UNIVERSITÉ PARIS V RENÉ DESCARTES U.F.R. MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE

RAPPORT SCIENTIFIQUE

présenté par

Jacques FROMENT

pour obtenir le diplôme d'

HABILITATION À DIRIGER DES RECHERCHES

arrêté du 23 novembre 1988

le 30 Mai 2000 devant le Jury composé de

Vicent CASELLES
Donald GEMAN
Yves MEYER
Jean-Michel MOREL
Bernard ROUGÉ
Michel SCHREIBER

Je tiens en premier lieu à exprimer ma très profonde reconnaissance à Yves Meyer pour l'attention portée à mon travail tout au long de la décennie. Ses encouragements constants, sa générosité et son enthousiasme ont été de précieux soutiens, et sa présence aujourd'hui à la présidence du jury m'honore tout autant qu'elle me ravit.

À Vicent Caselles je souhaite adresser mes sincères remerciements pour avoir accepté la charge de rapporter sur mon dossier, ainsi que pour son grand enthousiasme. Je remercie aussi Donald Geman de l'honneur qu'il me fait en acceptant de juger ce travail. Au travers des projets du CNES, Bernard Rougé me permet de participer à l'une des plus belles aventures humaines. Qu'il trouve ici l'expression de ma plus vive gratitude.

Je voudrais profiter de l'occasion qu'il m'est donné pour exprimer toute ma reconnaissance à Michel Schreiber, qui a tant œuvré pour le bien de notre U.F.R. Mathématiques et Informatique.

Recenser les collègues, camarades et amis avec qui j'ai eu le plaisir de travailler, de discuter ou tout simplement de partager de merveilleux moments, me paraît une tâche sinon insurmontable, au moins ne pouvoir s'exprimer sur cette unique page. Qu'ils soient ou aient été membres de l'équipe *PRISME*, de l'*UFR Mathématiques et Informatique*, du *CMLA* de l'*Ecole Normale Supérieure de Cachan*, du *CEREMADE* de l'*Université Paris IX-Dauphine*, du *DMI* de l'*Université des Iles Baléares*, de l'*Université de Las Palmas de Grande-Canarie* ou du *Courant Institute of Mathematical Sciences* à l'*Université de New-York*, je souhaiterais leur adresser un grand merci.

Enfin, je ne saurais comment remercier Jean-Michel Morel qui, après avoir dirigé ma thèse, m'a régulièrement proposé des sujets de réflexion permettant de mûrir ma démarche scientifique. Nos discussions passionnantes et les approches originales qu'il m'a suggérées font partie de mes meilleurs souvenirs de chercheur.

À Myriam,
à Alice et Rémy,

Table des matières

Résumé

Mes recherches portent sur la formalisation mathématique de la vision bas niveau et ses applications, notamment en compression d'images. La vision par ordinateur pose le problème de la détermination d'un modèle mathématique et de la définition d'une représentation par primitives qui soient adaptés à la caractérisation de l'information pertinente contenue dans les images numériques. Ces primitives ont vocation à servir de données à la plupart des algorithmes d'analyse d'images. Un exemple d'algorithme particulièrement intéressant est donné par la compression d'images à de faibles débits : il s'agit non seulement d'une technologie très demandée par notre société de communication, mais aussi d'une application permettant de valider rapidement la pertinence de la formalisation mathématique.

Mes travaux commencent avec les bases d'ondelettes orthogonales développées par I. Daubechies et Y. Meyer, qui offrent une alternative séduisante à la représentation trigonométrique classique par la base de Fourier. Avec A. Cohen, je montre qu'une représentation par ondelettes à support compact est supérieure à celle par Fourier pour l'opération d'échantillonnage. Ce travail aboutit à la mise au point du premier algorithme de compression d'images par ondelettes. Par la suite, je cherche à structurer géométriquement les primitives données par les coefficients en ondelettes, de manière à dégager l'information pertinente pour la perception visuelle et, dans le cadre de la compression, à réduire les corrélations spatiales et inter-échelles. J'utilise la représentation par maxima locaux du module d'une transformée en ondelettes dyadiques, due à S. Mallat et S. Zhong. Avec S. Mallat, je propose une représentation mixte basée sur les maxima locaux pour extraire l'information géométrique de contour, et sur une base d'ondelettes pour caractériser l'information résiduelle, laquelle à l'apparence de microtextures. Cette nouvelle approche me permet de réaliser un algorithme de compression structurant l'information contenue dans les images naturelles.

Si la théorie des ondelettes améliore de manière sensible les représentations harmoniques classiques, j'en arrive à conclure qu'elle ne peut donner une approximation de la géométrie dépourvue d'artefacts, lorsqu'on ne conserve qu'un nombre très réduit de primitives. Par la suite, je m'intéresse ainsi à des représentations géométriques qui ne dérivent pas de l'analyse harmonique. Dans un premier temps, il s'agit d'approfondir la "grammaire de la vision" proposée par l'école gestaltiste et qui se donne pour but la formalisation géométrique de la perception visuelle, à travers l'interprétation de figures simples. Avec J-P. D'Alès et J-M. Morel, je propose une relecture et une simplification des principes gestaltistes dans le cadre du traitement des images. Des expériences menées avec S. Masnou et J-M. Morel montrent comment les primitives qui servent à la reconstruction visuelle dans le cas de figures simples se retrouvent dans le cas des images naturelles, sous la forme de lignes de niveau. Ces travaux, qui s'ajoutent à ceux de V. Caselles, B. Coll, J-M. Morel et C. Sbert, m'amènent à proposer un modèle morphologique et compact, basé sur les lignes de niveau perceptuellement significatives. Le modèle utilise la variation totale et il suppose toute image naturelle comme somme d'une fonction à variation bornée, qui contient l'information géométrique, et d'une fonction à variation non bornée, laquelle supporte les microtextures. Je montre qu'une représentation mixte par des primitives géométriques (pour la composante à variation bornée) et par ondelettes (pour la composante à variation non bornée) offre une alternative intéressante aux représentations entièrement harmoniques. Ces avantages sont exploités pour définir une méthode de compression respectueuse du système visuel.

En parallèle à ces travaux, je crée un logiciel de traitement d'images libre et ouvert, MegaWave1 puis MegaWave2 qui, grâce à l'apport de nombreux collaborateurs, participe à la reproductibilité de la recherche. MegaWave2 est reconnu par une centaine d'universités et de centres de recherches.

Présentation des travaux de recherche 1990-1999

Jacques Froment
Maître de Conférence 1ère classe (section 26)
UFR Mathématiques et Informatique
Université Paris V René Descartes
45 rue des Saints Pères
75270 Paris cedex 06
`Jacques.Froment@math-info.univ-paris5.fr`
`http://www.math-info.univ-paris5.fr/~jf`

1 Introduction

Mes travaux de recherche portent sur l'application des mathématiques au traitement numérique des images.

Le problème auquel j'essaye d'apporter quelques contributions, peut être formulé en toute généralité de la manière suivante : d'après la théorie du *gestaltisme géométrique* [Kan1][Wer], chez l'homme la reconstruction visuelle permet, à partir d'une image formée sur la rétine, la détection et la caractérisation élémentaire des différents objets présents dans le champ visuel [1]. Ce processus primaire de constitution des objets est à distinguer de celui, secondaire, de la reconnaissance des objets présents dans l'image. Si l'activité de reconnaissance nécessite une certaine "intelligence", de nombreux éléments portent à croire que la reconstruction visuelle s'effectue de manière purement automatique [20]. Il est donc probable que la reconstruction puisse être simulée par des algorithmes assez simples et rapides. Ce problème aurait dû être résolu par la discipline nommée *Computer vision* (vision par ordinateur) [Marr], qui promettait beaucoup lors de sa naissance dans les années 1970 [2]. Malgré des avancées indéniables, le robot qui trouverait son chemin tout seul par la seule analyse des images fournies par ses caméras embarquées appartient encore à l'univers de la science-fiction. Dans cet échec relatif, la difficulté de simuler le processus de reconnaissance n'est pas seule en cause : les primitives de base, qui relèvent de la reconstruction visuelle (comme les silhouettes ou contours des objets), ne sont pas calculées, ou même définies, de manière fiable et robuste. Pourquoi en est-il ainsi ? Il semblerait que la nature de l'information pertinente contenue dans les images n'ait pas été correctement appréhendée. Le traitement des images s'est sans doute, dans un premier temps, trop inspiré des méthodes mathématiques qui fonctionnent bien en traitement du signal, essentiellement la théorie du filtrage linéaire. Par la suite, les chercheurs en *Computer vision* se seraient attachés à améliorer les algorithmes, sans remettre fondamentalement (et consciemment) en cause les premiers modèles mathématiques.

Le programme auquel je convie le lecteur à adhérer est le suivant :

- suivre la démarche gestaltiste et l'adapter aux images numériques, de manière à définir correctement les primitives de la reconstruction visuelle simulée [1][2];
- choisir des modèles, définir des représentations mathématiques associées et étudier leurs propriétés [4][3] [7][12][13][15][16][18][19][21];
- en déduire les algorithmes d'extraction des primitives et des algorithmes pour des applica-

1. Les références bibliographiques sont indiquées par des lettres désignant les initiales des auteurs lorsqu'elles se rapportent à la bibliographie générale (donnée page 35) et par un numéro lorsqu'elles se rapportent à ma liste de publication (page 39).

2. On pourrait dater la naissance de la *Computer vision* - et des ses illusions - en 1966, lorsque Marvin Minsky demanda à un étudiant en première année au MIT d'écrire un programme décrivant les objets présents dans les images naturelles . . . en un été [Cre] !

tions finales (nous verrons que la compression est une application permettant de tester la pertinence de la représentation) [4][3] [7][12][13][16][19][21];
- implémenter ces algorithmes et les expérimenter sur des images réelles, afin de valider les représentations et d'initier une rétroaction permettant d'améliorer la modélisation [5][6][8][14][17][21].

Bien entendu, ce programme n'a vu le jour que petit-à-petit, car en recherche on avance souvent à tâtons, et s'est en mesurant le chemin parcouru qu'on en comprend le dessein. Bien sûr, ce programme est l'œuvre non pas d'une mais de nombreuses personnes, dont la plupart des noms apparaîtra dans les pages qui suivent. A ce stade je souhaiterais cependant citer le nom d'une seule personne, Jean-Michel Morel, qui en ayant mis en germe la plupart de ces idées, a rendu possible cette aventure.

1.1 Parcours scientifique

Les travaux que je présente dans ce mémoire sont également bien expliqués par mon parcours scientifique.

Ma thèse [21], soutenue au Ceremade (Université Paris 9) en 1990, fait suite à la décision de Jean-Michel Morel en 1988 de créer une activité en traitement des images. Avec les encouragements de Pierre-Louis Lions et l'arrivée d'Yves Meyer et de ses élèves, la situation est alors exaltante sur le plan mathématique. Elle est par contre minimale en informatique (une station de travail non connectée à Internet, avec pour seul logiciel un compilateur C). Je développe en conséquence mes recherches suivant deux directions :

- la théorie des ondelettes d'Yves Meyer [Me1] promet de belles applications en traitement du signal et des images; je me propose d'en explorer quelques-unes comme la compression d'images par ondelettes orthogonales [15][18][20][21];
- pour expérimenter les algorithmes, il est nécessaire de disposer d'un environnement informatique de développement orienté traitement des images. Je crée l'environnement MegaWave (ultérieurement renommé MegaWave1) [14][17], ancêtre de l'actuel logiciel MegaWave2 [5].

En 1990 et pour un an, je suis invité par Robert Hummel et Stéphane Mallat sur un poste d'*associate research scientist* au *Courant Institute of Mathematical Sciences* (New York University). Après avoir explorer avec Robert Hummel la possibilité de substituer la transformée en ondelettes à la transformée de Fourier dans les problèmes de tomographie (inversion de la transformée de Radon), je m'intéresse aux travaux de Stéphane Mallat et de l'un de ses élèves [MZ] sur les maxima en ondelettes. Ces travaux m'interpellent car ils répondent au problème que je me posais à la fin de ma thèse, de caractérisation de l'information de contours à l'aide de coefficients en ondelettes. Nous en déduisons une nouvelle représentation des images bien adaptée à la compression [7][13][16][19].

Depuis 1991, je suis Maître de Conférence à l'UFR Mathématiques et Informatique de l'Université Paris 5, où je participe au coencadrement de plusieurs étudiants en thèse. De 1991 à 1995, je suis responsable d'un enseignement de traitement mathématique du signal dans le DEA *Mathématiques, Informatique et Applications aux Sciences de l'Homme*. Je recrute un étudiant en thèse (Eddy Thésée) issu de ce DEA dans le cadre d'un contrat de recherche avec l'Institut Français du Pétrole dont je suis le responsable scientifique. Cette étude sur la compression et l'analyse d'un signal de forage par des techniques d'ondelettes débouche sur le dépôt de deux brevets européens [10] [11] en 1995 et d'un brevet aux États-Unis [9] en 1996. De 1995 à 1998, je participe à deux contrats européens dont l'objectif est l'expertise des principaux algorithmes de compression d'image du domaine de la recherche [8] [6]. Le logiciel de compression d'image

WCP que je développe pour cette étude en collaboration avec un doctorant (Jean-Pierre d'Alès), fait l'objet d'un dépôt de Copyright par la Commission des Communautés Européennes. La création dans mon UFR de l'équipe PRISME (PRobabilités, Images et Signaux MEdicaux) en 1996 par Christine Graffigne favorise une dynamique entre les mathématiciens et les médecins de mon université : depuis 1998, une collaboration est engagée avec André Bonnin et Vincent Hazebroucq de l'hôpital Cochin sur la télémédecine et notamment sur la compression par ondelettes d'images de mammographie (coencadrement avec Christine Graffigne d'une étudiante en thèse, Latifa Yamouni). L'arrivée de Bernard Ycart devrait permettre une jonction profitable entre les deux grands thèmes de l'équipe, probabilités et images, notamment autour d'un projet sur les méthodes particulaires dans la résolution des problèmes variationnels en traitement des images. Un contrat de recherche vient d'être signé avec le CEA sur le débruitage et la reconstruction paramétrique d'une radiographie. D'une durée de trois ans, ce contrat prévoit le recrutement d'un étudiant en thèse pour l'année 2000.

