MTH 2215
EDP et Analyse numérique
Emmanuel Frénod

Première partie
Une première approche des éléments finis sur un exemple très simple

1 Équation de la chaleur dans une barre

2 Résolution de $-u'' = f$ sur $[0,1]$ par éléments finis avec un maillage régulier

L'analyse numérique des EDP consiste à traduire les problèmes de résolution d'EDP en problèmes d'inversion de matrice. L'objectif est d'illustrer ceci sur un exemple simple.
Soit le problème suivant :

$$\text{Trouver } u : [0,1] \to \mathbb{R} \text{ telle que } -u'' = f \text{ sur } [0,1] \text{ et telle que } u(0) = u(1) = 0. \tag{2.1}$$

Exercice 2.1 On place sur $[0,1]$ un maillage régulier de $n+2$ nœuds $(p_i)_{i=0,\dots,n+1}$ et on appelle x_i la coordonnée du i^{ieme} nœud p_i. On suppose que $x_0 = 0$ et $x_{n+1} = 1$.
1. Donner l'abscisse x_i de p_i.
On définit les fonctions ϕ_i par : ϕ_i est continue sur $[0,1]$ et affine sur chaque intervalle $]p_i, p_{i+1}[$ et $\phi_i(p_j) = \delta_{ij}$.
2. Quelle est ϕ_i' (la dérivée de ϕ_i) ?
3. Pour quelles valeurs de i, ϕ_i vérifie-t-elle $\phi_i(0) = \phi_i(1) = 0$?

Exercice 2.2 On cherche $\tilde{u}$ une approximation de u sous la forme

$$\tilde{u} = \sum_{i=1}^{n} U_i \phi_i \tag{2.2}$$

1. A-t-on $\tilde{u}(0) = \tilde{u}(1) = 0$? Combien vaut $\tilde{u}(x_i)$?
2. Multiplier $-u'' = f$ par ϕ_j pour $j = 1, \dots, n$, intégrer de 0 à 1 en utilisant une intégration par parties pour exprimer le membre de gauche.
3. Remplacer dans l'équation obtenue u par $\tilde{u}$.
4. Exprimer $\tilde{u}'$
5. Quel problème $(U_i)_{i=1,\dots,n}$ vérifie-t-il ?
6. Si on pose $U = (U_i)_{i=1,\dots,n}$, donner la matrice A et le vecteur F tels que $AU = F$.

On vient de voir comment transformer un problème de résolution d'EDP en un problème d'algèbre linéaire. Afin de pouvoir adapter cette démarche à des problèmes plus complexes (plusieurs variables d'espace, solution à plusieurs dimensions, éléments finis de plus haut degré) on va refaire ce qu'on vient de faire sur un problème un tout petit peu plus complexe en utilisant une méthode plus lourde mais qui s'adaptera.

Exercice 2.3 On souhaite encore résoudre le problème (2.1). Pour cela on place un maillage non régulier de $n+2$ nœuds sur $[0,1]$. Par définition on appelle x_i la coordonnée du i^{ieme} nœud p_i. On suppose $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_i < x_{i+1} < \cdots < x_{n+1} = 1$. On numérote les segments $]p_{i-1}, p_i[$ de la manière suivante : le numéro de $]p_{i-1}, p_i[$ est i pour i variant de 1 à $n+1$. Les fonction ϕ_i ont la même définition que ci-dessus.

1. Refaire brièvement les questions **2.** à **3.** de l'exercice 2.1 et l'exercice 2.2.

2. À quels coefficients A_{lk} de A le segment i apporte-t-il une contribution non nulle ? Exprimer cette contribution en fonction de x_{i-1} et x_i.

3. Écrire un algorithme permettant de construire la matrice A en réalisant une boucle sur les segments.

