique américain Henry David Thoreau (1817-1862), le psychiatre et écrivain hollandais Frederik van Eeden (1860-1932) décida de fonder une communauté à la campagne en 1898 et la nomma *Walden* en l'honneur de Thoreau.

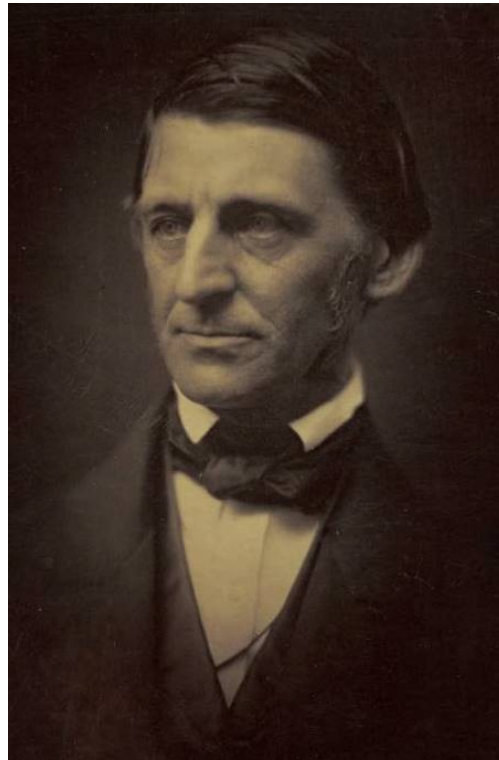
Le Walden Hollandais



Le Walden Hollandais

- Thoreau avait mis en pratique une version américaine de l'idéalisme allemand : « le transcendentalisme de la Nouvelle-Angleterre » décrit ainsi par l'essayiste et poète **Ralph Waldo Emerson** (1803-1882) : « *la meilleure vie est la vie simple et proche de la Nature et la connaissance de l'Esprit Absolu peut être atteinte par l'intuition* ».

Le Walden Hollandais



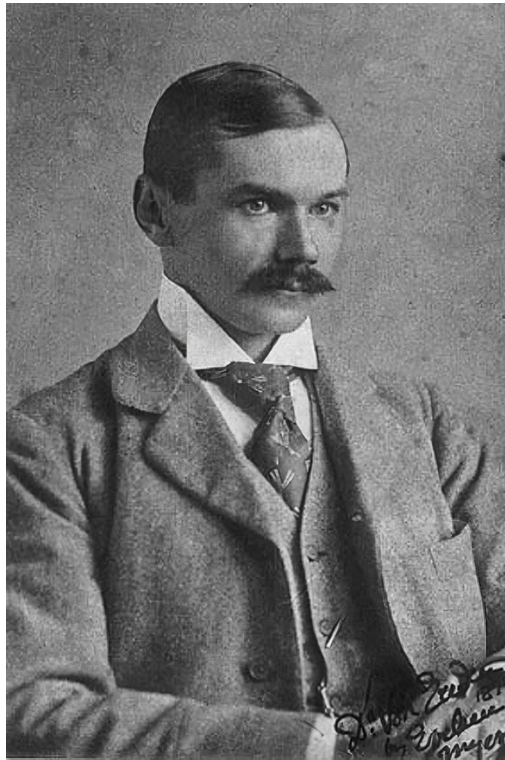
Le Walden hollandais

- Les membres du Walden hollandais rejetaient l'héritage du calvinisme strict et s'orientèrent spirituellement vers les traditions mystiques des premiers chrétiens et du Bouddhisme, avec l'objectif *d'unifier les diverses religions du monde en une seule philosophie globale*.
- Ils adoptèrent le régime végétarien indien, pratiquaient la méditation, lisaient les dialogues de Platon, la Bible et les textes Bouddhistes et Taoïstes.

Le Walden hollandais

- Avant d'établir sa communauté, van Eeden avait pratiqué la Psychiatrie, ce qui l'amena à mettre l'accent, au sein de sa communauté, sur des sujets relatifs à l'esprit humain : causes de la santé et de la maladie mentales, sources de la créativité artistique, accès à la connaissance par la méditation et, *après que Brouwer eut rejoint le groupe*, capacité de l'esprit humain à *créer* des objets mathématiques.