En parallèle, je poursuis une fructueuse collaboration avec l'équipe de traitement des images dirigée par Jean-Michel Morel au Ceremade puis au CMLA de l'ENS Cachan. L'accroissement de la taille de cette équipe et notre volonté de diffuser nos algorithmes sous la forme de publication logicielle, m'ont conduit à développer à partir de 1993 un nouvel ensemble logiciel, MegaWave2 [5]. C'est également dans le cadre de cette équipe que je travaille sur le gestaltisme appliqué aux images numériques [1][2] puis sur une modélisation morphologique des images naturelles [4] [3].

1.2 Modèles et représentations des images numériques et application à la compression

Dès le début de la *Computer Vision*, se pose le problème du choix d'un modèle mathématique et de la définition d'une représentation adaptée à la caractérisation de l'information pertinente contenue dans les images numériques. Entre autres propriétés recherchées, la représentation devrait pouvoir conduire à une structure de données sous forme de primitives non redondantes, facilement calculables à l'aide d'algorithmes (étape d'analyse), telle que l'ensemble de ces primitives permette la reconstruction de l'image originale (étape de synthèse) et telle que l'on puisse les ordonner de manière à reconstruire une image proche de l'originale avec seulement un petit échantillon d'entre elles (cette opération d'échantillonnage permet un codage progressif). Les primitives les plus représentatives ont alors vocation à servir de données à la plupart des algorithmes d'analyse d'images. Un cadre général, dont nous verrons des exemples à la section 2, est donné par les bases ou plus généralement par les *frames* d'un espace fonctionnel H. Le modèle consiste alors simplement à supposer toute image analogique f comme un élément de H et sa représentation est donnée par la suite des coefficients de f rapportés à la base ou au *frame* préalablement fixé. Les primitives de f sont ces coefficients tandis que les atomes de la représentation sont les fonctions de la base ou du *frame*. Pour être utilisable avec des vues naturelles prises dans des conditions variables, la représentation doit posséder des propriétés d'invariance[3]. Par exemple, les propriétés d'invariance par translation, par rotation et par symétrie traduisent les incertitudes sur la position de la caméra; la propriété d'invariance par changement d'échelle est relative au zoom, celle d'invariance par changement de contraste à l'éclairage de la scène et aux caractéristiques du capteur.

La compression d'images est un exemple d'utilisation de ces représentations qui me paraît particulièrement intéressant. C'est un sujet passionnant à lui seul, de par l'importance des applications industrielles. Mais c'est aussi un excellent moyen pour tester la pertinence de la représen-

3. La propriété d'invariance de la représentation $\mathcal{R}$ d'une image f par une transformation $\mathcal{T}$ signifie que ces opérateurs commutent : $\mathcal{R}(\mathcal{T}(f)) = \mathcal{T}(\mathcal{R}(f))$.

tation : un algorithme de compression sera efficace si les primitives les plus représentatives (que l'on code pour obtenir la compression) sont effectivement non-redondantes (et non-corrélées) et respectueuses du système visuel.

Une des premières représentations, proposée par David Marr [Marr] à la fin des années 1970, est toujours d'actualité car elle est utilisée dans de nombreux procédés de traitement. Le *raw primal sketch* (ou "représentation bas niveau") de D. Marr est basé sur la détection des changements d'intensité lumineuse, en repérant les passages par zéro de l'image filtrée par le laplacien de la gaussienne à une échelle donnée [MH] [20]. En captant les discontinuités de l'intensité, ces primitives sont supposées représenter les contours des objets présents dans l'image. En fait la réalité est légèrement différente : la notion de bord ou de contour visuel ne possède pas de définition intrinsèque, et c'est donc la représentation qui définit la notion perceptuelle de contours.

Les conditions de complétude, de stabilité, de codage progressif et de non redondance de la représentation atomique sont naturellement vérifiées lorsque les primitives peuvent s'écrire sous la forme de coordonnées dans une base hilbertienne. De plus, on dispose alors d'outils mathématiques puissants pour analyser les propriétés de la représentation. Les exponentielles complexes de la base de Fourier et ses variantes comme les fonctions cosinus, forment une classe d'atomes largement utilisée en traitement des images. Une telle représentation trigonométrique est à la base du standard actuel (dans l'industrie) pour la compression des images, JPEG [Wal] bientôt remplacé par JPEG 2000 [J2]. Elle doit son succès non seulement de par l'interprétation fréquencielle de ses primitives (permettant d'adapter la représentation à la sensibilité visuelle humaine) mais aussi de par son comportement optimal dans le cadre des signaux stationnaires.

La représentation trigonométrique souffre cependant d'un grave défaut, que des astuces algorithmiques (telle le fenêtrage implémenté dans JPEG) n'éliminent pas complètement : les atomes, parfaitement localisés dans le domaine fréquenciel, ne possèdent aucune localisation spatiale. En conséquence, on ne peut associer aucune structure géométrique (comme les contours des objets) aux primitives de la représentation, ce qui empêche toute interprétation visuelle. D'autre part, lorsque seuls les atomes les plus représentatifs sont considérés (ce qui est naturellement le cas avec la compression), les fonctions trigonométriques manquantes créent des artefacts globaux qui sont extrêmement gênants sur le plan visuel (et ceci bien que leurs contributions puissent être de norme l^2 faible).

Ces remarques m'ont conduit à considérer les bases d'ondelettes orthogonales [Me1] comme une alternative à la représentation trigonométrique particulièrement intéressante. Les ondelettes possèdent une bonne localisation simultanément dans le domaine fréquenciel et dans le domaine spatial : elles réalisent ce que l'on appelle une analyse temps-échelle du signal [4]. J'ai d'abord montré, avec Albert Cohen [15], qu'une représentation par bases d'ondelettes orthogonales à support compact [Daub] est aussi performante que la représentation trigonométrique pour l'opération d'échantillonnage des signaux stationnaires. Ce travail complète des résultats plus théoriques présentés (avec Albert Cohen et Jacques Istas) dans [18], et il propose une première application à la compression d'images (laquelle est développée dans [21]). Dans le cas des signaux présentant des transitoires (non-stationnarités, ce qui est le cas de toutes images comportant des contours), le comportement de la représentation par base d'ondelettes est naturellement meilleur que celui de la représentation trigonométrique, car les fluctuations des atomes au voisinage des singularités sont mieux localisées spatialement.

Dans l'utilisation d'une représentation pour la compression des images, l'idée principale consiste

4. Le temps fait référence à l'analyse de signaux unidimensionnels; dans le cadre des images, il s'agit du plan ou domaine spatial et il conviendrait d'utiliser le terme "espace-échelle". On emploie le terme d'échelle, laquelle est un paramètre inversement proportionnel à la fréquence, pour signifier que les différentes ondelettes sont obtenues à partir d'une ondelette "mère" en effectuant (entre autre) une dilatation dont le paramètre a valeur d'échelle.

à échantillonner les primitives pour ne conserver que les plus importantes, puis à les coder [YE]. Lorsque la représentation consiste en une base hilbertienne, les primitives sont des coefficients (les coordonnées) qui ne possèdent apparemment pas de structure géométrique, ce qui est un inconvénient car on ne sait alors pas relier la représentation aux structures visuelles. L'algorithme de compression par ondelettes proposé dans [21] privilégie effectivement les coefficients de valeur absolue élevée; on remarque alors que ces coefficients possèdent une double corrélation, spatiale et inter-échelle, car ils se situent le long des lignes de discontinuités de l'image à l'échelle considérée, c'est-à-dire à l'emplacement des contours multiéchelles tels qu'ils sont définis par D. Marr. Il est alors tentant de structurer ces coefficients en courbes, de manière à gagner en taux de compression (par réduction des corrélations spatiales et inter-échelles) et à remplacer les primitives "coefficients" par les primitives géométriques "courbes de coefficients".

S. Mallat et S. Zhong proposent dans [MZ] une méthode où les contours multiéchelles de D. Marr sont détectés à l'aide d'une transformée en ondelettes. Pour un certain type d'ondelettes, les maxima locaux du module de la transformée se situent à l'emplacement des contours multiéchelles. Cette approche répond au problème du calcul de primitives géométriques par courbes de coefficients, mais elle abandonne le cadre des bases orthonormées (les coefficients échantillonnés ne font plus partie d'une base mais de ce que l'on pourrait qualifier de "*frame* continu"). En contre-partie, la représentation gagne en invariance par translation. Avec S. Mallat, j'étudie dans [7] [13] [16] [19] l'application à la compression des images d'une représentation par ondelettes utilisant à la fois la base orthonormée et les maxima locaux. L'idée consiste à utiliser la représentation par maxima locaux pour extraire et caractériser l'information géométrique de contour (le *sketch*) puis à se servir d'une base d'ondelettes pour caractériser l'information résiduelle, laquelle correspond visuellement à des microtextures. Cette représentation mixte permet d'atteindre des taux de compression élévés tout en conservant une image bien texturée. Il faut cependant noter que, pour ces taux de compression élevés, des artefacts apparaissent au voisinage des contours, sous la forme de structures oscillantes. Ce phénomène est semblable, quoique d'intensité moindre, au phénomène de Gibbs provoqué par l'échantillonnage des coefficients de Fourier d'un signal comportant des singularités.

De ces recherches sur ces représentations que je qualifierais d'harmoniques (au sens où les atomes possèdent une certaine localisation fréquencielle), je dégagerais les conclusions suivantes :

- la théorie des ondelettes améliore de manière sensible les représentations harmoniques précédentes. Par exemple, la compression par bases d'ondelettes donne de meilleurs résultats que JPEG (la norme JPEG 2000 [J2] en préparation remplace la base en cosinus par des bases d'ondelettes); les maxima locaux permettent une meilleure caractérisation théorique des contours multiéchelles de D. Marr et ils conduisent à une représentation plus stable autorisant une reconstruction de qualité;
- les ondelettes ne peuvent cependant pas donner une approximation de structures géométriques (tels que les contours) dépourvue d'artefacts lorsque l'on ne conserve qu'un nombre très réduit de coefficients. Cette remarque illustre une déficience des modèles basés sur l'espace de Hilbert L^2 qui utilisent une norme d'erreur quadratique, bien pratique sur le plan mathématique mais non représentative de la perception visuelle. Il me paraît donc souhaitable d'abandonner les représentations harmoniques dans la caractérisation des structures géométriques. Les ondelettes restent par contre bien adaptées pour représenter des signaux quasi-stationnaires ou transitoires sans structure géométrique particulière (comme les microtextures).

Par la suite, je m'intéresse ainsi à des représentations géométriques qui ne dérivent pas de l'analyse harmonique. Dans un premier temps, il s'agit d'approfondir la "grammaire de la vision" [Kan1] proposée par l'école gestaltiste et déjà évoquée dans [20]. Cette école, née dans les années

1920, se donne pour but la formalisation de la perception visuelle. Pour ce faire, elle a developpé une méthode expérimentale originale basée sur l'interprétation de figures simples. Les gestaltistes arrivent à la conclusion qu'un petit nombre de principes organisateurs permet d'expliquer les résultats de la reconstruction visuelle. Curieusement, le gestaltisme géométrique ne survivra pas à l'avènement de la *Computer Vision*, laquelle considère inutilisable la théorie gestaltiste (voir par exemple la présentation qui en est faite dans [Marr]). Pourtant dans les années 1960, "l'école de Fontainebleau" redécouvre une propriété essentielle de la vision humaine formulée dès 1923 par M. Wertheimer [Wer], un des fondateurs du gestaltisme géométrique : la reconnaissance des objets est indépendante de leur couleur ou de leur luminosité. Georges Matheron [Math] et Jean Serra [Ser], de l'École des Mines de Fontainebleau, en déduisent que les méthodes de traitement des images ne doivent pas dépendre de l'échelle arbitraire selon laquelle la luminosité est mesurée : c'est le principe d'invariance par changement de contraste. Ce principe, ainsi qu'un certain nombre d'autres, les amène à définir des opérateurs de traitement des images qui sont à l'origine de la morphologie mathématique. La discipline ne traite cependant pas le problème de la modélisation des images par des primitives permettant la reconstruction visuelle.

Pour aborder ce problème, j'étudie avec Jean-Pierre D'Alès et Jean-Michel Morel l'approche gestaltiste sous l'angle du traitement des images. Dans [2], nous proposons une relecture et une simplification des principes gestaltistes les plus importants. Nous montrons comment ces principes se déduisent d'un principe plus abstrait et plus mathématisable de généricité. Avec Simon Masnou et Jean-Michel Morel [1], je présente des expériences qui indiquent que les primitives de base qui servent à la reconstruction visuelle dans le cas des figures simples (comme les traits ou les courbes) se retrouvent dans le cas des images complexes à niveau de gris, sous la forme de lignes de niveau. Les lignes de niveau sont les frontières des ensembles de niveau, lesquels sont définis comme les ensembles de points au-dessus (ou en-dessous) d'une valeur donnée. Ces ensembles forment une représentation complète de l'image, invariante par opérateur affine et par changement de contraste. De plus, certaines lignes de niveau coïncident avec la perception des contours d'un objet et dans une image naturelle, tout contour génère des lignes de niveau.