Exercice 2.4 On souhaite encore résoudre le problème (2.1). Pour cela on place un maillage non régulier de $n+2$ nœuds (p_i) sur $[0,1]$. Ici on suppose que le maillage n'est pas structuré, c'est à dire qu'on ne suppose plus que les nœuds sont rangés par ordre croissant. On suppose que l'on dispose d'une fonction $C : \{0, 1 \ldots n+1\} \to [0,1]$ injective qui est telle que $C(i)$ est l'abscisse de p_i et qui vérifie $C(0) = 0$ et $C(n+1) = 1$. On suppose aussi que l'on dispose d'une fonction $P : \{1, 2, \ldots, n+1\} \to \{0, 1, \ldots, n\}$ et d'une fonction $S : \{0, 1, \ldots, n\} \to \{1, 2 \ldots, n+1\}$ telle que $P(i)$ est le nœud précédent p_i dans le maillage et $S(i)$ le nœud suivant p_i dans le maillage. On suppose enfin que l'on a numéroté les $n+1$ segments, c'est à dire que l'on dispose d'une fonction $E : \{1, 2, \ldots, n+1\} \to \{0, 1, \ldots, n\} \times \{1, 2, \ldots, n+1\}$ qui est telle que $E_1(i)$ est le nœud inférieur du i^{ieme} segment et $E_2(i)$ le nœud supérieur.

1. Montrer que l'on doit avoir $S(E_1(i)) = E_2(i)$ et $P(E_2(i)) = E_1(i)$ pour tout $i = 1, \ldots n+1$

On définit les fonctions ϕ_i par : ϕ_i est continue sur $[0,1]$ et affine sur chaque intervalle $]E_1(k), E_2(k)[$ $(k = 1, \ldots n+1)$ et $\phi_i(p_j) = \delta_{ij}$. On cherche encore une approximation de u sous la forme (2.2) avec cette nouvelle définition des ϕ_i.

2. Refaire brièvement les questions **1.** à **6.** de l'exercice 2.2.

3. À quels coefficients A_{lk} de A le segment i apporte-t-il une contribution non nulle ? Exprimer cette contribution en fonction de $E_1(i)$ et $E_2(i)$.

4. Écrire un algorithme permettant de construire la matrice A en réalisant une boucle sur les segments.

3 Estimation de l'erreur lors de la résolution de $-u'' = f$ sur $[0,1]$ par éléments finis

Dans cette section on effectue un calcul d'erreur représentatif des calculs d'erreur associés à l'utilisation des élément finis.

Dans cette section on utilise la définition suivante de l'espace de Sobolev $H^1([0,1])$.

$$H^1([0,1]) = \Big\{ h \in L^2([0,1]); \exists g \in L^2([0,1]) \text{ telle que } \int_0^1 h\varphi'\,dx = -\int_0^1 g\varphi\,dx$$
$$\forall \varphi \in C^1([0,1]) \text{ telle que } \varphi(0) = \varphi(1) = 0 \Big\}. \quad (3.1)$$

Dans la définition ci-dessus on dit que g est la *dérivée au sens des distributions* de h. On note $g = h'$. L'espace $H^1([0,1])$ muni de la norme $\|h\|_{H^1([0,1])} = \sqrt{\|h\|^2_{L^2([0,1])} + \|h'\|^2_{L^2([0,1])}}$ est un *espace de Hilbert séparable*.

On définit également l'espace de Sobolev $H^1_0([0,1])$ par

$$H^1_0([0,1]) = \Big\{ h \in H^1([0,1]) \text{ telle qu'il existe une suite } (h_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ vérifiant :}$$
$$\forall n \in \mathbb{N}, h_n \in C^1([0,1]) \text{ et } h_n(0) = h_n(1) = 0, \text{ telle que } \lim_{n\to\infty} \|h - h_n\|_{H^1([0,1])} = 0 \Big\}. \quad (3.2)$$

L'espace $H_0^1([0,1])$ peut être muni de la norme $\|h\|_{H^1([0,1])}$ ou de la norme $\|h\|_{H_0^1([0,1])} = \|h'\|_{L^2([0,1])}$. Ces deux normes sont équivalentes sur $H_0^1([0,1])$ et en font un *espace de Hilbert séparable*.

