Modélisation de la morpho-dynamique des dunes dans l'océan côtier

Emmanuel Frénod

Lab-STICC, Université de Bretagne-Sud, Vannes, France

Travail en collaboration avec Ibrahima Faye et Diaraf Seck

Exposé dans le cadre d'une invitation du Département de Mathématiques
Université Cheikh Anta Diop de Dakar

Février 2010

Motivations

- Objectif du programme de recherche : Simuler la dynamique des bancs de sable à proximité des côtes dans les zones soumises à la marée
- Problématique : À chaque marée une masse importante de sédiment va et vient avec un effet résultant faible
- Objectif de cette étude : Modèle duquel il sera facile de supprimer la présence explicite de l'oscillation de marée
- Dit autrement : Modèle traitable avec des méthodes d'analyse asymptotique ou d'homogénéisation

Motivations

- Objectif du programme de recherche : Simuler la dynamique des bancs de sable à proximité des côtes dans les zones soumises à la marée
- Problématique : À chaque marée une masse importante de sédiment va et vient avec un effet résultant faible
- Objectif de cette étude : Modèle duquel il sera facile de supprimer la présence explicite de l'oscillation de marée

- Dit autrement : Modèle traitable avec des méthodes d'analyse asymptotique ou d'homogénéisation

Méthodologie

- Modèle du phénomène valable à toutes les échelles
- Tailles caractéristiques des phénomènes ciblés
- Rapports de ces tailles ($\rightarrow \epsilon$)
- Modèle adimensionné paramétré par ϵ

Construction d'un modèle de référence

Équation modélisant le transport de sable

Eq. :

$$\frac{\partial z}{\partial t} + \frac{1}{1-p}\nabla \cdot q = 0.$$

où :

Temps : $t \in [0, T)$, pour $T > 0$.
Position $x = (x_1, x_2) \in \Omega$, $(\Omega \subset \mathbb{R}^2)$.

Altitude $z = z(t, x)$ du fond sableux.
Porosité p du sable.

et avec :

Flux de volume de sable $q = q(x, t)$:

$$q = q_f - |q_f|\lambda\nabla z.$$

où :

$\frac{1}{\lambda}$: Pente max. du fond sans courant.
$q_f = q_f(x, t)$: Flux de volume de sable induit par le courant sur fond plat.

Flux de volume de sable induit par le courant sur fond plat

Expression de $q_f(x,t)$:

$$q_f = \alpha\,\chi(D_G(|\tau_b| - \tau_c))\,\frac{\tau_b}{|\tau_b|}.$$

où :

$$\tau_b = \rho\frac{|\mathbf{u}|^2}{C^2}\,\frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|}.$$

Avec : $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x,t)$ vitesse de l'eau.

et où :

ρ : Densité de l'eau.
$C = \ln(\frac{12d}{3D_G})$.
d : Hauteur d'eau.
D_G : Diamètre des grains de sable

$$\tau_c = \rho\frac{u_c^2}{C^2}.$$

$$\begin{aligned}\chi(\sigma) &= 0 && \text{si } \sigma < 0,\\ &= |\sigma^{3/2}| && \text{si } \sigma \geq 0.\end{aligned}$$

Modèle de référence

$$\frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\alpha}{1-p}\nabla \cdot \left[\chi\left(D_G\, \rho\, \frac{|\mathbf{u}|^2 - {u_c}^2}{C^2}\right)\left(\frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|} - \lambda \nabla z\right)\right] = 0.$$

Scaling

variables et champs adimensionnés

grandeurs caractéristiques :

- Temps caractéristique : $\bar{t}$.
- Longueur caractéristique : $\bar{L}$.
- Hauteur caractéristique des dunes : $\bar{z}$.
- Vitesse caractéristique de l'eau : $\bar{u}$.
- Hauteur moyenne de l'eau : H .
- Variation caractéristique de hauteur d'eau due à la marée : $\bar{M}$.