Une représentation morphologique, c'est-à-dire basée sur les ensembles de niveau, permettrait ainsi de structurer l'information contenue dans les images naturelles, en des primitives géométriques qui seraient à l'origine de la reconstruction visuelle. Mais la description sous forme d'ensembles de niveau étant très redondante, il faut des critères pour définir quels sont les ensembles les plus importants pour la perception, et il faut être capable de reconstituer les ensembles manquants sans création d'artefacts. En utilisant les travaux de Vicent Caselles, Tomeu Coll et Jean-Michel Morel [CCM1] [CCM2] ainsi que ceux de Vicent Caselles, Jean-Michel Morel et Catalina Sbert [CMS], je propose dans [4] et, sous une forme multiéchelle dans [3], une telle représentation morphologique et compacte. Le principe est de caractériser l'information géométrique par les lignes de niveau qui participent à la perception des principaux contours, et d'en déduire une approximation par une fonction régulière par morceaux et non oscillante, le *sketch*. L'information résiduelle est essentiellement composée de microtextures, elle correspond à la partie oscillante de l'image. En utilisant la variation totale, je montre dans [4] que la représentation discrète en sketch et en microtextures peut être interprétée dans le cadre analogique comme une caractérisation mathématique des microtextures : elles sont localisées dans les régions qui possèdent des structures très oscillantes à toutes les échelles, de telle sorte que l'image restreinte à ces parties ne soit pas à variation bornée. Le modèle basé sur la variation totale, qui suppose toute image naturelle somme d'une fonction à variation bornée avec une fonction qui n'est pas à variation bornée, permet ainsi de définir les notions perceptuelles de contours et de microtextures suivant le même fil directeur que celui que j'ai suivi avec Stéphane Mallat pour proposer la représentation mixte "base othonormée - maxima locaux". Le modèle morphologique offre cependant un certain nombre d'avantages :

- les contours morphologiques vérifient, comme les contours visuels, la propriété d'invariance par changement de contraste, ce qui n'est pas le cas des contours multiéchelles de D. Marr;
- la caractérisation des contours morphologiques ne fait pas appel à une décomposition fréquencielle : l'information peut donc être dégradée sans apparition d'artefacts non-locaux, les phénomènes de Gibbs;
- en considérant la variation totale, les microtextures peuvent être définies autrement que par "ce qui ne participe pas au *sketch*". Une conséquence pratique est que l'information qui ne participe ni au *sketch* ni aux microtextures peut être simplement oubliée, sans dégradation visuelle de l'image.

Ces avantages sont exploités dans [4] et [3] pour définir une méthode de compression morphologique. Les images ainsi comprimées voient disparaître ou modifier certains détails (comme des petites formes), mais il n'y a pas création d'artefacts visuels : l'image dégradée est plausible.

Ce constat n'autorise pas à considérer la compression morphologique comme supérieure à celle basée sur les représentations par ondelettes. Bien que dans [3] je présente une expérience où les performances de la compression morphologique sont effectivement meilleures que celles de l'algorithme EZW [Sha] qui fait référence en matière de compression par base d'ondelettes, de nombreuses autres expériences devront être menées avant d'aboutir à une conclusion objective. Je me permettrais néammoins de livrer un sentiment subjectif : l'algorithme de compression par base d'ondelettes "naïf" que j'avais écrit dans [21] aux résultats proches du mature JPEG laissait entrevoir un bel avenir pour les représentations par ondelettes. De même, la jeunesse de l'algorithme de compression morphologique est un atout non négligeable. Enfin, remarquons que la compression EZW est un cas particulier de la compression morphologique (où la variation totale du *sketch* est nulle) et on peut donc toujours s'arranger pour obtenir des résultats aussi bon que ceux fournis par EZW ...

2 Représentations harmoniques

Nous nous plaçons dans le cadre de l'espace de Hilbert $L^2([0,1]^2)$ muni de son produit scalaire $<,>$ et nous notons par $f \in L^2([0,1]^2)$ une image d'énergie finie sur le carré $[0,1]\times[0,1]$. Etant donnée une suite de fonctions $(e_{n,m})_{n,m\in\mathbb{Z}}$ de $L^2([0,1]^2)$, dont nous supposerons une certaine localisation fréquencielle, nous définissons une tranformation linéaire $\mathcal{T}$ en posant

$$\forall f \in L^2([0,1]^2), \forall n,m \in \mathbb{Z},\ \mathcal{T}_f(n,m) = < f, e_{n,m} > . \tag{1}$$

Les coefficients $(< f, e_{n,m} >)_{n,m\in\mathbb{Z}}$ constituent une représentation complète de l'image f lorsque les vecteurs $(e_{n,m})_{n,m\in\mathbb{Z}}$ forment un *frame* de $L^2([0,1]^2)$, c-à-d. lorsque la condition de stabilité suivante est vérifiée [Ma3]

$$\exists A, B > 0 \,/\, \forall f \in L^2([0,1]^2),\ \ A||f||^2 \le \sum_{n,m\in\mathbb{Z}} | < f, e_{n,m} > |^2 \le B||f||^2. \tag{2}$$

En effet, il existe un *frame* dual $(\tilde{e}_{n,m})_{n,m\in\mathbb{Z}}$ avec la formule de reconstruction

$$f = \sum_{n,m\in\mathbb{Z}} < f, e_{n,m} > \tilde{e}_{n,m} = \sum_{n,m\in\mathbb{Z}} < f, \tilde{e}_{n,m} > e_{n,m}. \tag{3}$$

Lorsque $A = B$, on a simplement $\tilde{e}_{n,m} = \frac{1}{A} e_{n,m}$.

Une représentation dont les primitives sont constituées par les coefficients de l'image dans un *frame* vérifie ainsi les propriétés de complétude (synthèse) et de stabilité, mais pas nécessairement de non-redondance et de décorrélation. La non-redondance s'exprime par l'indépendance linéaire des vecteurs $(e_{n,m})_{n,m\in\mathbb{Z}}$, on obtient alors une base de Riesz et le couple $((e_{n,m})_{n,m\in\mathbb{Z}}),((\tilde{e}_{n,m})_{n,m\in\mathbb{Z}})$ forme une base biorthogonale de $L^2([0,1]^2)$. La base orthonormée correspond au cas particulier $A=B=1$ avec la normalisation $||e_{n,m}||=1$.

Pour traduire la décorrélation des coefficients, nous nous plaçons dans un cadre stochastique : on suppose que l'intensité lumineuse $f(x,y)$ est une variable aléatoire et on note par $R((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = E(f(x_1,y_1)f(x_2,y_2))$ la fonction d'autocorrélation du processus f. Il existe une base $(k_{n,m})_{n,m\in\mathbb{Z}}$ qui décorrèle les coefficients et elle est caractérisée par la propriété suivante [VK][RK][YE] (voir aussi [20])

$$\forall (x_1,y_1)\in]0,1[^2,\ \int_{[0,1]^2} R((x_1,y_1),(x_2,y_2))k_{n,m}(x_2,y_2)\,dx_2dy_2 \ =\ \sigma_{n,m}^2 k_{n,m}(x_1,y_1) \qquad (4)$$

où $\sigma_{n,m}^2 = E(|<f,k_{n,m}>|^2)$ est la variance des coefficients. La transformation $\mathcal{T}$ associée à cette base s'appelle la transformée de Karhunen-Loève. Dans le cas général, il n'existe ni forme explicite pour les fonctions propres $(k_{n,m})_{n,m\in\mathbb{Z}}$, ni algorithme rapide permettant de les calculer dans le cas discret.

La "compacité" d'une représentation est liée à la décorrélation de ces coefficients. En effet, dans le cadre du codage, les algorithmes tel celui de Huffman [VK][RK] supposent les données décorrélées et ils permettent alors un débit proche de celui de l'entropie, laquelle est, d'après la théorie de l'information de Shannon, la valeur minimale pour une compression sans perte. D'autre part, la représentation de l'image par un nombre nécessairement limité de coefficients $<f,e_{n,m}>$ implique une opération d'échantillonnage ou d'approximation. L'approximation linéaire consiste simplement à tronquer la série (3) pour ne retenir que les N^2 premiers termes, soit dans le cas des bases orthonormées

$$f_{N^2}(x,y) = \sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{N-1} <f,e_{n,m}>e_{n,m}(x,y). \qquad (5)$$

Il est facile de montrer que l'erreur quadratique moyenne de cette approximation vérifie

$$\varepsilon_{N^2} := E(||f-f_{N^2}||^2) = \sum_{n,m\geq N} E(|<f,e_{n,m}>|^2) \qquad (6)$$

et elle est minimale pour tout N lorsque la base est celle de Karhunen-Loève.

2.1 Base de Fourier

La base de Fourier est une base orthonormée donnée par les exponentielles complexes

$$e_{n,m}(x,y) = e^{2i\pi(nx+my)}. \qquad (7)$$

C'est une représentation largement utilisée depuis les débuts de la *Computer Vision*, essentiellement à cause des propriétés suivantes :

- l'interprétation fréquencielle des coefficients permet des ajustements avec le système visuel (par exemple, l'algorithme de compression JPEG [Wal] quantifie plus finement les coefficients dans les bandes fréquencielles pour lesquelles la vision est la plus sensible);
- un algorithme rapide de décomposition existe, la FFT [VK].

– sous des hypothèses de régularité et de stationnarité, la représentation offre une bonne "compacité".

Développons plus particulièrement ce dernier point. Nous savons que la décroissance de la suite des coefficients de Fourier est liée à la régularité de f. Dans le cadre déterministe, l'erreur quadratique d'échantillonnage $||f - f_{N^2}||^2$ sera donc d'autant plus faible que l'image sera bien régulière. Dans le cadre stochastique, supposons le processus f stationnaire au sens où sa fonction d'autocorrélation R ne dépende que des longueurs $x = x_1 - x_2$ et $y = y_1 - y_2$. Nous supposons également le processus périodique en moyenne quadratique, c-à-d. $R(x, y) = R(x + 1, y) = R(x, y+1)$. Alors, la base $(k_{n,m})_{n,m\in\mathbb{Z}}$ de Karhunen-Loève est donnée par celle de Fourier [Pap].

Dans la pratique, les bonnes propriétés de la base de Fourier sont à relativiser car une image naturelle n'est ni régulière ni la réalisation d'un processus stationnaire. Ces hypothèses ne sont cependant pas absurdes localement, dans de petits voisinages n'incluant pas de contours. C'est ainsi que la plupart des algorithmes basés sur la représentation trigonométrique (tel JPEG) utilisent un fenêtrage, en divisant le plan de l'image $[0, 1] \times [0, 1]$ en de petits carrés. Cette astuce, ainsi que celle qui consiste à utiliser la transformée en cosinus plutôt que la transformée de Fourier afin de diminuer les erreurs aux bords des carrés, améliorent les résultats numériques sans pour autant éliminer tous les artefacts [21].

Dans le cadre stationnaire, une approximation classique de la fonction d'autocorrélation, issue des travaux sur les images télévisées [RK], est donnée par

$$R((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = e^{-(|x_1-x_2|+|y_1-y_2|)}. \tag{8}$$

En utilisant cette fonction d'autocorrélation, j'ai obtenu avec Albert Cohen dans [15] une estimation de l'erreur quadratique moyenne asymptotique d'échantillonnage :

$$\varepsilon_{N^2} \sim 2\frac{4 - \frac{2}{e}}{\pi^2}\frac{1}{N}, \tag{9}$$

lorsque $N \to +\infty$, N^2 désignant le nombre d'échantillons réels distincts.

2.2 Bases d'ondelettes

En 1985 et suite aux travaux de Littlewood-Paley (1930) et de Grossmann-Morlet (1980), Yves Meyer construit une base orthonormée $(\psi_k^j)_{j,k\in\mathbb{Z}}$ de $L^2(\mathbb{R})$ dont les fonctions sont obtenues par translation et dilatation d'une ondelette mère ψ possédant une bonne localisation en temps et en fréquence :

$$\psi_k^j(x) = 2^{j/2}\psi(2^j x - k). \tag{10}$$

L'année suivante, Stéphane Mallat [Ma2] et Yves Meyer [Me1] montrent que de telles bases peuvent être obtenues à partir de la notion d'analyse multirésolution, qui définit des espaces d'approximation V_j à la résolution 2^j. Chaque espace V_j est caractérisé par une base $(\phi_k^j)_{k\in\mathbb{Z}}$ dont les fonctions sont obtenues à partir d'une fonction d'échelle ϕ suivant le même schéma que pour les fonctions ψ_k^j :

$$\phi_k^j(x) = 2^{j/2}\phi(2^j x - k). \tag{11}$$

L'approximation d'un signal $s \in L^2(\mathbb{R})$ à la résolution 2^j est obtenue par sa projection orthogonale sur l'espace V_j, elle est donc caractérisée par la suite de coefficients $(< s, \phi_k^j >_k)$:

$$s_{V_j}(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} < s, \phi_k^j > \phi_k^j(x). \tag{12}$$

Les détails à rajouter pour passer de la résolution 2^j à celle immédiatement supérieure 2^{j+1} sont calculés à l'aide des ondelettes ψ_k^j lesquelles apparaissent, pour j fixé, comme les bases des espaces de détails W_j définis par $V_{j+1} = V_j \bigoplus W_j$. Les détails du signal s à la résolution 2^{j+1} sont définis par la projection orthogonale de s sur W_j

$$s_{W_j}(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} < s, \psi_k^j > \psi_k^j(x), \tag{13}$$

et ils sont donc caractérisés par la suite de coefficients en ondelettes $(< s, \psi_k^j >_k)$.