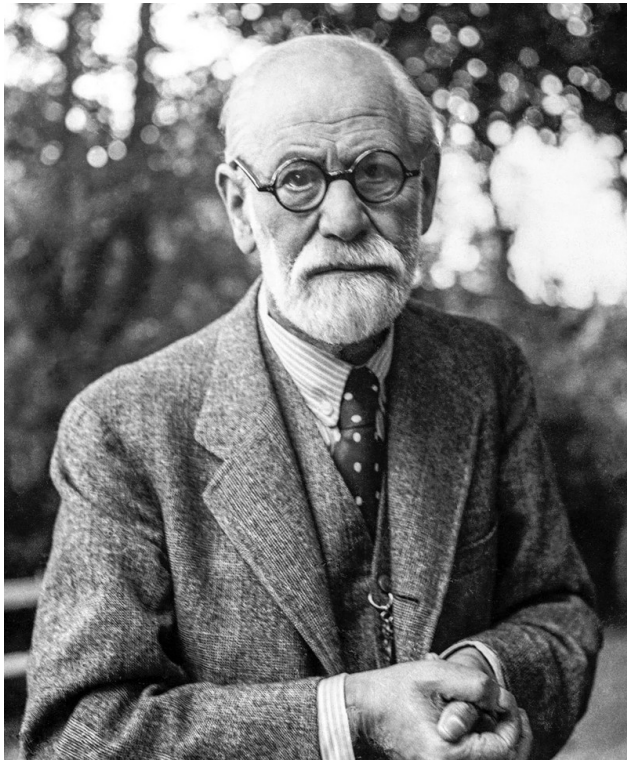
Van Eeden



Van Eeden

- Pratiquement contemporain de **Sigmund Freud** (1856-1939), avec qui il entretint une correspondance, Frederik van Eeden (1860-1932) fit ses études de médecine dans les années 1880, à une époque où les neurologistes s'opposaient sur les origines, physiques ou psychologiques de l'hystérie.
- Van Eeden voyagea à Paris pour assister aux conférences de Jean-Martin Charcot (1825-1893) qui soutenait la thèse que l'hystérie était d'origine physique.

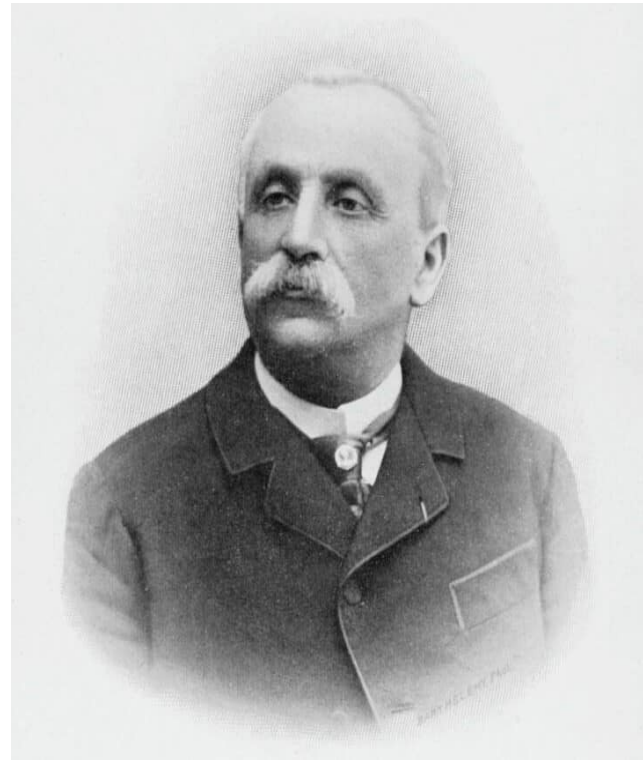
Van Eeden



Van Eeden

- Après avoir obtenu son diplôme de Médecine, van Eeden retourna à Paris pour étudier avec Charcot, puis voyagea à Nancy pour assister aux cours des rivaux de Charcot, **Ambroise-Auguste Liébeault** (1823-1904) et **Hyppolyte Bernheim** (1840-1919), qui soutenaient la thèse que l'hystérie était d'origine purement psychologique.