EXERCICE 3.1 On se place ici dans le contexte des exercices 2.1 et 2.2.
1. Écrire la formule de Cauchy-Schwarz pour deux fonctions de $L^2([0,1])$.
2. Montrer que pour toute fonction $\psi \in C^1([0,1])$ telle que $\psi(0) = \psi(1) = 0$ la solution de (2.1) vérifie : $\int_0^1 u'(x)\psi'(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\psi(x)$.
REMARQUE : cette formule est vraie pour toute fonction φ continue sur $[0,1]$ et affine sur chaque intervalle $]p_i, p_{i+1}[$ et telle que $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$. Expliquer pourquoi
3. Montrer que pour toute fonction φ continue sur $[0,1]$ et affine sur chaque intervalle $]p_i, p_{i+1}[$ et telle que $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$, $\tilde{u}$ vérifie : $\int_0^1 \tilde{u}'(x)\varphi'(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\varphi(x)$.
On appelle W la fonction continue sur $[0,1]$ et affine sur chaque intervalle $]p_i, p_{i+1}[$ et telle que $W(0) = W(1) = 0$, et qui minimise $\|u - \varphi\|_{H_0^1([0,1])}$ pour φ variant dans l'espace des fonctions continues sur $[0,1]$ et affines sur chaque intervalle $]p_i, p_{i+1}[$ et telles que $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$.
4. En utilisant les questions **2.** et **3.** avec la fonction $\tilde{u} - W$, montrer que l'on a $\int_0^1 ((u-\tilde{u})'(x))^2\,dx = \int_0^1 (u - \tilde{u})'(x)(u - W)'(x)\,dx$
5. En appliquant la question **1.** , Montrer que $\|u - \tilde{u}\|_{H_0^1([0,1])} \leq \|u - W\|_{H_0^1([0,1])}$.
6. En déduire $\tilde{u} = W$.

Pour être complet, il faut montrer que les deux normes $\|h\|_{H_0^1([0,1])}$ et $\|h\|_{H^1([0,1])}$ sont bien équivalentes sur $H_0^1([0,1])$.

EXERCICE 3.2
1. Montrer que pour tout $h \in H_0^1([0,1])$ on a $\|h\|_{H_0^1([0,1])} \leq \|h\|_{H^1([0,1])}$
2. Montrer que pour tout $h \in H_0^1([0,1])$ on a $h(x) = \int_0^x h'(\xi)\,d\xi$ (pp).
3. En utilisant la formule de Cauchy-Schwarz déduire de la question **2.** que $\sup_{x\in[0,1]} |h(x)| \leq \|h'\|_{L^2([0,1])}$.
4. Déduire que $\|h\|_{L^2([0,1])} \leq \|h'\|_{L^2([0,1])}$.
5. Déduire finalement que $\|h\|_{H^1([0,1])} \leq \sqrt{2}\|h\|_{H_0^1([0,1])}$.
6. Que peut-on dire des deux normes $\|h\|_{H^1([0,1])}$ et $\|h\|_{H_0^1([0,1])}$ sur $H_0^1([0,1])$?

4 Prise en compte de conditions aux limites non nulles

Comment aborder le problème suivant à l'aide de ce qui a été fait ?

$$\text{Trouver } u : [0,1] \to \mathbb{R} \text{ telle que } -u'' = f \text{ sur } [0,1] \text{ et telle que } u(0) = a, u(1) = b. \tag{4.1}$$

pour a et b deux réels.

EXERCICE 4.1
1. Trouver une fonction R deux fois continûment dérivable sur $[0,1]$ telle que $R(0) = a$ et $R(1) = b$.
2. On pose $w = u - R$ où u est la solution de (4.1). Quelle edp w satisfait-elle ?
3. En déduire une méthode pour calculer une approximation de u.

Nous allons maintenant étudier une version plus dans l'esprit “éléments finis” du traitement ce problème.