L'analyse par ondelettes d'un signal s consiste alors à déterminer les suites $(< s, \phi_k^j >_k)$ et $(< s, \psi_k^j >_k)$ pour différentes résolutions 2^j. S. Mallat propose dans [Ma1] un algorithme récursif permettant de les calculer de façon simple et rapide, suivant un schéma de décomposition en sous-bandes utilisant des paires de filtres conjugués en quadrature (CQF). Un schéma dual permet la reconstruction exacte du signal à partir des coefficients.

Dans le cadre de l'analyse d'image, on obtient facilement une analyse multirésolution de $L^2(\mathbb{R}^2)$ par produit tensoriel d'une analyse multirésolution de $L^2(\mathbb{R})$. Les fonctions d'échelle à deux variables sont obtenus à partir de celles à une variable par

$$\phi_{n,m}^j(x, y) = \phi_n^j(x)\phi_m^j(y) \tag{14}$$

et on a trois familles d'ondelettes

$$\psi_{n,m}^j = (\phi_n^j(x)\psi_m^j(y), \psi_n^j(x)\phi_m^j(y), \psi_n^j(x)\psi_m^j(y)). \tag{15}$$

Le choix de bases d'ondelettes à support compact, construites par Ingrid Daubechies en 1987 [Daub] à partir de filtres CQF à réponse impulsionnelle finie, permet de s'affranchir en grande partie des problèmes de bords posés par l'analyse de l'image f sur le carré $[0, 1] \times [0, 1]$. C'est dans ce contexte que j'ai proposé avec Albert Cohen dans [15], l'utilisation de la représentation par base d'ondelettes pour une représentation compacte des images. Sous la statistique des images télévisées donnée par (8), nous avons montré que l'erreur quadratique moyenne dans l'approximation linéaire de l'image f par f_{V_j} vérifie

$$\varepsilon_{N^2} := E(||f - f_{V_j}||^2) \sim \frac{4}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{|\widehat{\psi}(\omega)|^2}{\omega^2} d\omega \, \frac{1}{N} \tag{16}$$

lorsque $N = 2^j \to +\infty$. Cette estimation que l'on compare avec (9), montre que la représentation par base d'ondelettes se comporte globalement aussi bien que la représentation trigonométrique dans l'échantillonnage par approximation linéaire de processus stationnaires, lequel est pourtant dans ce cas optimal. Ce résultat indique également que la régularité de l'ondelette ne joue aucun rôle, et que c'est la propriété de cancellation (annulation des moments jusqu'à un certain ordre) qui importe.

Cela est confirmé par une série de résultats plus théoriques, établis en collaboration avec Albert Cohen et Jacques Istas dans [18], dans le cadre des signaux $s \in L^2([0, 1])$ stationnaires : par exemple, si le degré de cancellation de l'ondelette est m et si la densité spectrale $P = \widehat{R}$ vérifie la propriété de régularité

$$|P(\omega)| \le c|\omega|^{-\alpha}, \tag{17}$$

alors

$$\varepsilon_N := E(||s - s_{V_j}||^2) \le cN^{-\alpha} \tag{18}$$

dès que $\alpha < 2m + 3$.

L'intérêt des ondelettes en traitement du signal et des images réside dans leur double localisation en temps et en fréquence, qui induit une meilleure analyse des phénomènes transitoires [Ma3][VK]. Hors du cadre stationnaire, l'approximation par la base trigonométrique est mauvaise et on s'attend à ce que l'approximation par base d'ondelettes surpasse alors nettement la première. Cette propriété, vérifiée empiriquement sur de nombreuses expériences (voir par exemple [21]), a été démontrée par Jean-Pierre D'Alès et Albert Cohen dans un travail qui complète notre approche précédente [CD] : lorsque le processus est stationnaire par morceaux (avec un nombre fini de discontinuités), une estimation du type (18) reste valable si on remplace l'approximation linéaire s_{V_j} par une approximation non linéaire, qui consiste à retenir les N plus grands coefficients en ondelettes (et non les N premiers). De plus, l'approximation non linéaire par la représentation trigonométrique ne permet alors pas une erreur aussi faible. Ces résultats ont été obtenus en considérant des bases d'ondelettes adaptées à l'intervalle [CDV], qui permettent d'éviter totalement les effets de bords. D'autres approches confirment les bonnes performances des méthodes d'approximation non linéaire basées sur les ondelettes. On consultera notamment la méthode de seuillage des coefficients proposée par D. Donoho et I. Johnstone pour des applications de restauration [DJ], ainsi que les études de R. DeVore, B. Jawerth et B.J. Lucier sur la décroissance des coefficients d'une image appartenant à un espace de Besov [DJL]. Récemment, A. Cohen, R. DeVore, P. Petrushev et H. Xu ont étudié certaines relations entre la décroissance des coefficients et l'espace BV des images à variations bornées [CDPX]. Comme nous le verrons à la section 3, cet espace joue un rôle important pour le traitement des images et ces premiers résultats sont donc très encourageants.

J'ai proposé dans [21] une méthode de compression des images basée sur une quantification scalaire des coefficients en ondelettes. Il s'agit d'une quantification adaptée, au sens où la loi de quantification et ses différents paramètres sont adaptés à la statistique des coefficients, à la sensibilité visuelle ainsi qu'à un calcul d'erreur quadratique. Notons qu'aux échelles les plus fines les coefficients sont tronqués, c'est-à-dire qu'on effectue l'approximation non linéaire décrite ci-dessus. La méthode permet une compression à des taux voisins de 8 à 10 avec une excellente qualité visuelle, semblable à celle obtenue avec la norme JPEG. Ces expériences montrent que la représentation par base d'ondelettes peut surpasser celle trigonométrique dans les applications de compression, pour peu que l'on optimise les méthodes de codage des coefficients (ce qui n'est pas fait dans [21], un simple codage entropique étant utilisé). Par la suite, d'autres algorithmes de compression sont proposés. Parmi les plus performants, notons l'algorithme EZW (Embedded Zerotrees Wavelet) de J. Shapiro [Sha] qui effectue un codage astucieux des coefficients tronqués grâce à un "arbre de zéros", ce qui permet d'exploiter la redondance à travers les échelles.

En 1992, Albert Cohen, Ingrid Daubechies et Jean-Christophe Feauveau contruisent dans [CDF] des bases d'ondelettes biorthogonales. Cette représentation remplace avantageusement les bases d'ondelettes orthonormées, car elle offre un choix d'ondelettes plus vaste et elle permet d'effectuer l'opération d'analyse et celle de synthèse en utilisant au mieux leurs propriétés. D'une part nous avons vu que la localisation spatiale permet de concentrer l'effet des singularités, comme les contours, sur un petit nombre de coefficients et que la cancellation permet d'obtenir de petits coefficients dans les zones homogènes. Ces deux propriétés sont donc importantes pour les ondelettes d'analyse. Pour la synthèse, la propriété importante est la régularité : on évite ainsi l'apparition de singularités artificielles, qui forment des artefacts très visibles (tels ceux générés par l'ondelette de Haar) [21]. D'autre part et sauf pour l'ondelette de Harr, on ne peut construire de bases orthogonales avec des ondelettes symétriques ou antisymétriques. Les primitives ne peuvent donc pas se calculer par filtrage avec un noyau réel à phase linéaire, ce qui induit des artefacts lors de l'opération de quantification [ABMD][VK]. Cette restriction est par contre levée avec les bases biorthogonales. Les bases d'ondelettes biorthogonales possèdent ainsi des qualités supplémentaires et elles n'amènent en retour aucun inconvénient : la perte de l'orthogonalité est compensée par la possibilité d'obtenir des bases quasi-orthogonales et les algorithmes développés pour les ondelettes orthogonales sont utilisables avec les ondelettes biorthogonales sans modification. Ceci explique l'abandon immédiat en traitement des images des ondelettes orthogonales au profit des ondelettes biorthogonales.

Dans le cadre d'une expertise commandée par la Communauté Européenne, j'ai participé avec Jean-Pierre D'Alès à l'implémentation et au test sur différentes banques d'images d'un algorithme de compression basé sur la représentation par ondelettes biorthogonales [6][8]. La méthode de codage est celle de l'algorithme EZW, et nous avons adapté les algorithmes au cas de la couleur. Avec l'aide d'autres centres de recherches européens, nous avons comparé les résultats avec ceux fournis par JPEG et par les meilleures méthodes de compression basées sur les fractales et sur la quantification vectorielle de coefficients en ondelettes. La compression par les ondelettes biorthogonales s'est avérée de loin la plus performante, la quantification vectorielle étant handicapée par des temps de calculs rédhibitoires.

2.3 Maxima en ondelettes

Les algorithmes de filtrage en sous-bandes utilisés dans les ondelettes orthonormales et biorthogonales possèdent une nature récursive, où on utilise l'approximation à la résolution supérieure 2^{j+1} pour calculer à l'aide d'un filtre passe-bas (donné par ϕ) la nouvelle approximation $< f, \phi^j_{n,m} >$ et, à l'aide d'un filtre passe-bande donné par ψ, les coefficients en ondelettes $< f, \psi^j_{n,m} >$. Après filtrage, ces suites sont échantillonnées un point sur deux. Cette opération de décimation correspond à un échantillonnage uniforme d'une transformée en ondelettes continue. Il en est ainsi de toute représentation en ondelettes dont les coefficients génèrent un *frame* [Ma3]. En conséquence, la représentation n'est pas invariante par translation entière mais seulement par translation par des multiples de 2^J où J est la profondeur de la décomposition. Ceci est un inconvénient majeur pour une représentation de l'information contenue dans les images, car on souhaite pouvoir comparer facilement deux représentations, par exemple pour des applications de mise en correspondance (indispensables à la vision stéréo ou à la reconnaissance des formes). Dans le cadre des applications de compression, l'invariance par translation entière est aussi une propriété recherchée : nous avons vu que l'information essentielle portée par une représentation en ondelettes est donnée par ses coefficients de grandes amplitudes, lesquels sont localisés au voisinage des singularités, c'est-à-dire des contours. Il existe donc une corrélation géométrique entre les coefficients des différentes échelles, qu'il est avantageux d'exploiter. La décimation effectuée dans le passage d'une échelle à la suivante rend ce programme délicat, et on ne peut sans doute guère faire mieux qu'un codage par "arbre de zéros" similaire à celui proposé par J. Shapiro [Sha].

Ces remarques conduisent Stéphane Mallat et Sifen Zhong a considérer un échantillonnage adaptatif de la transformée continue, de façon à ce que les coefficients retenus correspondent directement aux différentes singularités, c'est-à-dire aux contours multiéchelles [MZ]. La transformée en ondelettes continue d'une image f est obtenue par filtrage multiéchelle avec une ondelette bidimensionnelle séparable, construite comme la dérivée partielle selon x et selon y d'une fonction régulière θ :

$$\psi = (\psi^1, \psi^2) \text{ avec } \psi^1 = -\frac{\partial \theta}{\partial x}, \psi^2 = -\frac{\partial \theta}{\partial y}. \tag{19}$$

Les coefficients en ondelettes correspondent ainsi au jacobien

$$\begin{pmatrix} \mathcal{W}^1_{2^j} f(x,y) \\ \mathcal{W}^2_{2^j} f(x,y) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 2^j \frac{\partial}{\partial x}(f * \widetilde{\theta}_{2^j})(x,y) \\ 2^j \frac{\partial}{\partial y}(f * \widetilde{\theta}_{2^j})(x,y) \end{pmatrix} = 2^j \nabla (f * \widetilde{\theta}_{2^j})(x,y). \tag{20}$$

où $\widetilde{\theta}_{2^j}(x,y) = \theta_{2^j}(-x,-y) = 2^{-j}\theta(-2^j x, -2^j y)$. Il s'agit d'un cas particulier de transformée en ondelettes dyadiques. Lorsque le domaine fréquenciel est recouvert par les dilatations de ces ondelettes, les coefficients en ondelettes correctement normalisés vérifient une propriété de stabilité analogue à celle des *frames* (2), exprimée avec la variables spatiale (x, y) continue et non discrète [Ma3]. Dans l'implémentation discrète, cela correspond au même type d'algorithme de filtrage en sous-bandes que celui utilisé dans le cadre des *frames*, la différence étant qu'aucune opération de décimation n'est effectuée. La représentation en ondelettes dyadiques est bien entendu fortement redondante.

La représentation par maxima en ondelettes correspond à l'échantillonnage suivant de la représentation en ondelettes dyadiques : pour chaque échelle 2^j, les maxima du module de la transformée en ondelettes sont définis aux points (x_n, y_n) où le module du jacobien (20) est localement maximal le long des points parallèles à la direction donnée par ce jacobien. Cette définition est un cas particulier de celle des bords multiéchelles donnée par Canny dans [Can]. Les primitives de la représentation comportent une composante géométrique, les courbes de contour à une échelle donnée, lesquelles sont obtenues par chaînage des maxima voisins formant une direction orthogonale à celle du jacobien. A cette composante géométrique sont associées les valeurs des coefficients en ondelettes de chaque maxima.

Lorsque tous les maxima locaux sont conservés, cette représentation permet de reconstruire une image visuellement identique à l'originale. Pour cela, Mallat et Zhong proposent un algorithme alternant une projection sur l'espace des transformées en ondelettes avec une projection sur l'espace des images possédant la même représentation par maxima [MZ]. Cet algorithme converge vers une décomposition régulière appartenant à l'intersection des deux espaces, et il suffit ensuite d'effectuer une transformée en ondelettes inverse. Cependant et contrairement à la conjecture de D. Marr [Marr], Y. Meyer a montré que la représentation par maxima locaux, c'est-à-dire par contours multiéchelles, n'est en général pas complète [Me2].