Van Eeden



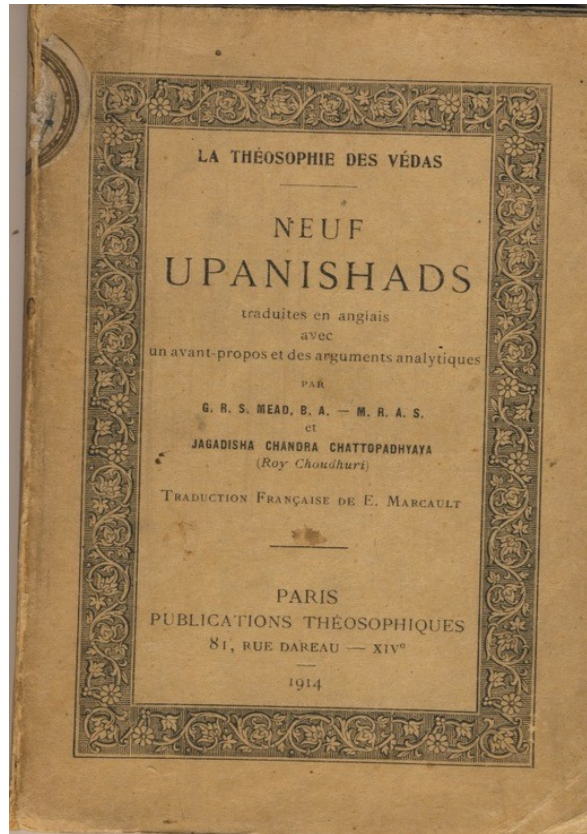
Van Eeden

- Van Eeden opta pour l'École de Nancy et revint à Amsterdam en 1887 où il fonda, avec le neurologue Albert Willem van Renterghem (1845-1939) un institut de Psychothérapie, **l'Institut Liébeault**, où il pratiqua les méthodes d'hypnose qu'il avait apprises à Nancy.
- Après avoir exercé pendant sept ans au sein de l'Institut Liébeault, van Eeden démissionna en 1893 pour se consacrer au Walden hollandais et à sa carrière littéraire.

Van Eeden

- En 1900, deux ans après avoir fondé le Walden hollandais, van Eeden participa à un congrès international de Psychologie à Paris, où il assista à une conférence du Bouddhiste indien **Jagadisha Chattopadhyaya**.
- Cela renforça sa détermination à jeter des ponts entre les pensées orientale et occidentale.

Van Eeden



Les mathématiciens du Walden hollandais

- Les mathématiciens prenant part aux discussions du Walden hollandais étaient **Gerrit Mannoury** (1867-1956) et **L. E. J. Brouwer**.
- Formé dans la tradition de l'idéalisme allemand, Mannoury avait une vision panthéiste et mystique d'un cosmos organique culminant dans l'Esprit Absolu de Hegel.

Les mathématiciens du Walden hollandais

- Il avait également une attirance pour la pensée orientale et rédigea un ouvrage sur les parallèles entre l'Esprit Absolu de Hegel et l'Esprit du Brahma (1907).
- Du point de vue académique, il se consacra essentiellement à l'enseignement et à la philosophie des mathématiques.



Les mathématiciens du Walden hollandais

- Mannoury influencia profondément Brouwer, ainsi que plusieurs générations d'étudiants à l'Université d'Amsterdam, où il enseigne de 1902 à 1937.
- En se référant à Kant, Mannoury et Brouwer considéraient que les nombres pouvaient être connus – de façon immédiate et certaine – par **introspection**.

Les mathématiciens du Walden hollandais

- Toutefois, selon Brouwer et Mannoury, la connaissance des objets mathématiques, tels que les nombres et les triangles, était ineffable et spécifique à chaque esprit humain.
- Ils considéraient de plus qu'il était **impossible de communiquer à une autre personne** toute intuition profonde à propos des mathématiques : « *Personne n'a jamais réussi à communiquer le contenu de son âme par le biais du langage* » (Brouwer, 1905).