Exercice 4.2
1. On définit R par $R = a\phi_0 + b\phi_{n+1}$. A-t-on $R(0) = a$ et $R(0) = b$?
2. On pose $w = u - R$ où u est la solution de (4.1). Quelle edp w satisfait-elle ? Il y a-t-il un problème avec R'' ?
3. En suivant la démarche de l'exercice 2.2, déduire une méthode pour calculer une approximation de u.

Deuxième partie

Quelques fondements théoriques

5 Distributions

6 Utilisation des distributions pour les edp

Exercice 6.1 Dans cet exercice on montre que des fonctions non dérivables, et même des objets encore moins réguliers que ça, peuvent être solution d'edp.
Soit l'edp suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \tag{6.1}$$

1. Montrer que pour toute fonction g continûment dérivable sur $\mathbb{R}$, la fonction u définie sur $\mathbb{R}^2$ par $u(t,x) = g(x-t)$ vérifie (6.1) au sens classique.
2. Montrer que pour toute fonction g sur $\mathbb{R}$, la fonction u définie sur $\mathbb{R}^2$ par $u(t,x) = g(x-t)$ vérifie (6.1) au sens des distributions.
3. On définit la distribution de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$: $\delta_{[x=t]}$ par

$$< \delta_{[x=t]}, \varphi >= \sqrt{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(s,s)\, ds. \tag{6.2}$$

Montrer que $\delta_{[x=t]}$ est solution de (6.1).

On va maintenant écrire plusieurs edp usuelles au sens des distributions.

Exercice 6.2 En pratique on a souvent le choix de la formulation “au sens des distributions” de l'edp que l'on veut traiter. Cet exercice illustre ce fait.
1. On s'intéresse au problème (2.1). Écrire 3 formulations “au sens des distributions” de (2.1) ; une faisant intervenir u'' une seconde u' et une troisième u.
2. On étudie la troisième (celle faisant intervenir u). On suppose que u est dans $L^2([0,1])$, écrire la formulation “au sens des distributions” faisant intervenir des intégrales. Pour quelles fonctions test peut-on écrire cette formulation ?
3. On étudie la deuxième (celle faisant intervenir u'). On suppose que u est dans $H_0^1([0,1])$ ”$=$ $\{v \in L^2[0,1]$ t.q. $v' \in L^2[0,1]$ et $v(0) = v(1) = 0\}$” , écrire la formulation “au sens des distributions” faisant intervenir des intégrales. Pour quelles fonctions test peut-on écrire cette formulation ?

Dans l'exercice 6.1 on a donné une définition entre guillemets de $H_0^1([0,1])$ sa définition précise est (3.2). On peut aussi dire que est $H^1([0,1]) = \{v \in L^2([0,1])\ t.q.\ v' \in L^2([0,1])\}$, qu'il est muni de la norme $\|h\|_{H^1([0,1])} = \|h\|_{L^2([0,1])} + \|h'\|_{L^2([0,1])}$ et que $H_0^1([0,1]) = \overline{\mathcal{D}(]0,1[)}^{H^1([0,1])}$.

EXERCICE 6.3 Soit Ω un ouvert borné et connexe de $\mathbb{R}^2$ de frontière Γ régulière et $f \in L^2(\Omega)$. On considère le problème suivant :

$$-\Delta u + u = f, \text{ dans } \Omega, \text{ et } u = 0 \text{ sur } \Gamma. \tag{6.3}$$

1. Écrire des formulations "au sens des distributions" de (6.3) une faisant intervenir Δu et u, l'autre ∇u et u et la troisième u.
2. Comment, dans ces formulations, peut-on prendre en compte la condition aux limites ?
3. Écrire une formulations "au sens des distributions" de (6.3) faisant intervenir des intégrales et la fonction ∇u. Bien préciser à quel espace u est censée appartenir.
4. Pour quelles fonctions test peut-on écrire cette formulation ?
5. En utilisant u comme fonction test dans cette formulation, déduire qu'il est cohérent de chercher la solution $u \in H_0^1(\Omega)$.