Mallat et Zhong proposent immédiatement une application de leur représentation à la compression des images [MZ]. Par la suite, j'ai repris ces travaux avec S. Mallat et nous avons élaboré une nouvelle représentation adaptée à la compression des images pour de faibles débits (c'est-à-dire des taux de compression élevés) [7][13][16]. Cette représentation tend à distinguer deux structures fondamentales dans les images naturelles :

- les contours des objets sont les structures géométriques principales. Suivant leur définition donnée par Marr et Canny, nous pouvons les représenter par les courbes de maxima en ondelettes les plus significatives. Ces courbes de maxima, auxquelles nous ajoutons une approximation basse résolution de l'image, permettent d'approximer l'image naturelle par une fonction régulière par morceaux qui a l'aspect d'un dessin.
- Si nous supposons un codage exact des courbes de maxima, l'information perdue dans l'approximation précédente correspond à des coefficients en ondelettes qui ne participent pas à des structures géométriques : l'image d'erreur a l'aspect de microtextures.

Pour la compression de l'image de microtextures, la représentation par base d'ondelettes orthonormales ou biorthogonales nous paraît alors adaptée. Nous utilisons une variante de l'algorithme de compression décrit dans [21], où, afin d'autoriser un très bas débit, la troncature (mise à zéro des coefficients) s'effectue par blocs. Cela signifie que, sur des rectangles de faible énergie, on décide de négliger les microtextures à une certaine échelle.

On peut se demander si, pour caractériser les microtextures qui comportent des motifs assez bien périodiques, on n'aurait pas intérêt à utiliser une représentation dont les atomes sont mieux localisés en fréquence que ne le sont les ondelettes temps-échelles. Dans [19], nous avons comparé les performances de la représentation par ondelettes biorthogonales avec celles de la transformée en cosinus locale. Cette transformée temps-fréquence peut être vue comme une amélioration de la transformée en cosinus fenêtrée (elle même dérivée de celle de Fourier), où les discontinuités du raccordement entre les fenêtres sont évitées par une décroissance régulière des fonctions au voisinage des bords. Elle a été proposée indépendamment par H.S. Malvar et D.H. Staelin en 1989 dans le cadre d'une modélisation discrète [MaS] et par R.R. Coifman et Y. Meyer en 1991 suivant une approche continue [CM] (on consultera [Me3] pour une synthèse de ces approches dans le contexte des ondelettes). Notre méthode de troncature par blocs introduit des motifs géométriques artificiels, et nos expériences montrent que la transformée en cosinus locale n'est pas suffisamment bien localisée spatialement pour éviter l'apparition d'artefacts de blocs, au contraire des ondelettes temps-échelles. Bien entendu, cette conclusion est limitée au cadre de notre algorithme de quantification et d'autres algorithmes appliqués à la transformée en cosinus locale peuvent donner d'excellents résultats dans la compression des textures [MASC].

La représentation mixte "maxima en ondelettes - base d'ondelettes" me paraît particulièrement intéressante, car elle permet de structurer l'information contenue dans les images tout en restant dans le cadre mathématique très agréable de l'analyse harmonique et tout en conservant les outils algorithmiques associés au filtrage linéaire. Les remarques suivantes obligent cependant à modérer le propos :

- les contours multiéchelle ne présentent pas toutes les caractéristiques requises dans la formalisation des contours visuels;
- la caractérisation exacte des contours multiéchelle nécessite un grand nombre de maxima en ondelettes. L'échantillonnage et la quantification de ces maxima, nécessaires à l'obtention d'une représentation compacte, entraînent des erreurs qui se matérialisent par des artefacts au voisinage des contours.

Lorsque les données définissant les contours n'ont pas à être échantillonnées, cette représentation ne génère aucun phénomène de Gibbs. C'est par exemple le cas des applications de retouche d'images : dans [12], je propose une méthode d'interpolation des courbes de maxima qui permet d'étirer ou de contracter un contour. L'opérateur retouche une image en intervenant uniquement sur la géométrie des contours, ce qui peut s'effectuer interactivement à l'aide d'une souris. Les valeurs des maxima locaux sont déduites de la nouvelle géométrie et l'opérateur n'a pas à intervenir dessus.

Contrairement à la représentation par base d'ondelettes, la représentation par maxima locaux a suscité peu de recherches ultérieures et elle demeure peu utilisée dans les applications. La raison me paraît être dans les points suivants :

- pour la détection des contours de D. Marr et J. Canny, un algorithme de filtrage optimal a été décrit par R. Deriche dans [Der]. Cet algorithme, plus simple à implémenter que celui de Mallat-Zhong, est déjà largement utilisé lorsque S. Mallat et S. Zhong publient leur article cinq ans plus tard.
- pour les applications de compression, l'étape de reconstruction est nécessaire et à ma connaissance l'algorithme de Mallat-Zhong est le plus robuste parmi les différentes implémentations de la représentation des contours multiéchelles de D.Marr. Cependant, l'implémentation de cet algorithme est très technique et sa complexité bien que seulement en $O(N^2 \log N)$ pour une image de taille $N \times N$, assez grande (la constante multiplicative étant importante).

Le dernier point n'exclut pas une utilisation ultérieure de l'algorithme de Mallat-Zhong en compression, lorsque la puissance des ordinateurs sera suffisante et lorsqu'on aura simplifié l'implémentation. Le seul élément susceptible à mon avis de rejeter définitivement la représentation par maxima locaux pour les applications de compression est la création de phénomène de Gibbs. L'analyse est différente avec l'algorithme EZW de compression d'une représentation par base d'ondelettes : contrairement à l'algorithme de Mallat-Zhong, il peut être utilisé pour caractériser une information autre que celle des contours, comme les microtextures.

3 Un modèle géométrique

Le modèle géométrique permet de s'affranchir d'une représentation harmonique et d'éviter ainsi tout phénomène de Gibbs. En m'orientant dans cette voie, je ne cherche donc pas à remédier à la complexité de l'algorithme de Mallat-Zhong mais bien à expérimenter une approche mathématique plus en adéquation avec le système visuel. Bien que motivées par les applications, mes recherches ne tendent pas à pourvoir en algorithmes immédiatement opérationnels dans le milieu industriel.

Le cadre mathématique qui convient pour définir les lignes de niveau est celui de la variation totale. Nous notons toujours par f l'image analogique à analyser, qui est une fonction de l'ouvert borné $\Omega =]0,1[\times]0,1[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Dans le cas régulier $f \in C^1(\Omega)$, la variation totale de f est simplement définie par

$$\mathrm{TV}(f) = \int_\Omega |\nabla f(x)|\, dx. \tag{21}$$

Dans le cas plus général $f \in L^1(\Omega)$, (21) est généralisé par

$$\mathrm{TV}(f) = \sup_\phi \{ \int_\Omega f(x)(\mathrm{div}\phi)(x)\, dx \;/\; \phi \in C_c^1(\Omega, \mathbb{R}^2) \text{ et } |\phi| \leq 1 \}. \tag{22}$$

On dit que f est à variation bornée quand $\mathrm{TV}(f) < +\infty$.

3.1 Gestaltisme géométrique et lignes de niveau

Parmi les différents principes organisateurs qui guident la reconstruction visuelle [2], le principe de continuité de direction va jouer un rôle essentiel pour structurer l'information contenue dans les images numériques. Ce principe a pour effet la rigidification des objets visuels délimités par des courbes régulières. Par exemple lorsqu'une courbe fermée est détectée, la région entourée par la courbe est perçue comme un tout indissociable. Ces courbes fermées correspondent pour la plupart à la notion physique de contours d'arête. La continuité de direction s'applique également de manière amodale lorsqu'une courbe régulière s'arrête sur une autre : la géométrie est celle d'une "jonction en T" et le contour de la barre du "T" est mentalement prolongé. Une telle singularité est le résultat de l'occlusion d'un objet par un autre. D'autres singularités peuvent témoigner d'autres accidents physiques (par exemple une "jonction en X" révèle un phénomène de transparence ou d'ombrage).

Dans le cadre des images naturelles numérisées, je conjecture avec Simon Masnou et Jean-Michel Morel [1] que les courbes fermées qui permettent la rigidification des objets sont certaines des lignes de niveau de l'image, qui sont non oscillantes et en densité suffisante. Les lignes de niveau sont définies à partir des ensembles de niveau inférieur L_λ ou bien à partir des ensembles de niveau supérieur M_μ, où

$$L_\lambda = \{x \in \Omega / f(x) \leq \lambda\} \text{ et } M_\mu = \{x \in \Omega / f(x) \geq \mu\}. \tag{23}$$

Dans le cas où f est à variation bornée, tous ces ensembles de niveau sont de périmètre fini (c'est-à-dire $\mathrm{per}(L_\lambda) := \mathrm{TV}(\mathbb{1}_{L_\lambda}), \mathrm{per}(M_\mu) := \mathrm{TV}(\mathbb{1}_{M_\mu}) < +\infty$) et le bord essentiel $\partial^* L_\lambda$ ou $\partial^* M_\mu$ [EG] est constitué par une union de courbes de Jordan, ces courbes étant ou bien fermées ou bien rencontrant le bord du domaine : ce sont les courbes de niveaux. Notons que les ensembles de niveau $(L_\lambda)_\lambda$ ou $(M_\mu)_\mu$ forment une représentation complète de l'image puisque

$$u(x) = \inf_\lambda \{x \in L_\lambda\} = \sup_\mu \{x \in M_\mu\}. \tag{24}$$

Les premières applications des lignes de niveau au traitement des images sont dues à Vicent Caselles et Tomeu Coll. Avec Jean-Michel Morel, ils démontrent dans [CCM2] que la représentation par lignes de niveau permet la caractérisation de l'image à des changements de contraste locaux près. Ils proposent également un algorithme permettant la détection des jonctions en T et en X [CCM1][CCM2], et ils conjecturent que les primitives importantes pour la perception sont données par les portions de ligne de niveau entre deux jonctions. Une première application de cette représentation atomique est proposée par Simon Masnou et Jean-Michel Morel dans [MM] : en extrapolant les portions de lignes de niveau au-delà des jonctions en accord avec le principe de continuité de direction, ils obtiennent un surprenant algorithme de désocclusion. Dans [MG], Pascal Monasse et Frédéric Guichard présentent un algorithme rapide de décomposition de l'image en ses composantes connexes d'ensembles de niveau. Cette représentation, invariante par changement de contraste local, est bien adaptée pour des applications telle que le recalage d'images. Mais elle n'utilise pas la notion de contours morphologiques pour caractériser les composantes connexes importantes pour la perception.

3.2 Les contours morphologiques

Lorsque l'on trace certaines lignes de niveau, on obtient une segmentation de l'image par des régions qui sont des sections $\{x \in \Omega / \lambda_{i-1} < f(x) < \lambda_i\}$: c'est une carte topographique de f. Afin d'obtenir une carte dont les courbes permettent la reconstruction visuelle, je propose dans [4] une définition du contour morphologique en accord avec la conjecture de V. Caselles, T. Coll et J.M. Morel : c'est une ligne de niveau reliant un nombre quelconque de jonctions en T. Le contour est dit d'autant plus significatif que sa courbe passe par un nombre important de jonctions. Cette définition est motivée par la remarque suivante : la surface des objets n'est jamais éclairée de manière uniforme. Ainsi, même des surfaces de couleur unie présentent de nombreuses lignes de niveau. Au bord d'un objet, ces lignes de niveau rencontrent celles du fond et elles génèrent de nombreuses jonctions en T : sur les images naturelles et contrairement aux figures simples des gestaltistes, la présence d'une arête implique de multiples occlusions. L'intérêt de cette définition est d'être uniquement topologique, elle ne fait pas intervenir le contraste. Mais elle suppose l'image naturelle, c'est-à-dire la photographie d'une scène tridimensionnelle réelle. Dans le cas d'une image artificielle, par exemple une visualisation scientifique ou un dessin numérique, la représentation n'a pas à être invariante par changement de contraste et une définition faisant intervenir un calcul de contraste est légitime.

3.3 Variation totale et représentation morphologique

La formule de coaire met en évidence la relation entre la variation totale et la longueur des lignes de niveau [EG] :

$$TV(f) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{per}(L_\lambda)\, d\lambda = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{per}(M_\mu)\, d\mu. \tag{25}$$

La variation totale a été introduite pour le traitement des images par S. Osher et L. Rudin dans le cadre des applications de restauration [RO] : ils éliminent le bruit en diminuant la variation totale sous la contrainte de conserver les contours. Dans mon approche, les microtextures jouent le rôle du bruit qu'il ne s'agit plus d'éliminer mais de séparer du *sketch* afin de le coder par des méthodes différentes. Dans [4], j'indique comment la variation totale peut être reliée à la notion perceptuelle de microtexture. Une image n'est pas à variation bornée quand elle présente des structures fortement oscillantes à toutes les échelles, ou de manière équivalente, lorsqu'elle possède trop de petites lignes de niveau. Ces structures oscillantes correspondent visuellement à des microtextures.