Variables et champs adimensionnés :

- $t = \bar{t}t'$.
- $x = \bar{L}x'$.
- $z'(t', x') = \frac{1}{\bar{z}} z(\bar{t}t', \bar{L}x')$.
- $\mathbf{u}'(t', x') = \frac{1}{\bar{u}} \mathbf{u}(\bar{t}t', \bar{L}x')$.
- $\mathbf{m}'(t', x') = \frac{1}{\bar{M}} (d(\bar{t}t', \bar{L}x') - H)$.

variables et champs adimensionnés

grandeurs caractéristiques :

- Temps caractéristique : $\bar{t}$.
- Longueur caractéristique : $\bar{L}$.
- Hauteur caractéristique des dunes : $\bar{z}$.
- Vitesse caractéristique de l'eau : $\bar{u}$.
- Hauteur moyenne de l'eau : H .
- Variation caractéristique de hauteur d'eau due à la marée : $\bar{M}$.

Variables et champs adimensionnés :

- $t = \bar{t}t'$.
- $x = \bar{L}x'$.
- $z'(t', x') = \frac{1}{\bar{z}} z(\bar{t}t', \bar{L}x')$.
- $\mathbf{u}'(t', x') = \frac{1}{\bar{u}} \mathbf{u}(\bar{t}t', \bar{L}x')$.
- $\mathbf{m}'(t', x') = \frac{1}{\bar{M}} (d(\bar{t}t', \bar{L}x') - H)$.

variables et champs adimensionnés

grandeurs caractéristiques :

- Temps caractéristique : $\bar{t}$.
- Longueur caractéristique : $\bar{L}$.
- Hauteur caractéristique des dunes : $\bar{z}$.
- Vitesse caractéristique de l'eau : $\bar{u}$.
- Hauteur moyenne de l'eau : H .
- Variation caractéristique de hauteur d'eau due à la marée : $\bar{M}$.

Variables et champs adimensionnés :

- $t = \bar{t}t'$.
- $x = \bar{L}x'$.
- $z'(t', x') = \dfrac{1}{\bar{z}} z(\bar{t}t', \bar{L}x')$.
- $\mathbf{u}'(t', x') = \dfrac{1}{\bar{u}} \mathbf{u}(\bar{t}t', \bar{L}x')$.
- $\mathbf{m}'(t', x') = \dfrac{1}{\bar{M}} (d(\bar{t}t', \bar{L}x') - H)$.

On injecte dans l'équation de référence :

$$\frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\alpha}{1-p}\nabla \cdot \left[\chi\left(D_G\, \rho\, \frac{|\mathbf{u}|^2 - {u_c}^2}{C^2}\right)\left(\frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|} - \lambda \nabla z\right)\right] = 0.$$

On calcule :

$$C = \ln(\frac{12d}{3D_G}) = \ln\left(\frac{4H}{D_G}\right) + \ln\left(1 + \frac{\bar{M}}{H}\mathbf{m}'\right) \simeq \ln\left(\frac{4H}{D_G}\right) + \frac{\bar{M}}{H}\mathbf{m}'.$$

$$\text{Donc : } \frac{1}{C^3} \simeq \frac{1}{\left(\ln\left(\frac{4H}{D_G}\right)\right)^3}\left(1 - 3\frac{\bar{M}}{H\ln\left(\frac{4H}{D_G}\right)}\mathbf{m}'\right).$$

$$\nabla z(\bar{t}t', \bar{L}x') = \frac{1}{\bar{z}\bar{L}}\nabla' z'(t', x').$$

Equation adimensionnée

$$\frac{\partial z'}{\partial t'} - \frac{\lambda}{1-p}\,\alpha\,\frac{\bar{t}\bar{u}^3(\rho D_G)^{3/2}}{\left(\ln(\frac{4H}{D_G})\right)^3 \bar{L}^2}\,\nabla'\cdot\left(\left(1-3\frac{\bar{M}}{H\ln(\frac{4H}{D_G})}\mathbf{m}'\right)\chi\!\left(|\mathbf{u}'|^2-\frac{{u_c}^2}{\bar{u}^2}\right)\nabla' z'\right) = \frac{1}{1-p}\,\alpha\,\frac{\bar{t}\bar{u}^3(\rho D_G)^{3/2}}{\left(\ln(\frac{4H}{D_G})\right)^3 \bar{L}\bar{z}}\,\nabla'\cdot\left(\left(1-3\frac{\bar{M}}{H\ln(\frac{4H}{D_G})}\mathbf{m}'\right)\chi\!\left(|\mathbf{u}'|^2-\frac{{u_c}^2}{\bar{u}^2}\right)\frac{\mathbf{u}'}{|\mathbf{u}'|}\right).$$