On a vu la formulation "au sens des distributions" (on dit aussi formulation faible) d'un problème à une dimension dont la solution est à valeurs réelles (exercice 6.2) et d'un problème à deux dimensions dont la solution est à valeurs réelles (exercice 6.3). On va maintenant voir un problème à deux dimensions dont la solution est à valeurs dans $\mathbb{R}^2$. Il s'agit du système de l'élasticité linéaire 2D.

EXERCICE 6.4 Soit Ω en ouvert borné et connexe de $\mathbb{R}^2$ de frontière Γ régulière. On suppose que $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ (la mesure linéique de Γ_0 est strictement positive). Ω représente la configuration d'un objet élastique lorsqu'il n'est soumis à aucune force. On considère $v : \Omega \to \mathbb{R}^2$ qui donne pour tout point de Ω, le déplacement qu'il subit (on suppose que ce déplacement est petit). On suppose que l'objet est encastré sur son coté Γ_0. Ceci est traduit par

$$v = 0 \text{ sur } \Gamma_0. \tag{6.4}$$

On appelle tenseur des déformations la matrice suivante

$$\varepsilon(v) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial v_1}{\partial x_1} & \dfrac{1}{2}(\dfrac{\partial v_1}{\partial x_2} + \dfrac{\partial v_2}{\partial x_1}) \\ \dfrac{1}{2}(\dfrac{\partial v_1}{\partial x_2} + \dfrac{\partial v_2}{\partial x_1}) & \dfrac{\partial v_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}, \tag{6.5}$$

puis on définit, pour deux constantes λ et μ le tenseur des contraintes :

$$\sigma(v) = \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22})I_d + 2\mu\varepsilon. \tag{6.6}$$

On considère ensuite une fonction $f \in (L^2(\Omega))^2$ modélisant les forces agissant sur tout l'objet (par exemple le poids) et une fonction $g \in (L^2(\Gamma_1))^2$ modélisant les forces agissant sur Γ_1 (par exemple une pression)
L'edp permettant le calcul de v est la suivante :

$$-\frac{\partial \sigma_{11}(v)}{\partial x_1} - \frac{\partial \sigma_{12}(v)}{\partial x_2} = f_1 \tag{6.7}$$

$$-\frac{\partial \sigma_{21}(v)}{\partial x_1} - \frac{\partial \sigma_{22}(v)}{\partial x_2} = f_2. \tag{6.8}$$

Cette edp est munie des conditions aux limites (6.4) et

$$\sigma(v)\nu = g \text{ sur } \Gamma_1 \tag{6.9}$$

où ν est le vecteur de norme 1, orthogonal à Γ_1 et pointant vers l'extérieur de Ω.
1. Effectuer le produit scalaire de (6.7) - (6.8) par une fonction $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) \in (\mathcal{D}(\Omega))^2$ et déduire

une formulation au sens des distributions de (6.7).
2. On suppose que v est dans $H^1(\Omega)$ pour quelles fonctions test peut on écrire cette formulation au sens des distributions.
On va utiliser la formule de Stokes suivante valable pour des fonctions régulières :

$$
\begin{aligned}
-\int_\Omega \Big(\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1}+\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_2}\Big)\varphi_1+\Big(\frac{\partial\sigma_{21}}{\partial x_1}+\frac{\partial\sigma_{22}}{\partial x_2}\Big)\varphi_2\,dx_1dx_2 \\
=\int_\Omega \sigma_{11}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}+\sigma_{12}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2}+\sigma_{21}\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_1}+\sigma_{22}\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2}\,dx_1dx_2-\int_\Gamma \sigma\nu\cdot\varphi\,dl
\end{aligned}
\tag{6.10}
$$

3. Sachant que cette formule reste vraie lorsque les fonctions sont dans $H^1(\Omega)$, écrire une formulation faible de (6.7) - (6.8) - (6.4) - (6.9)