Les mathématiciens du Walden hollandais

- *Mais alors, comment enseigner les mathématiques si le langage y est impuissant ? Que faire dans la salle de cours ?*
- Mannoury pratiquait *l'exhortation*, essayant de susciter chez ses étudiants un *état d'esprit* qui leur permettrait d'avoir accès aux mêmes intuitions que lui (ou à des intuitions proches), par opposition à l'écriture de preuves formelles au tableau.

Brouwer et l'intuition du temps

- Brouwer, fortement influencé par Mannoury et par la lecture de textes utopiques de van Eeden et alors qu'il était encore étudiant, acheta un bout de terre près d'Amsterdam, où il construisit une cabane et entama une vie ascétique.
- Il s'entraînait physiquement, suivait un régime végétarien strict et consacrait chaque jour une période de temps à la méditation silencieuse.

Brouwer et l'intuition du temps

- Au cours des décennies suivantes, alors que les invitations à rejoindre des universités prestigieuses se multipliaient, il ne quitta pas sa cabane ni ne modifia son mode de vie.
- Alors qu'il était en encore étudiant, Brouwer publia la philosophie des mathématiques à laquelle il adhéra toute sa vie dans l'ouvrage *Vie, Art et Mysticisme* (1905).

Brouwer et l'intuition du temps

- Le thème central de cet ouvrage de jeunesse, inspiré des mystiques chrétiens Jakob Böhme et Meister Eckhart, ainsi que du Bouddhisme, était **l'atteinte de la connaissance par l'intuition**.
- Brouwer décrit ainsi comment le fait de **compter** est basé sur la perception du temps :

Brouwer et l'intuition du temps

- *« Par un mouvement du temps, un présent cède la place à une autre sensation de présent, de telle façon que la conscience retient la précédente comme une sensation passée et, de plus, via cette distinction entre présent et passé, se détache des **deux** et de l'état de quiétude et devient **esprit** ».*

Brouwer et l'intuition du temps

- Pour Brouwer, lorsque l'esprit est dans un « état de quiétude », il a une « intuition primordiale du temps » sans avoir besoin de mots ou de symboles.
- C'est à partir de cet « état de quiétude » fondamental, sa résidence la plus profonde, que l'esprit effectue une transition vers le « monde extérieur » dans lequel il doit coopérer et chercher à comprendre l'autre.