Régime

- $\dfrac{\lambda}{1-p} = 1\,,\ \dfrac{1}{1-p} = 2.$
- $D_G \sim 0.1mm = 10^{-4}\ m.$
- $\bar{u} = 1\ m/s, \quad H = 50\ m, \quad \bar{M} = 5\ m, \quad \dfrac{u_c^2}{\bar{u}^2} = 0.$
- $\bar{z} = 1\ m\,,\ \ \bar{L} = 10\ m.$
- $\bar{t} = 100\ jours \sim 2400\ heures \sim 8.6\ 10^6\ s.$

  À comparer à la période de marée principale :
- $\dfrac{1}{\bar{\omega}} \sim 13\ hours \sim 4.7\ 10^4\ s.$

Petit paramètre :

$$\bar{t}\bar{\omega} \sim \frac{1}{200} = \epsilon.$$

Régime

- $\dfrac{\lambda}{1-p} = 1\,,\ \dfrac{1}{1-p} = 2.$
- $D_G \sim 0.1mm = 10^{-4}\ m.$
- $\bar{u} = 1\ m/s, \quad H = 50\ m, \quad \bar{M} = 5\ m, \quad \dfrac{u_c^2}{\bar{u}^2} = 0.$
- $\bar{z} = 1\ m\,,\ \bar{L} = 10\ m.$
- $\bar{t} = 100\ jours \sim 2400\ heures \sim 8.6\ 10^6\ s.$

  À comparer à la période de marée principale :
- $\dfrac{1}{\bar{\omega}} \sim 13\ hours \sim 4.7\ 10^4\ s.$

Petit paramètre :

$$\bar{t}\bar{\omega} \sim \frac{1}{200} = \epsilon.$$

Régime

- $\dfrac{\lambda}{1-p} = 1\,, \;\; \dfrac{1}{1-p} = 2.$
- $D_G \sim 0.1mm = 10^{-4}\ m.$
- $\bar{u} = 1\ m/s, \quad H = 50\ m, \quad \bar{M} = 5\ m, \quad \dfrac{u_c^2}{\bar{u}^2} = 0.$
- $\bar{z} = 1\ m\,, \;\; \bar{L} = 10\ m.$
- $\bar{t} = 100\,jours \sim 2400\ heures \sim 8.6\ 10^6\ s.$

  À comparer à la période de marée principale :
- $\dfrac{1}{\bar{\omega}} \sim 13\ hours \sim 4.7\ 10^4\ s.$

Petit paramètre :

$$\bar{t}\bar{\omega} \sim \frac{1}{200} = \epsilon.$$

Expression des coefficients en fonction de ϵ

$$\frac{\lambda}{1-p}\alpha\frac{\bar{t}\bar{u}^3(\rho D_G)^{3/2}}{\left(\ln(\frac{4H}{D_G})\right)^3\bar{L}^2}\sim 90\sim\frac{1}{2\epsilon},$$

$$\frac{\lambda}{1-p}\alpha\frac{\bar{t}\bar{u}^3(\rho D_G)^{3/2}}{\left(\ln(\frac{4H}{D_G})\right)^3\bar{L}\bar{z}}\sim 1800\sim\frac{10}{\epsilon},$$

$$\frac{3\bar{M}}{H\ln(\frac{4H}{D_G})}\sim 2.10^{-2}\sim 4\epsilon.$$

Modèle paramétré par ϵ

Équation :

$$\frac{\partial z}{\partial t} - \frac{1}{2\epsilon}\nabla\cdot\left((1-4\epsilon\mathbf{m})|\mathbf{u}|^3\nabla z\right) = \frac{10}{\epsilon}\nabla\cdot\left((1-4\epsilon\mathbf{m})|\mathbf{u}|^2\mathbf{u}\right).$$

Hypothèse sur m et u :

$$\mathbf{u}(x,t) = \mathcal{U}(t,\frac{t}{\epsilon},x), \quad \mathbf{m}(x,t) = \mathcal{M}(t,\frac{t}{\epsilon},x).$$

$\theta \longmapsto (\mathcal{U}(t,\theta,x),\mathcal{M}(t,\theta,x))$ périodique de periode 1.