7 Mise en place des éléments finis sur un problème variationnel abstrait

On présente un cadre général abstrait dans lequel entrent de nombreux problèmes auxquels on applique la méthode des éléments finis.
On se donne un espace de Hilbert V (espace vectoriel muni d'un produit scalaire, complet pour la norme associée à ce produit scalaire) et on note $\|\ \|$ sa norme. On se donne également une une forme bilinéaire symétrique $a(\cdot,\cdot)$ telle que

$$\exists c\geq 0, \forall u\in V, \forall v\in V, a(u,v)\leq c\|u\|\|v\|, \tag{7.1}$$

$$\exists \alpha > 0, \forall v\in V, a(v,v)\geq \alpha\|v\|^2, \tag{7.2}$$

et une forme linéaire $L(\cdot)$ vérifiant

$$\exists c', \forall v\in V, L(v)\leq c'\|v\|. \tag{7.3}$$

On considère le problème :

$$\text{Trouver } u\in V \text{ telle que } \forall v\in V, a(u,v)=L(v). \tag{7.4}$$

Exercice 7.1 Pour chaque formulation faible établie dans les exercices 6.2, 6.3 et 6.4 dire si elle entre dans le cadre décrit ici. Si c'est le cas donner explicitement V, $a(\cdot,\cdot)$ et $L(\cdot)$.

Exercice 7.2 Soit n fonctions linéairement indépendantes de V : $\phi_1,\phi_2,\ldots,\phi_n$. On cherche $\tilde u$ une approximation de u sous la forme

$$\tilde u=\sum_{i=1}^n U_i\phi_i. \tag{7.5}$$

1. Dans (7.4) remplacer v par ϕ_i pour $i=1,\ldots,n$.
2. Dans l'équation obtenue remplacer u par $\tilde u$.
3. Déduire le système satisfait par $U=(U_i)_{i=1,\ldots,n}$.
4. En procédant d'une façon analogue à l'exercice 3.1, montrer que $a(u-\tilde u,u-\tilde u)=a(u-\tilde u,u-P(u))$ où $P(\tilde u)$ est la projection de u sur l'espace vectoriel engendré par les $(\phi_i)_{i=1,\ldots,n}$.
5. Déduire que $\|u-\tilde u\|\leq \dfrac{c}{\alpha}\|u-P(\tilde u)\|$.

Troisième partie

Mise en place des éléments finis pour quelques exemples

8 Résolution de l'équation de la chaleur avec un maillage régulier

Soit $\Omega =]0,1[^2$ de frontière Γ et $f \in L^2(\Omega)$. On considère le problème suivant :

$$-\Delta u + u = f, \text{ dans } \Omega, \text{ et } u = 0 \text{ sur } \Gamma. \tag{8.1}$$

EXERCICE 8.1 Rappeler la "bonne" formulation faible de (8.1)

EXERCICE 8.2 On construit sur $\Omega =]0,1[^2$ un maillage régulier de la manière suivante. On place n lignes de n nœuds. La première ligne de nœuds est située sur l'axe des x, avec le premier nœud en $(0,0)$ et le dernier en $(1,0)$. La dernière ligne de nœuds est située sur le segment supérieur de Ω, avec le premier nœud en $(0,1)$ et le dernier en $(1,1)$. On numérote les nœuds de la manière suivante : le nœud numéro 1 est situé en $(0,0)$ le numéro 2 est celui situé immédiatement à la droite du numéro 1. Le nœud numéro n est en $(1,0)$ et le nœud numéro $n+1$ est celui situé immédiatement au dessus de $(0,0)$ etc.
2. Représenter les nœuds sur un schéma.
3. Combien y-a-t'il de nœuds ? Donner les coordonnées du nœud numéro j.
On considère le maillage en triangles suivant : le triangle numéro j (pour $j = 1, \dots n^2-1$) est constitué du nœud numéro j du nœud immédiatement à sa droite (si il existe) et du nœud immédiatement au dessus (si il existe). le triangle numéro $j + n^2$ (pour $j = 2, \dots n^2$) est constitué du nœud numéro j du nœud immédiatement à sa gauche (si il existe) et du nœud immédiatement en dessous (si il existe).
4. Représenter le maillage sur un schéma.
5. Repérer les triangles numéro 1, 4, $n-1$, $n+1$, $n+2+n^2$, $2n+4$. Les triangles $1+n^2$, $(n-1)n+1$ existent-ils ?
On définit les fonctions ϕ_i par : ϕ_i est continue sur Ω, affine sur chaque triangle du maillage et $\phi_i(p_j) = \delta_{ij}$ où p_j désigne le nœud numéro j.
6. Représenter le support de fonctions ϕ_i, pour plusieurs i correspondant à des nœuds situés dans le domaine, sur la frontière, et dans les coins.