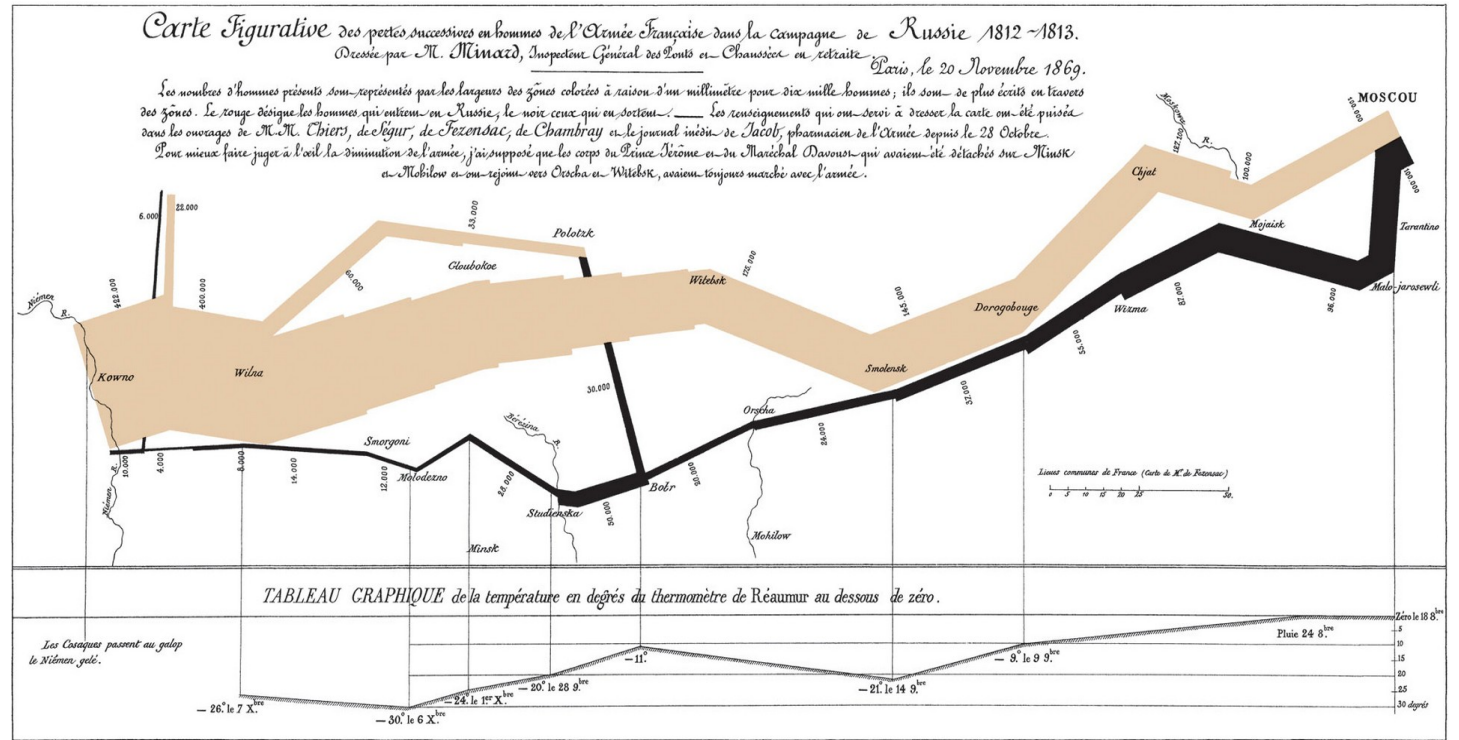
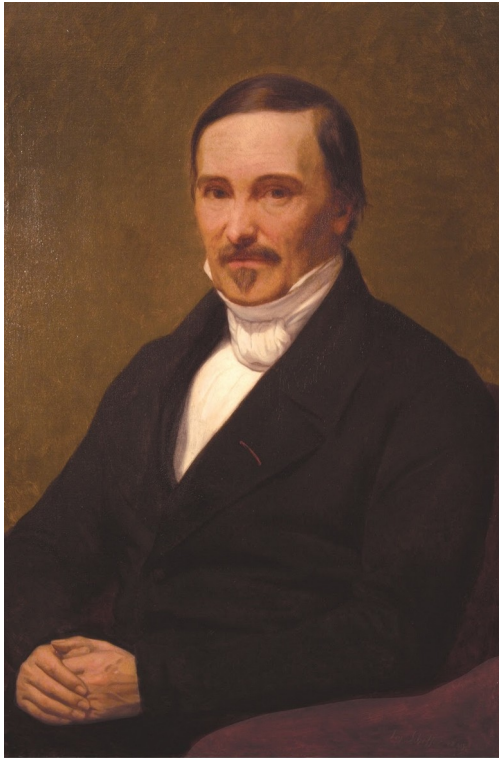
Brouwer et l'intuition du temps

- La méthode de Brouwer pour faire des mathématiques consistait à revenir à cet « état de quiétude » où il explorait, en méditant silencieusement, l'ordre et la structure des nombres.
- Il n'utilisait ni mots, ni symboles car il considérait que ses **intuitions essentielles** ne pouvaient être captées par une quelconque notation.

Brouwer et la Topologie

- Entre 1909 et 1913, Brouwer passa de la spéculation philosophique à la **pratique** des mathématiques et devint à cette occasion l'un des fondateurs de la **Topologie**.
- Il partit des travaux du mathématicien et ingénieur français **Jean-Victor Poncelet** (1788-1867) qui fut lieutenant du génie durant l'invasion de la Russie par Napoléon en 1812.