Cadre mathématique

Cadre mathématique

Équation :

$$\frac{\partial z^\epsilon}{\partial t} - \frac{a}{\epsilon}\nabla\cdot\left((1-b\epsilon\mathbf{m})g_a(|\mathbf{u}|)\nabla z^\epsilon\right) = \frac{c}{\epsilon}\nabla\cdot\left((1-b\epsilon\mathbf{m})g_c(|\mathbf{u}|)\frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|}\right),$$

où :

$$z^\epsilon = z^\epsilon(x,t), \qquad t\in[0,T), \qquad x=(x_1,x_2)\in\mathbb{T}^2.$$

et :

$$\mathbf{u}(t,x) = \mathcal{U}(t,\frac{t}{\epsilon},x) \quad \mathbf{m}(t,x) = \mathcal{M}(t,\frac{t}{\epsilon},x),$$

$\theta \longmapsto (\mathcal{U}(t,\theta,x),\mathcal{M}(t,\theta,x))$ périodique de periode 1.

Condition initiale :

$$z^\epsilon_{|t=0} = z_0, \qquad z_0 \in L^2(\mathbb{T}^2).$$

Hypothèses

$$
\begin{gathered}
g_a \geq g_c \geq 0,\ \ g_c(0) = g_c'(0) = 0, \\
\exists d \geq 0, \sup_{u\in\mathbb{R}^+} |g_a(u)| + \sup_{u\in\mathbb{R}^+} |g_a'(u)| \leq d, \\
\sup_{u\in\mathbb{R}^+} |g_c(u)| + \sup_{u\in\mathbb{R}^+} |g_c'(u)| \leq d, \\
\exists U_{thr} \geq 0,\ \exists G_{thr} > 0,\ \text{telles que } u \geq U_{thr} \Longrightarrow g_a(u) \geq G_{thr}.
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
\mathcal{U} = \mathcal{U}(t,\theta,x) \text{ et } \mathcal{M} = \mathcal{M}(t,\theta,x) \text{ sont régulières sur } \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{T}^2, \\
\theta \longmapsto (\mathcal{U},\mathcal{M}) \text{ est périodique de période } 1, \\
|\mathcal{U}|,\ |\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial t}|,\ |\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \theta}|,\ |\nabla\mathcal{U}|,\ |\mathcal{M}|,\ |\frac{\partial \mathcal{M}}{\partial t}|,\ |\frac{\partial \mathcal{M}}{\partial \theta}|,\ |\nabla\mathcal{M}| \text{ sont bornées par } d, \\
\forall (t,\theta,x) \in \mathbb{R}^+\times\mathbb{R}\times\mathbb{T}^2,\ |\mathcal{U}(t,\theta,x)| \leq U_{thr} \Longrightarrow \\
\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial t} = 0,\ \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial t} = 0,\ \nabla\mathcal{M}(t,\theta,x) = 0 \text{ and } \nabla\mathcal{U}(t,\theta,x) = 0, \\
\exists \theta_\alpha < \theta_\omega \in [0,1] \text{ tels que } \forall\ \theta \in [\theta_\alpha,\theta_\omega] \Longrightarrow |\mathcal{U}(t,\theta,x)| \geq U_{thr}.
\end{gathered}
$$

Autre écriture : l'équation

$$\widetilde{\mathcal{A}}_\epsilon(t,\theta,x) = a(1 - b\epsilon\mathcal{M}(t,\theta,x))\, g_a(|\mathcal{U}(t,\theta,x)|),$$
$$\mathcal{A}^\epsilon(t,x) = \widetilde{\mathcal{A}}_\epsilon(t,\tfrac{t}{\epsilon},x).$$
$$\widetilde{\mathcal{C}}_\epsilon(t,\theta,x) = c(1 - b\epsilon\mathcal{M}(t,\theta,x))\, g_c(|\mathcal{U}(t,\theta,x)|)\,\frac{\mathcal{U}(t,\theta,x)}{|\mathcal{U}(t,\theta,x)|},$$
$$\mathcal{C}^\epsilon(t,x) = \widetilde{\mathcal{C}}_\epsilon(t,\tfrac{t}{\epsilon},x).$$