EXERCICE 8.3 On cherche $\tilde{u}$ une approximation de u sous la forme

$$\tilde{u} = \sum_{i \in I} U_i \phi_i, \tag{8.2}$$

où I est un ensemble tel que $\tilde{u} = 0$ sur Γ.
1. Déterminer un I convenable.
2. Dans la formulation faible de (8.1) établie dans l'exercice 8.1, remplacer u par $\tilde{u}$ et φ par ϕ_j pour $j \in I$.
3. On pose $U = (U_i)_{i \in I}$, quel problème U vérifie-t-il ?
4. Assembler la matrice A et le vecteur F tels que $AU = F$.

EXERCICE 8.4 Cet exercice consiste à assembler la matrice A de la question 4 de l'exercice 8.3 en faisant une boucle sur les triangles.
1. Quels sont les nœuds qui forment le triangle numéro i ? Rappeler les coordonées de ces nœuds.
2. À quels coefficients A_{lk} de A le triangle numéro i apporte-t-il une contribution non nulle. Calculer ces contributions en fonction des coordonées des nœuds du triangle.
3. Écrire un algorithme permettant de construire la matrice A en réalisant une boucle sur les triangles.

9 Résolution de l'équation de la chaleur avec un maillage non structuré

Soit Ω un ouvert borné connexe de frontière Γ régulière et $f \in L^2(\Omega)$. On considère le problème suivant :

$$-\Delta u = f, \text{ dans } \Omega, \text{ et } u = 0 \text{ sur } \Gamma. \tag{9.1}$$

EXERCICE 9.1 On souhaite résoudre le problème (9.2). Pour cela on place sur Ω un maillage non régulier constitué de m nœuds, numérotés de 1 à m et de t triangles, numérotés de 1 à t. Plus précisément, on suppose que l'on dispose d'une fonction $C : \{1 \dots m\} \to \Omega$ telle que $C(i) = (C_1(i), C_2(i))$ sont les coordonnées du nœud numéro i. On dispose également d'une fonction $I : \{1 \dots m\} \to \{0, 1\}$ telle que $I(i) = 1$ si le nœud numéro i est à l'intérieur de Ω et $I(i) = 0$ si le nœud numéro i est sur Γ. (On suppose ici qu'il existe un indice n tel que $I(i) = 1$ pour $i \leq n$ et $I(i) = 0$ pour $i \geq n + 1$.) Enfin on dispose d'une fonction $E\{1 \dots t\} \to \mathbb{N}^3$ telle $E(k) = (E_1(k), E_2(k), E_3(k))$ soient les trois nœuds composant le triangle k.