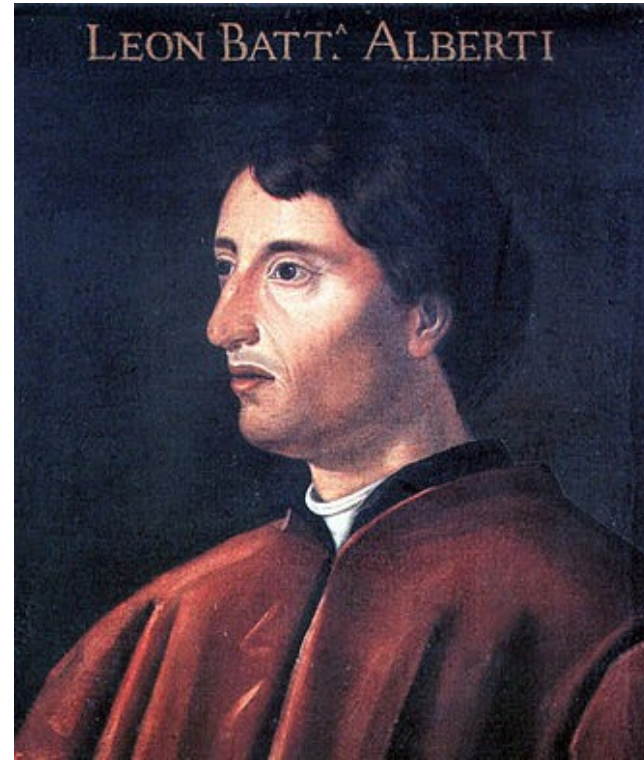
Brouwer et la Topologie



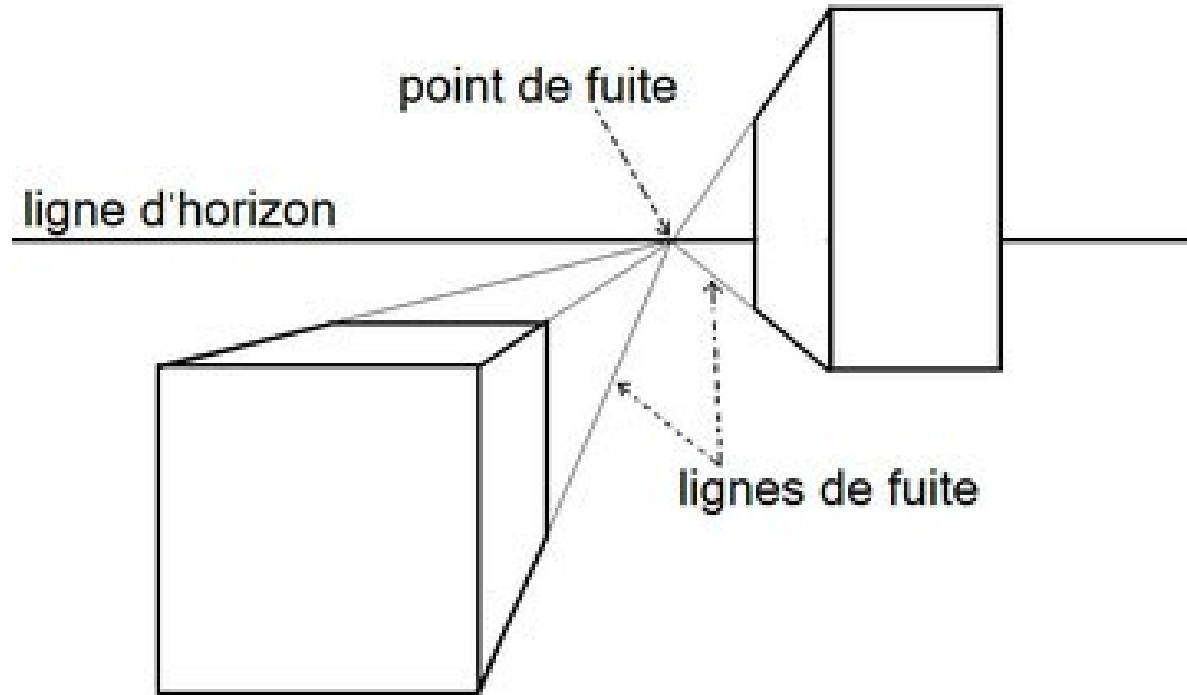
Brouwer et la Topologie

- Lors de la campagne de Russie, Poncelet fut laissé pour mort et capturé par les soldats russes.
- Alors qu'il était dans un camp de prisonniers, Poncelet occupa son esprit en généralisant la perspective linéaire de Filippo Brunelleschi (1377-1446) et Leon Battista Alberti (1404-1472) à la géométrie projective.

