Mathématiques pour l'Assurance

Travaux dirigés 2

Principes de l'Assurance

Exercice 1 – On considère un individu auquel on associe la fonction d'utilité $u(w) = 5\log(w)$ et qui dipose d'une richesse initiale $w_0 = 22027$ € . Il envisage d'effectuer un placement qui peut lui procurer un gain de 5985 € avec une probabilité de 0,6 et une perte de 810 € avec une probabilité 0,4.

1. Calculer l'espérance mathématique du gain d'un tel placement ainsi que sa variance.
2. Donner une mesure locale de la prime de risque de cette individu.

Exercice 2 – Une entreprise est soumise à un risque assurable qui se traduit par un dommage annuel égal à X.
Dans 90% des cas, il n'y a pas de sinistre et $X = 0$.
Lorsqu'il y a i sinistres, on considère que $X = Ca^{i-1}$ avec $C > 0$ et $a > 1$, i variant de 1 à 10.
La probabilité annuelle de chaque cas de figure est de 1%.

1. Donner l'expression de l'espérance mathématique de X.
   Calculer sa valeur pour $C = 1000$ € et $a = 2$. Dans ce cas l'assureur qui accepte de prendre en charge la totalité du risque tarifie sur la base de $\mathbb{E}(X)$ qu'il majore de 30%. Quelle est la prime P demandée ?
2. L'entreprise détermine ses choix en utilisant une fonction d'utilité quadratique

   $$u(w) = w - aw^2$$

   où w est la situation de fortune.
   Commenter ce choix.(Pour $a = 5 \times 10^{-8}$, quel est l'intervalle de variation de w qui correspond à la fonction d'utilité d'un risquophobe ?)
3. L'entreprise cherche à maximiser son utilité en ne s'assurant que pour une fraction constante β du risque, la part $(1 - \beta)X$ étant supportée par l'entreprise. Si w est la situation financière hors risque, elle devient alors

   $$w_f = w - \beta P - (1 - \beta)X$$

(en supposant que la prime d'assurance P est alors égale à la fraction β de la prime calculée au 1.)
Exprimer l'espérance de l'utilité u de la situation financière i.e. $E[u(w_f)]$ sachant que $w = 9.5$ millions d'euros. Pour quelle valeur de β l'espérance de l'utilité est-elle maximale ?

Exercice 3 – Un collectionneur ayant une fonction d'utilité logarithmique possède un tableau de maître évalué à 15 millions d'euros, sa fortune s'élève à 150 millions d'euros. Ce tableau a une chance sur cent d'être dérobé.

1. Calculer le montant de la *prime moyenne* qu'une compagnie d'assurance pourrait réclamer à ce collectionneur.
2. Calculer la *prime de pleine assurance* que notre collectionneur serait prêt à payer pour se prémunir totalement contre tout vol de son tableau.
3. En déduire le montant de la *prime de risque* qu'il associerait à une éventuelle disparition de ce tableau. Comment l'assureur peut-il procéder pour calculer un chargement acceptable dans le but d'obtenir ce contrat ?
4. Retrouver cette prime de risque en utilisant l'approximation de Pratt.

Exercice 4 – Un naturaliste possède une collection d'animaux empaillés dont la valeur est estimée à L=5000 €. Malheureusement, il est obligé d'entreposer ces animaux dans un endroit vétuste où il y a des risques importants de détérioration (incendie, humidité, vendalisme, etc.). On estime à $q = 12$ % les chances pour que sa collection d'animaux empaillés soit endommagée. En outre, il a au cours de ses nombreux voyages à travers le monde, accumulé divers objets qui font que son patrimoine complet (c'est-à-dire toutes ses collections) atteint une valeur de 25000 €.
On suppose que le naturaliste a une fonction d'utilité de la forme suivante :

$$u(w) = w - \frac{\nu}{2}\, w^2 \quad \text{avec} \quad \nu > 0.$$

1. Etudier et représenter cette fonction d'utilité. Que peut-on dire du naturaliste en terme de perception du risque ?
2. Déterminer de manière analytique l'indice d'aversion absolue $R_a(w)$ et d'aversion relative $R_r(w)$ à l'égard du risque. Commenter.
3. Calculer le montant de la *prime moyenne* qu'une compagnie d'assurance pourrait proposer au voyageur pour protèger ses animaux empaillés. (On identifiera soigneusement la v.a. de Bernoulli qui intervient ici).