Je propose ainsi une représentation morphologique basée sur une segmentation de l'image en des régions données par les contours morphologiques les plus significatifs [4]. Une approximation régulière et non oscillante de f est calculée à partir d'un échantillonnage des valeurs de f au voisinage de ces contours. Cet échantillonnage est choisi de manière à diminuer la variation totale de l'approximation, laquelle est calculée en utilisant le schéma AMLE (*Absolutely Minimizing Lipschitz Extension*) [CMS]. Les microtextures sont calculées en retenant uniquement les petits ensembles de niveau dans l'erreur entre l'image originale et son approximation. L'information résiduelle, composée des contours non significatifs et de composantes basse-fréquences résultantes de l'approximation, est éliminée. Lorsque suffisamment de contours morphologiques sont considérés comme significatifs et pour un échantillonnage des valeurs de f assez fin, l'image *sketch* est visuellement identique à l'originale et l'information de microtextures est négligeable. Dans le cadre d'une application de compression, l'échantillonnage consiste à ne retenir qu'une seule valeur par composante connexe conservée. Une conséquence est la modification du contraste local de l'image reconstruite par rapport à l'image originale. La représentation ne comporte alors plus qu'un paramètre de seuil pour les contours significatifs, lequel a valeur d'échelle [3]. L'échelle est relative ni à la taille des éléments ni à une fréquence, mais à l'importance visuelle d'un objet au sens de la reconstruction gestaltiste.

3.4 Application à la compression

La représentation morphologique étant particulièrement compacte, elle se prête bien aux applications de compression. La carte topographique comporte une information de nature géométrique (les contours) et des données qui permettent le calcul de l'approximation : les échantillons $f(x,y)$ pour des points (x,y) à l'extérieur et à l'intérieur des contours. Un échantillon par contour morphologique est suffisant pour reconstruire une image réaliste. Ces informations sont codées sans perte par des techniques de codage entropique et arithmétique. Le *sketch* peut ainsi être représenté avec un taux de compression de l'ordre de 40, tout en conservant les structures essentielles qui permettent l'interprétation de l'image [4]. Contrairement à la compression JPEG d'une représentation trigonométrique, et contrairement à la compression EZW d'une représentation par base d'ondelettes biorthogonales, aucun artefact visuel n'apparaît [3].

Au contraire des contours, les microtextures ne possèdent pas de structure géométrique bien définie. Elles peuvent donc être comprimées en utilisant une représentation harmonique sans craindre trop les effets de Gibbs. Dans [4] j'utilise la représentation par base d'ondelettes biorthogonales mais, comme dans le cas de la représentation mixte "base orthonormée - maxima locaux", des décompositions mieux localisées en fréquence à l'image des ondelettes de Malvar seraient à considérer.

4 MegaWave

Comme toute science, le traitement des images repose sur des modèles et sur des représentations théoriques qui doivent être validés par l'expérimentation et les résultats expérimentaux doivent être facilement reproductibles par la communauté scientifique, à commencer par celle des chercheurs puis par celle des ingénieurs lorsque la crédibilité de la méthode est avérée. Notre outil expérimental est l'informatique, constitué par le matériel et par le logiciel, les programmes de calcul numérique. Avec le développement du réseau Internet et la puissance croissante du matériel pour un coût constant, ces dix dernières années ont connu un profond bouleversement des conditions d'expérimentation. Auparavant bien des méthodes proposées n'étaient éprouvées que sur une ou deux images, et suivant des algorithmes dont certains détails jamais publiés rendaient la reproductibilité des résultats incertaine.

Le premier environnement logiciel MegaWave, que je développe durant ma thèse et qui est distribué à partir de 1990, répond avant tout au besoin pressant d'expérimentation et de communication au sein de notre modeste équipe. Avec l'accroissement de la taille de notre équipe et notre volonté d'ouverture à l'extérieur, la structure de MegaWave se révèle rapidement inadaptée. En 1993 je décide, en accord avec Jean-Michel Morel, l'abandon de MegaWave (renommé MegaWave1) pour un environnement plus puissant, nommé MegaWave2. L'objectif est de faciliter l'implémentation et le test de nouveaux algorithmes en les rendant facilement accessibles. La mise à disposition gratuite de MegaWave2 sur Internet réalise une publication logicielle de ces algorithmes, complémentaire de celle classique associée aux descriptions théoriques.

Je précise que le public interessé par nos algorithmes se restreint aux chercheurs et aux ingénieurs et que leurs attentes diffèrent légèrement : si les deux groupes veulent comprendre en profondeur l'algorithme qui les intéresse, les chercheurs travaillent souvent dans l'urgence et ils utilisent MegaWave1 ou MegaWave2 tel quel pour estimer les performances de la méthode. Les jeunes chercheurs non encore formés à un logiciel de traitement des images, trouvent aussi parfois le système intéressant en lui-même et ils décident de l'utiliser pour développer leurs propres algorithmes. Les ingénieurs travaillent généralement dans une structure plus rigide qui impose un logiciel pré-existant. Dans ce cas, il leur importe de pouvoir facilement convertir le code des algorithmes en un code compatible avec leur système.

4.1 MegaWave1

MegaWave1 constitue un environnement de développement en langage C et sous Unix d'applications orientées traitement du signal et plus particulièrement traitement d'images. Il est composé d'une bibliothèque de fonctions qui définit une interface pour accéder aux signaux et aux images, ainsi que d'un ensemble de commandes. Ces commandes sont des utilitaires (conversion de format, affichage d'une image, modification d'une image et calculs de paramètres) ou bien elles implémentent les algorithmes de recherche [14] (ondelettes, segmentation, diffusion anisotropique). Chacune de ces commandes est un programme écrit en langage C à l'aide des fonctions de la bibliothèque, auquel est associée une documentation écrite en LaTeX. MegaWave1 n'est plus maintenu depuis 1993, mais la dernière version est toujours disponible sur le réseau Internet [17] (voir aussi [21] pour une description de ses fonctionnalités en 1990).

4.2 MegaWave2

L'originalité de MegaWave2 face aux logiciels généralistes de traitement des images tient en ce qu'il offre une publication logicielle de nouveaux algorithmes : à côté de certains algorithmes classiques installés dans des buts pédagogiques ou d'évaluation figurent les versions originales des algorithmes inventés par leurs auteurs. L'objectif du système n'est donc pas d'offrir la liste exhaustive des algorithmes reconnus, mais un échantillon d'algorithmes à découvrir. Ceci montre que, indépendamment des qualités ou des défauts du système que j'ai développé, sans les différentes contributions des chercheurs, MegaWave2 ne serait qu'une coquille vide. MegaWave2 n'est cependant pas unique parmi les logiciels participant à la reproductibilité de la recherche en traitement des images : l'équipe de D. Donoho à Stanford a developpé le logiciel WaveLab suivant des objectifs similaires aux nôtres [BD]. Ce système comporte une variété très complète d'algorithmes liés aux représentations par ondelettes et à d'autres représentations temps-échelle ou temps-fréquence. WaveLab et MegaWave2 diffèrent cependant fondamentalement, au sens où WaveLab s'appuie sur un environnement logiciel commercial, MATLAB, alors que MegaWave2 définit son propre système. Bien que développer sous MATLAB présente des avantages, je pense que l'option choisie avec MegaWave2 est plus souple et plus pérenne : elle permet d'éviter aux utilisateurs l'acquisition d'un environnement vendu très cher, et elle nous garantie la totale maîtrise d'œuvre. Le passage de la version 4 à la version 5 de MATLAB nécessite par exemple une révision de WaveLab.

J'ai conçu MegaWave2 en essayant d'automatiser le plus possible le travail d'un chercheur. Dans un programme de traitement d'images, le “noyau utile” qui porte l'information nouvelle représente souvent moins de la moitié du code qui doit être implémenté. Le chercheur ne devrait se préoccuper que de la description de son algorithme, et non des procédures accessoires telle que la gestion des entrées/sorties. Sous MegaWave2, le chercheur spécifie son algorithme sous la forme de fonctions écrites en langage C (et regroupées dans ce que l'on appelle un module), sans se préoccuper de l'environnement et de l'interface : il manipule les structures comme les images sous la forme de variables, et c'est le système qui s'assure que ces variables correspondent bien aux données à traiter, qui résident sur disque sous la forme de fichiers. Le système est capable de générer automatiquement le code manquant dès qu'il a connaissance d'un minimum d'information, comme les variables en entrées, celles en sortie, ou la syntaxe d'appel du module. Ces informations sont regroupées dans chaque module sous la forme d'un entête, qui n'est pas en langage C mais qui est reconnu par le préprocesseur inclus sous MegaWave2. De même, la documentation d'un module est automatisée, à l'exception bien sûr de la description de l'algorithme en lui-même.

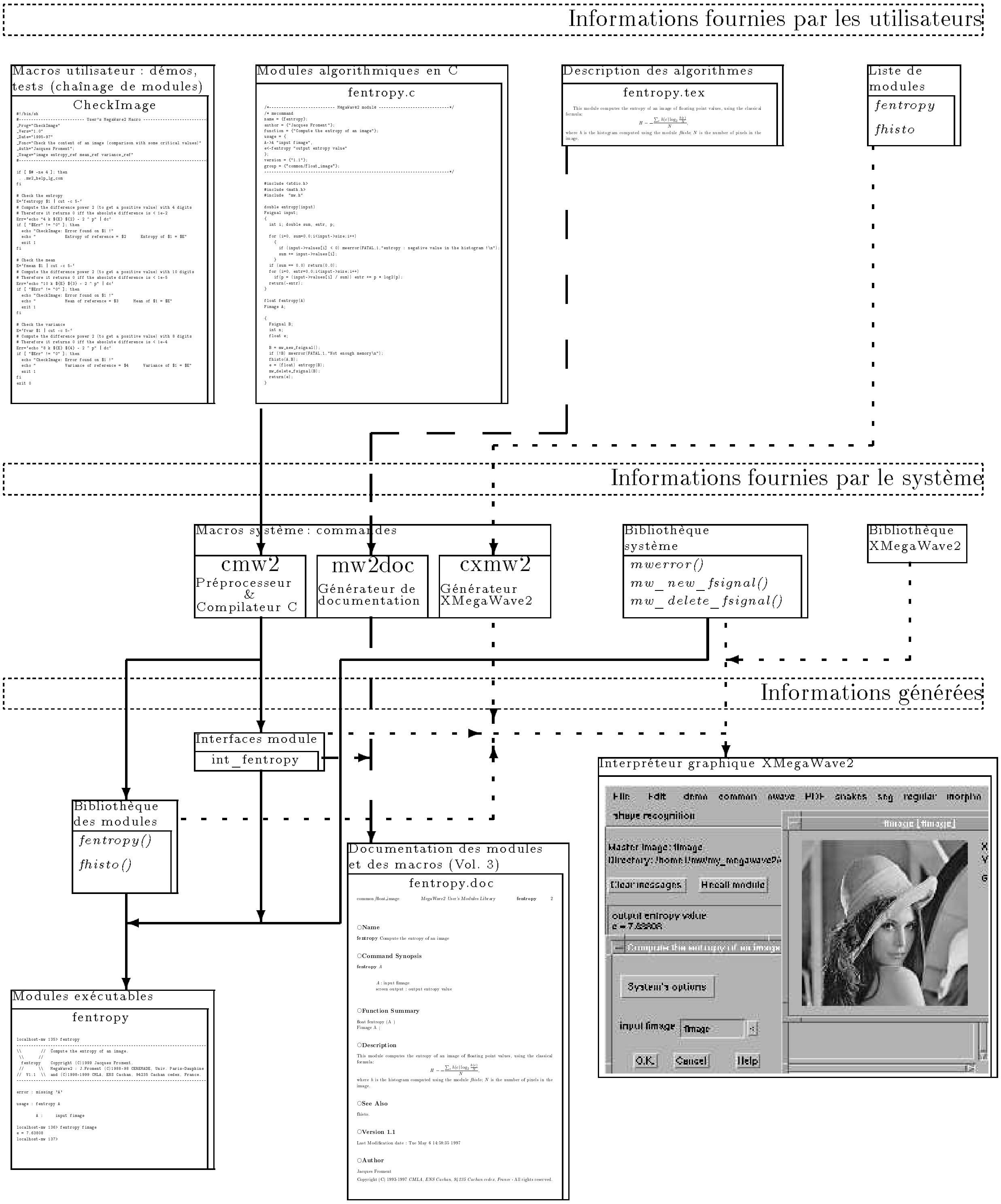
À partir d'un module source, le système peut générer un programme exécutable semblable aux commandes de MegaWave1 (Cf. graphique page 30). Un module exécutable permet de tester rapidement et en toute fiabilité un nouvel algorithme, mais son utilisation qui fait appel à une ligne de commande Unix n'est pas très conviviale. À partir d'une sélection de modules, le système peut générer une interface graphique sous forme de menus, appelée XMegaWave2 : sous cet environnement, les commandes s'enchaînent en mémoire centrale (c'est-à-dire, sans l'étape d'entrées/sorties sur disque) par de simples “clics” de souris.

J'ai écrit le préprocesseur avec l'aide d'un ingénieur informaticien, Sylvain Parrino. L'environnement XMegaWave2 a été réalisé en collaboration avec Luis Alvarez et Agustin Trujillo Pino de l'Université de Las Palmas de Gran Canaria en Espagne. De nombreux chercheurs enrichissent MegaWave2 en écrivant de nouveaux modules, qui peuvent être rendus publics dans le cadre des publications logicielles : une version de MegaWave2 est disponible gratuitement sur Internet [5]. Jusqu'en juin 1999, un système de licence demandait l'inscription de tout site utilisant cet environnement, ce qui permet de mesurer l'ampleur de sa diffusion (Cf. tables 1 et 2). La procédure de licence vient d'être supprimée à la demande des ingénieurs, car elle ralentissait la ré-écriture du code dans leur propre logiciel.