Brouwer et la Topologie



Brouwer et la Topologie



Brouwer et la Topologie

- *La cité idéale d'Urbino (1476) – Luciano Laurana, Piero Della Francesca ou Leon Battista Alberti (?)*.



Brouwer et la Topologie

- Poncelet considéra non seulement les projections sur le plan pictural vertical de la Renaissance mais également sur des plans obtenus par rotation ou inclinés.
- Il se posa la question de déterminer ce que chaque objet projeté avait en commun avec sa **projection** (son « ombre »).

Brouwer et la Topologie

- Il remarqua qu'un segment avait toujours pour ombre un segment, mais de longueur différente.
- L'ombre d'une ellipse pouvait être circulaire ou allongée mais restait une ellipse.
- La tangente à une courbe avait une ombre tangente à l'ombre de la courbe.

Brouwer et la Topologie

- De façon générale, Poncelet étudia les propriétés invariantes par projection de figures géométriques (*Traité des propriétés projectives des figures*, 1822).
- Brouwer généralisa la géométrie projective de Poncelet à des projections sur des surfaces tordues ou étirées de n'importe quelle forme – ce qui fut appelé plus tard « la géométrie en caoutchouc » - pourvu qu'elles restent continues (sans trou ni déchirure).

Brouwer et la Topologie

- Il généralisa également la géométrie tridimensionnelle de Poncelet à un **nombre quelconque** de dimensions.
- Brouwer créa ainsi une géométrie qui décrivait des figures dans tous les espaces continus imaginables, dans des mondes de toute dimension possible : la **Topologie**.

Brouwer et la Topologie

- Notons que la Topologie est une **rare exception** pour ce qui concerne les échanges entre Art et Mathématiques.
- D'habitude ceux-ci vont des Mathématiques vers l'Art et pas l'inverse, alors qu'ici l'architecte et peintre Brunelleschi inventa la perspective linéaire, **après quoi** les mathématiciens Poncelet et Brouwer **généralisèrent** la perspective en géométrie projective et en Topologie.

Brouwer et l'intuitionisme

- Après avoir achevé son travail sur la Topologie, Brouwer revint à la Philosophie des Mathématiques et développa l'approche intuitioniste des mathématiques.
- Selon Brouwer, les nombres naturels sont les seuls objets mathématiques qu'on connaît de façon immédiate et certaine. Ce sont donc les blocs fondamentaux à partir desquels le reste des mathématiques doit être construit.

Brouwer et l'intuitionisme

- Brouwer rejetait par ailleurs le principe du Tiers Exclu « P ou $\text{Non}(P)$ », affirmant qu'il présupposait que toute assertion mathématique pouvait être soit infirmée soit confirmée par une preuve, ce qui pour lui n'était le cas que si on avait **effectivement** une preuve de P ou une preuve de $\text{Non}(P)$ qui, de plus, devait vérifier des **critères constructivistes** stricts.

Sémiotique et Signifique

- Lorsque la première Guerre Mondiale éclata en 1914, van Eeden correspondit avec Freud à propos des causes du conflit et parvint à la conclusion que la cause principale des hostilités était une inaptitude des nations belligérantes à communiquer.
- Il décida donc d'organiser les efforts de son cercle d'intellectuels autour de la tâche urgente de créer une **langue internationale** pour promouvoir la paix.

Sémiotique et Signifique

- Des motivations analogues furent à l'origine de la création de l'Espéranto par l'intellectuel polonais **L. L. Zamenhof** (1905) et du langage « Interlingua » par le mathématicien italien **Giuseppe Peano** (1915).
- Van Eeden et son groupe basèrent leur approche sur les travaux du philosophe et mathématicien américain **Charles Sanders Peirce** (1839-1914).