On définit les fonctions ϕ_i pour $i = 1, \dots m$ par : ϕ_i est continue sur Ω, affine sur chaque triangle du maillage et $\phi_i(C(j)) = \delta_{ij}$. On cherche $\tilde{u}$ une approximation de u sous la forme

$$\tilde{u} = \sum_{i=1}^{n} U_i \phi_i, \tag{9.2}$$

1. Écrire la “bonne” formulation faible de (9.1).
2. Remplacer dans cette formulation faible u par $\tilde{u}$ et φ par ϕ_j pour $j = 1, \dots n$.
3. On pose $U = (U_i)_{i=1,\dots n}$, U est solution de $AU = F$. Rappeler la définition de A_{ij}.
4. À quels coefficients A_{ij} de A le triangle numéro k apporte-t-il une contribution non nulle ?
5. Calculer ces contributions.
6. Écrire l'algorithme permettant d'assembler la matrice A en faisant une boucle sur les triangles.

10 Notion d'éléments finis de Lagrange

On a vu, dans les exercices précédents, que résoudre une edp ayant une formulation faible de la forme (7.4) revient à résoudre un système linéaire $AU = F$. On a vu que l"assemblage de la matrice A se ramenait à faire une boucle sur les triangles et, pour chaque triangle, à calculer une intégrale. Pour généraliser cette procédure à des éléments finis qui ne sont pas forcément des triangles avec trois degrés de liberté, on introduit la notion d'éléments finis de Lagrange.
Un élément fini de Lagrange (K, Σ, P) est défini par la donnée de
- Une partie compacte K de $\mathbb{R}^n$
- Un ensemble fini $\Sigma = \{a_1, \dots, a_N\}$
- Un espace vectoriel P, de dimension finie, de fonctions de $K \to \mathbb{R}$.
  P est supposé être unisolvant, c'est à dire, tel que : $\forall (\alpha_1, \dots, \alpha_N) \in \mathbb{R}^N, \exists! p \in P, p(a_j) = \alpha_j, \forall j = 1 \dots, N$.

Exercice 10.1
1. Montrer qu'il existe une unique fonction $p_i \in P$ telle que $p_i(a_j) = \delta_{ij}$.
2. Plus généralement, montrer que pour toute fonction $v : K \to \mathbb{R}$ il existe une unique fonction $\Pi_P v \in P$ telle que $\Pi_P v(a_j) = v(a_j)$.
3. Donner l'expression de $\Pi_P v$ en fonction des p_i et des $v(a_i)$.
4. Si $a(.,.)$ est une forme bilinéaire symétrique donner l'expression de $a(\Pi_P v, p_i)$ pour $i = 1 \ldots, N$

Exercice 10.2 Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ et $a(.,.)$ une forme bilinéaire symétrique sur un espace vectoriel normé V de fonctions $\Omega \to \mathbb{R}$, vérifiant (7.1) et (7.2) et $L(.)$ une forme linéaire sur V vérifiant (7.3). On cherche une solution approchée au problème (7.4).
Pour cela on suppose qu'il existe une famille l'éléments finis $(K_l, \Sigma_l, P_l)_{l=1,\ldots,M}$ telle que $\Omega = \cup_{l=1,\ldots,M} K_l$ et $\mathrm{Int}(K_l) \cap \mathrm{Int}(K_k) = \emptyset$ si $l \neq k$. On définit alors $S = \cup_{l=1,\ldots,M} \Sigma_l$ et on numérote les éléments de S de 1 à Q, i.e. $S = \{s_1, \ldots, s_Q\}$. On considère les fonctions $(\phi_i)_{i=1,\ldots,Q}$ définies par $\phi_{i|\Sigma_l} \in P_l$ pour tout $l = l = 1, \ldots, M$ et $\phi_i(s_j) = \delta_{ij}$.
1. Dans (7.4) remplacer v par ϕ_i pour $i = 1, \ldots, Q$.
2. Dans l'équation obtenue remplacer u par $\tilde{u} = \sum_{i=1}^{Q} U_i \phi_i$.
3. Déduire le système satisfait $AU = F$ par $U = (U_i)_{i=1,\ldots,Q}$.
4. À quels éléments A_{ij} l'éléments K_l apporte-t-il une contribution non nulle.
5. Écrire l'algorithme permettant d'assembler la matrice A en faisant une boucle sur les éléments.