4. On donne $\nu = 0,0185$ pour w en milliers d'euros.
   Calculer la *prime de pleine assurance* que notre particulier serait prêt à payer pour se prémunir totalement contre toute détérioration de sa collection d'animaux.

Exercice 5 – On considère n individus dont la richesse initiale est $w_0 = 50000$ € . Ils possèdent tous un bien de valeur $L = 5000$ € qui peut être détruit ou dérobé avec une probabilité $p = 0.2$. On admet que la satisfaction des individus par rapport à leur richesse est caractérisée par une fonction d'utilité de la forme :

$$u(w) = -e^{-\lambda w} \ , \quad \text{avec } \lambda = 0.0002$$

Calculer la prime de pleine assurance pour $n = 1$ et pour $n = 2$.
Compléter le tableau suivant :

	n=1	n=2
Richesse finale		
Richesse moyenne		
Variance de la richesse finale		
Ecart type		
Prime de pleine assurance		
Prime de risque		
Niveau d'utilité		

Commenter.

Exercice 6 – Un armateur possède une flotille évaluée à 1,5 millions d'euros. Sa richesse investie en titres s'élève quant à elle à 14 millions d'euros. Son aversion relative pour le risque est unitaire. Une compagnie d'assurance lui propose alors deux contrats :

- Contrat 1 : Co-assurance avec un chargement de 2 %.
- Contrat 2 : Franchise avec un chargement de 2%.

Sachant que sa flotille comporte une chance sur cent d'être détruite,

1. Calculer le taux de couverture dans le cadre du contrat 1.
2. Déterminer le montant de la franchise dans celui du contrat 2
3. Pour quel contrat cet armateur devra-t-il opter ?

Exercice 7 – Une compagnie d'assurance décide de proposer un nouveau produit en ligne couvrant le risque de défaillance du matériel informatique. Pour ce faire, elle a procédé à une étude de marché et a estimé que le montant annuel des sinistres S pour un individu assuré, a une espérance mathématique de 193 € avec un écart-type de 657 € . Le facteur de chargement λ est de 7%. Par ailleurs, elle a estimé que sur le marché français, 10000 internautes sont susceptibles d'être intéressés par cette assurance (les risques sont supposés

identiques et indépendants).
Cette compagnie dispose d'une marge de trésorerie $K = 31\ 000$ € .

1. Quelle est la valeur du coefficient de sécurité β de la société d'assurances ?
2. Le produit étant réellement innovant, la compagnie d'assurances souhaite avoir un coefficient de sécurité au moins égal à 5.
   (a) Déterminer quelle doit être la marge de sécurité (réserve) K dans ces conditions.
   (b) Donner, pour les deux coefficients de sécurité, une borne de la probabilité de ruine.

Exercice 8 –Un risque présente les caractéristiques suivantes.
La charge annuelle des sinistres X a une espérance mathématique de 200 € et un écart-type de 2000 € . Un assureur, disposant d'une marge de sécurité K, se propose de gérer n contrats couvrant des risques indépendants et identiques à celui que l'on vient de décrire, en ajoutant à la prime pure, un chargement de sécurité dont le pourcentage est λ.

1. Quelle est la valeur du coefficient de sécurité β lorsque $K = 100\ 000$ € , $\lambda = 5\%$ et $n = 5000$?
2. On veut avoir un coefficient de sécurité $\beta \geq 4$.
   (a) Quelle doit être la marge K pour $\lambda = 5\%$ et $n = 5000$?
   (b) Quel doit être le pourcentage de chargement λ pour $K = 100\ 000$ € et $n = 5000$?
   (c) Quel est le nombre minimum n de risques à gérer pour $K = 100\ 000$ € et $\lambda = 5\%$?

Exercice 9 – On considère un portefeuille de n polices identiques pour des sinistres indépendants deux à deux. On note S est le montant des sinistres, P la prime versée (espérance d'un sinistre) et σ l'écart-type du montant des sinistres.
Rappeler l'expression de la probabilité de ruine en utilisant le théorème central limite.
En utilisant les données des exercices précédents explorer la relation entre reserve, nombre de contrat, montant de la prime et chargement à l'aide d'un tableur.