Sémiotique et Signifique



Sémiotique et Signifique

- Dans les années 1860, C. S. Peirce avait avancé l'idée que toute notre connaissance du monde réel était basée sur des structures de signes : mots, images et symboles.
- Dans le cadre de sa Sémiotique, il analysa le signe sous forme d'une triade : le signifiant, le signifié et l'interprétation (lien entre signifiant et signifié).

Sémiotique et Signifique

- Peirce espérait rendre la langue anglaise plus précise en analysant en profondeur la signification de ses termes.
- Van Eeden avait été exposé à la Sémiotique de Peirce par les écrits de l'autrice anglaise **Victoria Welby** (1837-1912).
- Welby avait développé une conception de la « Signifique » (Science du Sens) qui l'avait amenée à étudier la langue anglaise comme un système évolutif.

Sémiotique et Signifique



Sémiotique et Signifique

- L'idée de Welby était que seule une telle étude permettrait d'éviter l'ambiguïté et l'incompréhension dans la communication (*What is Meaning ?* 1903).
- L'idée fut reprise par van Eeden, qui décida de baptiser le langage universel qu'il développait du nom de **Signifique** en l'honneur de Welby.

Sémiotique et Signifique

- En 1915, van Eeden rencontra personnellement Brouwer et le convainquit de contribuer au développement du **Signifique**.
- Bien que Brouwer eut longtemps maintenu que toute communication entre êtres humains ne pouvait être que superficielle, il décida de rejoindre l'entreprise et le groupe d'intellectuels et d'artistes autour de van Eeden qui s'y consacraient.

Sémiotique et Signifique

- Le groupe, qui incluait Mannoury, considérait le livre de Brouwer « On the Foundations of Mathematics » (1907) comme la première tentative de mettre en application le programme de la Signifique car il s'intéressait aux ressorts les plus fondamentaux de la pensée.
- En 1915, Brouwer mit au point un nouveau code verbal – le **Signifique Intuitif** – auquel il attribua un contenu politique :

Sémiotique et Signifique

- *« Personne ne peut être bon ou heureux dans le cadre de l'activité de cette Société malsaine. Ceux à la recherche du bonheur en dehors de cette activité ne trouvent aucune stimulation dans les mots du langage actuel qui, en dernière analyse, ne sont rien d'autre que des signes de commandement dans la régulation sociale du travail... le Signifique Intuitif fournit de nouveaux mots constituant un socle fondamental d'inter-compréhension dans le cadre de l'activité d'une Société nouvelle et plus saine. » (Brouwer, 1915)*

L'Académie de la Sagesse

- Durant la première Guerre Mondiale, van Eeden commença à planifier la création d'une **Académie de la Sagesse** qui devait enseigner à ses étudiants comment créer une société plus harmonieuse en développant à la fois les Sciences de la Nature, le Mysticisme et la Philosophie de l'Art et de la Religion.

L'Académie de la Sagesse

- Toutefois, le projet n'aboutit pas en raison de la rupture des négociations avec la municipalité d'Amersfoort, où van Eeden espérait installer l'Académie.

Conclusion

- L'objet de cet exposé aura été de présenter l'environnement intellectuel au sein duquel a été développée la Topologie, dans la Hollande du début du XXème siècle.
- Différents personnages mentionnés ici (Shoenmakers, van Eeden) ont également joué un rôle dans le développement intellectuel et spirituel des artistes Piet Mondrian et Theo Van Doesburg.
- Cela pourra être l'objet d'un autre exposé.

Références Bibliographiques

- L. Gamwell, *Mathematics + Art : A Cultural History*, Princeton University Press, 2016.
- D. Van Dalen, *Mystic, Geometer and Intuitionist, The Life of L. E. J. Brouwer, Vol. 1: The Dawning Revolution*, Clarendon Press, 1999.
- D. Van Dalen, *Mystic, Geometer and Intuitionist, The Life of L. E. J. Brouwer, Vol. 2: Hope and Disillusion*, Oxford University Press, 2005.