5 Perspectives

L'avenir de MegaWave2 est lié à notre capacité d'adapter l'environnement aux évolutions informatiques et aux souhaits des utilisateurs. Ceux-ci ne remettent pas en cause la structure du logiciel, mais ils souhaitent l'ajout de nouvelles fonctionnalités, une diminution du délai de

FIG. 1 – *Principaux flux d'information sous MegaWave2 (exemple avec le module* fentropy *qui calcule l'entropie d'une image en utilisant l'histogramme donné par le module* fhisto*).*



TAB. 1 – *Quelques données sur MegaWave2 (Juin 1999).*

Nombre de licences distribuées (une par site)	120
Architectures machines et systèmes Unix	PC Linux, HPUX, SunOS, Sun Solaris, SGI
Nombre de lignes du code source	
278 modules publics	86000
Bibliothèque système	35000
Préprocesseur	18000
Interpréteur XMegaWave2	8000
Macros système	4000
Total	151000
Nombre de pages de la documentation	
Vol.1 : MegaWave2 User's Guide	80
Vol.2 : MegaWave2 System Library	140
Vol.3 : MegaWave2 User's Modules Library	400
Total	620

publication et une présentation plus pédagogique des algorithmes. Une difficulté importante est le maintient de la cohérence entre les modules chaque mois plus nombreux, ce qui est un signe de vitalité mais aussi un *challenge* à relever en permanence. La structure de MegaWave2 est suffisamment ouverte et souple pour permettre bien des adaptations, à condition bien sûr que la main d'œuvre humaine soit suffisante. L'arrivée de Lionel Moisan comme coresponsable est un élément significatif en faveur de la pérennité du système.

Mes perspectives de recherche à court terme sont dans la continuation de mes travaux actuels. La validation des représentations harmoniques pour le traitement des images, notamment les différentes transformées en ondelettes, est un programme en passe d'être réalisé par la communauté scientifique. Au fil des travaux, les représentations génériques se sont précisées pour s'adapter aux applications finales et des institutions ont mené des études de validation des algorithmes sur des bases de données importantes (ainsi en est-il de l'algorithme EZW pour la compression par bases d'ondelettes). De même, la représentation morphologique va t-elle devoir subir ses premiers tests de validation sur des images diverses. Par exemple, en collaboration avec Bernard Rougé du CNES [Rou], je me propose d'étudier la compression d'images satellitaires par la représentation morphologique. Les étapes de validation et de comparaison, réalisées non seulement par notre équipe mais aussi par des chercheurs extérieurs, montreront sans doute que la représentation morphologique tel que je l'ai présenté gagnerait à certaines adaptations.

Des adaptations seront évidemment indispensables pour le traitement d'images particulières qui ne répondent pas à l'hypothèse d'image "naturelle", ce qui est partiellement le cas des images satellitaires. Un autre domaine important nécessitera des modifications plus profondes, l'imagerie médicale. L'exemple de la mammographie révèle la relativité de la notion d'information pertinente : dans ce cas elle n'est pas constituée par des contours, mais par des grains structurés en nuages qui représentent des microcalcifications, lesquelles sont déterminantes pour le diagnostic précoce du cancer du sein. Mais là encore les principes physiques de constitution de l'image impliquent des hypothèses d'invariance de la représentation, et notamment d'invariance morphologique. Le modèle mathématique de la variation totale associé à des primitives basées sur certaines lignes de niveau offre donc un cadre à considérer avec attention. L'intérêt de cette approche géométrique réside aussi dans l'expertise fournie par les radiologues, lesquels se basent sur la forme des grains pour établir leur diagnostic. La collaboration actuelle avec les radiologues

TAB. 2 – *Principaux organismes dépositaires d'une licence MegaWave2*

France	
Universités	Haute Alsace (Mulhouse), Joseph Fourier (Grenoble), Nancy I (Nancy), Nice (Nice), Paris-5 R. Descartes (Paris), Paris-6 P. et M. Curie (Paris), Paris-9 Dauphine (Paris), Paris-Sud (Orsay), Reims (Reims).
Ecoles, instituts	Ecole Centrale de Paris (Chatenay-Malabry), Ecole Polytechnique (Palaiseau), EHESS (Paris) ENSTA (Paris), ENS Cachan (Cachan), ENS ULM (Paris), GRIB CITI2 (Paris), INRA (Jouy-en-Josas), INRIA (Le Chesnay), INSA Lyon (Villerbanne), INSEE (Malakoff), Institut de Physique du Globe (Paris), INT (Evry), Observatoire de Medon (Medon), Observatoire de Paris (Paris).
Autres organismes	Alcatel-ISR (Evry), CALOIF (Toulon Naval), CNES (Toulouse), CERLOR TDF (Metz), CISI Ingéniérie (Rungis), Dassault Aviation (Saint-Cloud), DRET (Paris Armées), EPSHOM (Brest), IFP (Rueil-Malmaison), MATRA CAP Systèmes (Vélizy-Villacoublay), MATRA MS2I (Saint Quentin en Yvelines), Thomson-CSF (Malakoff).
Etats-Unis, Canada	
Universités	Berkeley (CA), Californie (Iruine), Caroline du Nord (Greensboro), Columbia (NY), Drexel (PA), George Mason (VA), Hawaï (HI), Houston (TX), Johns Hopkins (MD), Kansas (Manhattan), Nebraska (Lincoln), NYU (NY), Oregon (Corvallis), Ottawa (Ontario), Princeton (NJ), Thomas Jefferson (PA), Rutgers (CAIP center), Stanford (CA), Tennessee (Knoxville), Texas A&M (San-Antonio), UCLA (CA), Washington (Seattle), Yale (CT).
Ecoles, instituts	Dartmouth Colllege (NH), Greenwich Memorial Medical Center (CT), MIT (Cambridge).
Autres organismes	AT&T Bell Labs (NJ), Cognitech (CA), Hewlett Packard Lab. (CA), Xerox Palo Alto Research Center (CA).
Autres pays	
Universités	Agriculture et Technologie (Tokyo, Japon), Albert-Ludwigs (Freiburg, Allemagne), Athènes (Grèce), Bonn (Allemagne), Bristol (Grande-Bretagne), Cantabria (Santander, Espagne), Catholique du Chili (Santiago du Chili), Chalmers (Gothenburg, Suède), Complutense (Madrid, Espagne), Concepción (Chili), Curtin (Perth, Australie), De la République (Montevideo, Uruguay), Degli Studi di Milano (Italie), Dublin City (Irlande), Essex (Colchester, Grande-Bretagne), Freiberg (Sachs, Allemagne), Glasgow (Grande-Bretagne), Göteborg (Suède), Iles Baléares (Espagne), Kingston (Grande-Bretagne), La Sapienza (Rome, Italie), Las Palmas (Espagne), Medizinische Fakultät (Aachen, Allemagne), Monash (Victoria, Australie), Naples (Italie), Otago (Dunedin, Nouvelle-Zélande), Polytechnique de Milan (Italie), Rome C.N.R. (Italie), Science & Technology (Hong Kong), Shanghai (Chine), Singapour, Tsing Hua (Taïwan), Veszprém (Hongrie) Vrije (Bruxelles).
Ecoles, instituts	I. of Mathematics (Taipei, Taïwan), I. of Automation (Beijing, Chine), I. of Technology (Tokyo, Japon), Joint Research Center JRC-Ispra (Italie), Tecmath-Gmbh (Kaiserslautern, Allemagne).
Autres organismes	Unilever (Londres, Grande-Bretagne).

de l'hôpital Cochin porte sur la compression des mammographies par les représentation par base d'ondelettes. Cette approche a l'avantage d'offrir une continuité par rapport aux méthodes classiques de type fréquencielle, auxquelles elle apportera sûrement des améliorations, au prix là encore de modifications profondes dans les algorithmes (la taille des grains des microcalcifications étant bien souvent de quelques pixels seulement, le schéma EZW assimilerait ces grains à du bruit et détruirait l'information importante). Si cette collaboration se prolongeait, je pense qu'une représentation mixte utilisant les lignes de niveau pour caractériser la morphologie des grains, et les ondelettes pour caractériser les autres textures, serait à étudier en priorité.

Revenons au cadre des images naturelles, où il serait important d'adapter la représentation morphologique au cas de la couleur. Vicent Caselles, Tomeu Coll et Jean-Michel Morel étudient la généralisation de la carte topographique aux images couleur et ils viennent de montrer qu'asymptotiquement, la carte topographique d'une image couleur est donnée par celle de son intensité lumineuse, ce qui permet de se ramener au cas à niveaux de gris [CCM3]. Cette approche est malheureusement difficilement transposable au cas discret, notamment dans le cadre d'applications, telle la compression, qui impliquent des approximations ne générant pas d'artefact de couleur. En collaboration avec eux, je me propose de définir une représentation pour les images couleur utilisant une relation d'ordre lexicographique, donc totale, qui privilégie l'intensité lumineuse mais qui tient aussi compte de la chrominance. La carte topographique correctement définie, la représentation morphologique s'adapte facilement aux images en couleur.

Par la suite, il serait intéressant d'étudier la dynamique des lignes de niveau dans le cadre des films. Les propriétés d'invariance des contours morphologiques assurent une certaine continuité de ces primitives d'une image à l'autre, sauf accident provoqué par une occlusion. Une telle singularité est porteuse d'une information importante (le passage d'un objet devant un autre) et il serait important de pouvoir la détecter, sinon la caractériser. Nous arrivons ainsi à des programmes de recherche qui ne pourront aboutir que sur du long terme. Parmi les différents principes gestaltistes de la reconstruction visuelle, j'ai abordé le rôle déterminant du principe de continuité de direction au travers des singularités de type jonction. Si les lignes de niveau possédant de telles singularités forment les primitives de la reconstruction visuelle, d'autres principes participent au regroupement de ces primitives en des objets permettant l'interprétation (par exemple les principes de proximité, de symétrie, de constance de largeur). Ainsi la simulation de certains principes gestaltistes devrait permettre de structurer les primitives entre elles par diverses relations comme la "rigidité". Suivant un schéma pyramidal, ces structures pourraient elles aussi être mises en relation en utilisant la logique gestaltiste. En atteignant les buts de la reconstruction visuelle comme l'articulation tout-partie (relation entre les parties constituant un objet) ou l'articulation fond-forme (ordre des objets dans l'espace), nous arriverions alors au terme du programme de la simulation gestaltiste. Telle quelle, la représentation bas niveau de l'information que nous obtiendrions devrait être suffisamment complète et fiable pour générer de nombreuses applications industrielles, par exemple dans le cadre de la robotique. Au sein d'un système expert, cette représentation pourrait permettre de simuler efficacement le second niveau de la perception chez l'homme, la reconnaissance des objets.

Nous savons que l'analyse harmonique, la variation totale, les probalilités et la morphologie mathématique seront des outils mathématiques privilégiés pour caractériser l'information bas niveau. Devant la complexité des structures à analyser, aux caractéristiques à la fois locales et globales, d'autres mathématiques seront sans doute nécessaires. Le traitement des images offre ainsi un domaine d'expérimentation fascinant pour un large spectre des mathématiques.

Bibliographie

[ABMD] M. Antonini, M. Barlaud, P. Mathieu and I. Daubechies, "Image coding using wavelet transform". *IEEE Trans. Image Proc.*, vol. 1, no. 2, p 205-220, 1992.

[ACMM] L. Ambrosio, V. Caselles, S. Masnou and J.M. Morel, "Connected Components of Sets of Finite Perimeter and Applications to Image Processing". Preprint, 1999.

[AGLM] L. Alvarez, F. Guichard, P.L. Lions and J.M. Morel, "Axioms and fundamental equations of image processing". *Arch. Rational Mechanics and Anal.*, vol. 16, no. 9, p 200-257, 1993.

[BD] J.B. Buckheit and D. L. Donoho, "Wavelab and reproducible research". In *Wavelets and Statistics*, A. Antoniadis and G. Oppenheim (Eds), Springer-Verlag, p 53-81, 1995.

[Can] J. Canny "A computational approach to edge detection". *IEEE Trans. Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. 8, p. 679-698, 1986.

[Cas] J.R. Casas, "Morphological Interpolation for Image Coding". 12th Int. Conf. on Analysis and Optimization of Systems. Images, Wavelets and PDEs. MO.Berger, R.Deriche, I.Herlin, J.Jaffré, JM.Morel (Eds), Springer, Paris, June 1996.

[CCM1] V. Caselles, B. Coll and J.M. Morel, "A Kanizsa programme". *Progress in Nonlinear Differential Equs. and their Applications*, vol. 25, p 35-55, 1996.

[CCM2] V. Caselles, B. Coll and J.M. Morel, "Topographic Maps and Local Contrast Changes in Natural Images". À paraître dans *Int. Jour. of Computer Vision.*

[CCM3] V. Caselles, B. Coll and J.M. Morel, "Geometry and Color in Natural Images". Preprint, 1998.

[CD] A. Cohen and J.P. D'Alès, "Nonlinear approximation of random functions", *SIAM J. Appl. Math.* 57, No 2, p. 518-540, 1997.

[CDF] A. Cohen, I. Daubechies and J.C. Feauveau, "Biorthogonal bases of compactly supported wavelets". *Comm. in Pure & Appl. Math.*, vol. 45 no. 5, 1992.

[CDPX] A. Cohen, R. DeVore, P. Petrushev and H. Xu, "Non linear approximation and the space $BV(\mathbb{R}^2)$". Prepint 1998, submitted to *Amer. J. Math.*

[CDV] A. Cohen, I. Daubechies and P. Vial, "Wavelets and fast wavelet transforms on an interval". *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 1, p 54-81, 1993.

[CM] R.R. Coifman et Y. Meyer, "Remarques sur l'analyse de Fourier à fenêtre", *Note aux C.R. Acad. Sci. Paris*, p. 259-261, 1991.

[CMS] V. Caselles, J.M. Morel and C. Sbert, "An Axiomatic Approach to Image Interpolation". *IEEE Trans. on Image Processing*, vol. 7, no. 3, p. 376-386, 1998.