L'équation + C.I. deviennent :

$$\frac{\partial z^\epsilon}{\partial t} - \frac{1}{\epsilon}\nabla\cdot(\mathcal{A}^\epsilon\nabla z^\epsilon) = \frac{1}{\epsilon}\nabla\cdot\mathcal{C}^\epsilon.$$
$$z^\epsilon_{|t=0} = z_0 \ (\in L^2(\mathbb{T}^2)).$$

Autre écriture : les hypothèses

$$\widetilde{\mathcal{A}}_\epsilon \geq 0,\ \theta \longmapsto (\widetilde{\mathcal{A}}_\epsilon, \widetilde{\mathcal{C}}_\epsilon) \text{ périodique de periode } 1.$$

$$|\widetilde{\mathcal{A}}_\epsilon| \leq \gamma,\ |\widetilde{\mathcal{C}}_\epsilon| \leq \gamma,\ \left|\frac{\partial \widetilde{\mathcal{A}}_\epsilon}{\partial t}\right| \leq \gamma,\ \left|\frac{\partial \widetilde{\mathcal{C}}_\epsilon}{\partial t}\right| \leq \gamma, \left|\frac{\partial \nabla \widetilde{\mathcal{A}}_\epsilon}{\partial t}\right| \leq \gamma.$$

$$\left|\frac{\partial \widetilde{\mathcal{A}}_\epsilon}{\partial \theta}\right| \leq \gamma,\ \left|\frac{\partial \widetilde{\mathcal{C}}_\epsilon}{\partial \theta}\right| \leq \gamma,\ |\nabla \widetilde{\mathcal{A}}_\epsilon| \leq \gamma,\ |\nabla \cdot \widetilde{\mathcal{C}}_\epsilon| \leq \gamma.$$

$$\exists \widetilde{G}_{thr},\ \theta_\alpha < \theta_\omega \in [0,1] \text{ tels que } \forall\ \theta \in [\theta_\alpha, \theta_\omega] \Longrightarrow \widetilde{\mathcal{A}}_\epsilon(t,\theta,x) \geq \widetilde{G}_{thr}.$$

$$\widetilde{\mathcal{A}}_\epsilon(t,\theta,x) \leq \widetilde{G}_{thr} \Longrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial \widetilde{\mathcal{A}}_\epsilon}{\partial t}(t,\theta,x) = 0,\ \ \nabla \widetilde{\mathcal{A}}_\epsilon(t,\theta,x) = 0, \\ \dfrac{\partial \widetilde{\mathcal{C}}_\epsilon}{\partial t}(t,\theta,x) = 0,\ \ \nabla \cdot \widetilde{\mathcal{C}}_\epsilon(t,\theta,x) = 0. \end{cases}$$

$$|\widetilde{\mathcal{C}}_\epsilon| \leq \gamma |\widetilde{\mathcal{A}}_\epsilon|,\ |\widetilde{\mathcal{C}}_\epsilon|^2 \leq \gamma |\widetilde{\mathcal{A}}_\epsilon|,\ |\nabla \widetilde{\mathcal{A}}_\epsilon| \leq \gamma |\widetilde{\mathcal{A}}_\epsilon|,\ \left|\frac{\partial \widetilde{\mathcal{A}}_\epsilon}{\partial t}\right| \leq \gamma |\widetilde{\mathcal{A}}_\epsilon|.$$

$$\left|\frac{\partial (\nabla \widetilde{\mathcal{A}}_\epsilon)}{\partial t}\right|^2 \leq \gamma |\widetilde{\mathcal{A}}_\epsilon|,\ \left|\nabla \cdot \widetilde{\mathcal{C}}_\epsilon\right| \leq \gamma |\widetilde{\mathcal{A}}_\epsilon|,\ \left|\frac{\partial \widetilde{\mathcal{C}}_\epsilon}{\partial t}\right| \leq \gamma |\widetilde{\mathcal{A}}_\epsilon|,\ \left|\frac{\partial \widetilde{\mathcal{C}}_\epsilon}{\partial t}\right|^2 \leq \gamma^2 |\widetilde{\mathcal{A}}_\epsilon|.$$