[Cre] D. Crevier, *The Tumultuous History of the Search for Artificial Intelligence*, BasicBooks, HarperCollins, 1993.

[Daub] I. Daubechies, "Orthonormal bases of compactly supported wavelets". *Commun. Pure Appl. Math.*, vol. 41, p. 909-996, 1988.

[Der] R. Deriche, "Using Canny's criteria to derive a recursively implemented optimal edge detector". *Int. J. of Comp. Vision*, p. 167-187, 1987.

[DJ] D. Donoho and I. Johnstone, "Ideal spatial adaptation via wavelet shrinkage", *Biometrika*, vol. 81, p. 425-455, 1994.

[DJL] R.A. DeVore, B. Jawerth and B.J. Lucier, "Image compression through wavelet transform coding", *IEEE Trans. Info. Theory*, vol. 38, p. 719-746, 1992.

[EG] L.C. Evans and R.F. Gariepy, "Measure theory and fine properties of functions". *Studies in Advanced Mathematics*, CRC Press Inc., 1992.

[HM] R. Hummel and R. Moniot, "Reconstruction from zero-crossings in scale-space". *IEEE Trans. on Acoustic, Speech and Signal Processing*, vol. 37, no. 12, 1989.

[J2] JPEG 2000, site officiel sur `http://www.jpeg.org`.

[Kan1] G. Kanisza, "Grammatica del Vedere". Il Mulino, Bologna, 1980. Traduction française par Antonin Chambolle, Diderot Editeur des Arts et des Sciences, 1997.

[Kan2] G. Kanisza, "Vedere e pensare". Il Mulino, Bologna, 1991.

[Ma1] S. G. Mallat, "A theory for multiresolution signal decomposition : the wavelet representation". *IEEE Trans. on Patt. Anal. and Mach. Intell.*, p. 674-693, July 1989.

[Ma2] S. Mallat, "Multiresolution approximations and wavelet orthonormal bases of $L^2(\mathbb{R})$". *Trans. Amer. Math. Soc.*, 315, p. 69-87, Sep. 1989.

[Ma3] S. Mallat, *"A Wavelet Tour of Signal Processing"*. Academic Press, 1998.

[Marr] D. Marr, *"Vision"*. W.H.Freeman and Co., 1982.

[MASC] F.G. Meyer, A.Z. Averbuch, J-O. Strömberg and R.R. Coifman, "Multi-layered image representation: Application to image compression". *ICIP'98 IEEE Int. Conf. on Image Processing*, Chicago, 1998.

[MaS] H.S. Malvar and D.H. Staelin, "The LOT : transform coding without blocking effects", *IEEE Trans. Acoust., Speech, and Signal Proc.*, 37(4), p 553-559, April 1989.

[Math] G. Matheron, *"Random Sets and Integral Geometry"*. John Wiley, N.Y., 1975.

[Me1] Y. Meyer, *"Ondelettes et opérateurs I"*. Hermann, Paris, 1990.

[Me2] Y. Meyer, *"Les ondelettes, algorithmes et applications"*. Armand Colin, 1992.

[Me3] Y. Meyer, *"Ondelettes et algorithmes concurrents"*. Hermann, 1992.

[MG] P. Monasse and F. Guichard, "Fast computation of a contrast-invariant image representation". *TR 9815*, CMLA, ENS Cachan, France, 1998.

[MH] D. Marr and E. Hildreth, "Theory of edge detection", *Proc. Roy. Soc. Lond.*, B207, p. 187-217, 1980.

[MM] S. Masnou, J.M. Morel, 'Level lines based disocclusion". *ICIP'98 IEEE Int. Conf. on Image Processing*, Chicago, 1998.

[MS] J.M. Morel and S. Solimini, *"Variational methods in image processing"*. Birkhäuser, 1994.

[MZ] S. Mallat and S. Zhong, "Characterization of signals from multiscale edges". *IEEE Trans. on Pattern Recog. and Machine Intel.*, vol. 14, no. 7, p. 710-732, 1992.

[Pap] A. Papoulis, *"Probability, Random Variables and Stochastic Processes"*. Third edition, McGraw-Hill, 1991.

[RK] A. Rosenfeld and A.C. Kak, *"Digital picture processing"*. Second edition, Academic Press Inc., Computer science and applied mathematics, vol. 1, 1982.

[RO] L.I. Rudin and S. Osher, "Total Variation based image restoration with free local constraints". *Proc. IEEE Int. Conf. on Image Processing*, vol. 1, Austin, p 31-35, 1994.

[Rou] B. Rougé, "Remarks about space-frequency and space-scale representations to clean and restore noisy images in satellite frameworks", *Proc. Int. Conf. Wavelets and Application*, in "Progress in Wavelet Analysis and Applications", Eds. Y.Meyer et S. Roques, Frontières, p 433-442, 1993.

[Ser] J. Serra, *"Image analysis and mathematical morphology"*. Academic Press, 1982.

[Sha] J. Shapiro, "Embedded Image Coding Using Zerotrees of Wavelet Coefficients". *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 41, no. 12, p 3445-3462, 1993.

[VK] M. Vetterli, J. Kovačević, *"Wavelets and Subband Coding"*. Prentice Hall, 1995.

[Wal] G.K. Wallace, "JPEG". *Comm. of the ACM*, vol. 34, no. 4, p. 31-44, 1991.

[Wer] M. Wertheimer, "Untersuchungen zur Lehre der Gestalt". Psychologische Forschung, IV, p. 301-350, 1923.

[YE] L. Yaroslavsky and M. Eden, *"Fundamentals of digital optics"*. Birkhäuser, 1996.

Encadrement et valorisation de la recherche

- Membre titulaire de la Commission de Spécialistes.
- Reconstruction paramétrique du centre d'un objet radiographié (depuis septembre 1999), collaboration avec le CEA (un doctorant sera recruté en 2000 et coencadré avec Bernard Ycart).
- Télémédecine et compression d'images de mammographie (depuis 1998), collaboration avec André Bonnin et Vincent Hazebroucq de l'hôpital Cochin. Coencadrement avec Christine Graffigne d'une doctorante (Latifa Yamouni).
- Participation aux contrats européens COMPRESS1 (1995-96) et COMPRESS2 (1997-98) de compression d'images par ondelettes (DG XIII), en collaboration avec un doctorant (Jean-Pierre D'Alès); dépôt de copyright sur du logiciel à l'initiative de la Communauté Européenne.
- Dans le cadre d'un programme d'échange scientifique France/Roumanie, enseignement d'un module ondelettes et traitement de l'image auprès des chercheurs de l'Université Technique de Timisoara (1995).
- Responsable scientifique sur un contrat de recherche avec l'Institut Français du Pétrole (étude de signaux de forage), 1994-95. Auteur de deux brevets d'invention déposés par l'IFP en Europe [10] [11] et de un brevet déposé aux États-Unis [9]. Coencadrement avec Madeleine Bonnet d'un doctorant (Eddy Thésée). En sus des brevets, une publication interne à l'IFP : "Missfunction Detection and Compression of Drilling Signals Using Wavelets" Jacques Froment, Didier Pavone and Eddy Thésée, June 1995.
- Dans le cadre d'une convention internationale Conicyt/CNRS, invité à l'Université Concepción, Chili, 1994 : analyse par ondelettes de signaux issus du syndrome de chocs hémorragique.
- Membre du jury de thèse de Patrick Nikyema ("Contribution à l'étude de l'utilisation des techniques multirésolution dans la compensation de mouvement de séquences d'images"), Université des Sciences et Technologie de Lille, 1993.
- De 1991 à 1995, responsable de l'enseignement "traitement mathématique du signal" dans le DEA *Mathématiques, Informatique et Applications aux Sciences de l'Homme* cohabilité par l'Université Paris 5.
- Analyse d'images par ondelettes et paquets d'ondelettes, collaboration avec Martin Marietta Missile Systems (Floride), 1991.
- Lauréat du prix scientifique Philip Morris, par équipe (Dir. J.M.Morel), 1991.
- Analyse multirésolution de signaux radar SAR par ondelettes, collaboration avec US Air Force Wright Aeronautical Lab. (Ohio), 1990.
- Analyse par ondelettes de signaux radar à effet Doppler, collaboration avec Alcatel-ISR (Evry), 1989.
- Synthèse de lois de commande LQG pour les lanceurs Ariane et les missiles stratégiques. Aérospatiale, division Systèmes Stratégiques et Spatiaux, service Contrôle du Vol, Les Mureaux, 1987.

Principales publications et liste des publications jointes[5]

[1] J. Froment, S. Masnou et J.M. Morel, "La géométrie des images naturelles et ses algorithmes". À paraître dans *Images des mathématiques*.

[2] • J.P. D'Alès, J. Froment et J.M. Morel, "Reconstruction visuelle et généricité". *Intellectica*, 1, No 28, p. 11-35, 1999.

[3] J. Froment, "A Compact and Multiscale Image Model Based on Levels Sets". *Scale-Space Theories in Computer Vision*, Proc. Sec. Int. Conf. Scale-Space'99, M. Nielsen, P. Johansen, O. Fogh Olsen, J. Weickert (Eds.), Lecture Notes in Computer Science 1682, Springer, p. 152-163, 1999.

[4] • J. Froment, "A Functional Analysis Model for Natural Images Permitting Structured Compression". *ESAIM:COCV Control, Optimisation and Calculus of Variations*, vol. 4, p. 473-495, 1999.

[5] J. Froment, Vol.1 : "MegaWave2 User's Guide", Vol.2 : "MegaWave2 System Library", Vol.3 : "MegaWave2 User's Modules Library", *The Preliminary Guides to the MegaWave2 Software*, 1998. Une version est disponible en ligne sur le site `http://www.cmla.ens-cachan.fr/Cmla/Megawave/`.

[6] J.P. D'Alès and J. Froment, "Industrialization of Advanced Adaptive Techniques: Wavelets Compression Techniques". *European Commission, Report for the JRC Innovation Programme : DG XIII - CSA96205*, Eds. J.C. Grossetie and D. Marini, 1997.

[7] J. Froment and S. Mallat, "Second Generation Image Coding and Wavelet Transform". *Proc. Int. Conf. First World Congress of Non Linear Analysts'92*, Ed. V. Lakshmikantham, Walter de Gruyter & Co., p. 1923-1932, 1996.

[8] J.P. D'Alès and J. Froment, "State of the art in high compression coding techniques: adaptive non linear wavelets lossless compression techniques". *European Commission, Report for the JRC Innovation Programme : DG XIII - CSA95E4*, Eds. J.C. Grossetie and D. Marini, 1996.

[9] • D. Pavone, J. Froment and E. Thésée, "Method and System of Analysis of the Behavior of a Drill String", *United States Patent*, Patent Number 5,550,788, Aug. 27, 1996.

[10] D. Pavone, J. Froment et E. Thésée, "Méthode et système d'analyse du comportement d'une garniture de forage", *Office européen des brevets*, brevet numéro 95401092.2-2213, Août 1995.

[11] D. Pavone, J. Froment et E. Thésée, "Méthode et système de transmission d'un signal de forage", *Office européen des brevets*, brevet numéro 95401092.2-2313, Août 1995.

[12] J. Froment, "Image Retouching Using Wavelet Maxima". *Proc. Int. Conf. IEEE 8th Work. on Image and Multidimensional Signal Processing*, Sept 9-10, 1993.

[13] J. Froment and S. Mallat, "Arbitrary Low Bit Rate Image Compression Using Wavelets". *Proc. Int. Conf. Wavelets and Application*, in "Progress in Wavelet Analysis and Applications", Eds. Y.Meyer et S. Roques, Frontières, p 413-418, 1993.

[14] J. Froment et J.M. Morel, "MegaWave: un logiciel de traitement mathématique des images", *Cahiers de Mathématiques de la Décision*, No 9304, Université Paris 9, 1993.

[15] • A. Cohen and J. Froment, "Image Compression and Multiscale Approximation". *Wavelets and Applications*, Ed. Y. Meyer, Masson, p. 181-206, 1992.

[16] • J. Froment and S. Mallat, "Second Generation Compact Image Coding with Wavelets". *Wavelets - A Tutorial in Theory and Applications*, Ed. C.K. Chui, Academic Press, p 655-678, 1992.

5. Les publications sont classées par ordre chronologique de parution décroissant. Celles dont le numéro est suivi du symbole • sont incluses dans ce mémoire.

[17] J. Froment, "MegaWave1: un environnement de développement orienté traitement d'images sous Unix", 5ème édition, 1992. Une version est disponible en ligne sur le site `http://www.cmla.ens-cachan.fr/Cmla/Megawave/`.

[18] • A. Cohen, J. Froment et J. Istas, "Analyse multirésolution des signaux aléatoires". *Note aux C.R. Acad. Sci. Paris*, t.312, série I, p 567-570, Analyse mathématique, 1991.

[19] J. Froment et S. Mallat, "Compression d'images et ondelettes : une double approche contours et textures". *Actes de la session "Ondelettes et paquets d'ondes"*, Inria Rocquencourt, p. 227-247, 1991.

[20] J. Froment et J.M. Morel, "Analyse multi-échelle, vision stéréo et ondelettes". *Les ondelettes en 1989*, Ed. P.G. Lemarié, Lectures Notes in Math. No 1438, Springer-Verlag, 1990.

[21] J. Froment, "Traitement d'images et applications de la transformée en ondelettes". *Thèse de l'université Paris IX Dauphine*, 1990.

UNIVERSITÉ PARIS V RENÉ DESCARTES

Jacques FROMENT

PUBLICATIONS JOINTES AU MÉMOIRE