Homogénéisation d'une edp parabolique dégénérée

Homogénéisation d'une edp parabolique dégénérée singulièrement perturbée

Emmanuel Frénod

Lab-STICC, Université de Bretagne-Sud, Vannes, France

Travail en collaboration avec Ibrahima Faye et Diaraf Seck

Exposé dans le cadre d'une invitation du Département de Mathématiques
Université Cheikh Anta Diop de Dakar

Février 2010

Motivations

- Résultat lié au modèle de transport de sable dans l'océan côtier sur une période de quelques semaines
- Résultat utile pour le programme de recherche "Simuler la dynamique des bancs de sable à proximité des côtes dans les zones soumises à la marée"

Équation étudiée

$$\widetilde{\mathcal{A}}_\epsilon(t,\theta,x) = a(1 - b\epsilon\mathcal{M}(t,\theta,x))\, g_a(|\mathcal{U}(t,\theta,x)|),$$
$$\mathcal{A}^\epsilon(t,x) = \widetilde{\mathcal{A}}_\epsilon(t,\tfrac{t}{\epsilon},x).$$
$$\widetilde{\mathcal{C}}_\epsilon(t,\theta,x) = c(1 - b\epsilon\mathcal{M}(t,\theta,x))\, g_c(|\mathcal{U}(t,\theta,x)|)\, \frac{\mathcal{U}(t,\theta,x)}{|\mathcal{U}(t,\theta,x)|},$$
$$\mathcal{C}^\epsilon(t,x) = \widetilde{\mathcal{C}}_\epsilon(t,\tfrac{t}{\epsilon},x).$$

Objectif :

Existence sur un intervalle indépendant de ϵ de z^ϵ, solution de :

$$\frac{\partial z^\epsilon}{\partial t} - \frac{1}{\epsilon}\nabla\cdot(\mathcal{A}^\epsilon \nabla z^\epsilon) = \frac{1}{\epsilon}\nabla\cdot\mathcal{C}^\epsilon.$$
$$z^\epsilon_{|t=0} = z_0 \ (\in L^2(\mathbb{T}^2)).$$

Et comportement quand $\epsilon \to 0$.

Hypothèses

$$\widetilde{\mathcal{A}}_\epsilon \geq 0,\ \theta \longmapsto (\widetilde{\mathcal{A}}_\epsilon, \widetilde{\mathcal{C}}_\epsilon) \text{ périodique de periode } 1.$$

$$|\widetilde{\mathcal{A}}_\epsilon| \leq \gamma,\ |\widetilde{\mathcal{C}}_\epsilon| \leq \gamma,\ \left|\frac{\partial \widetilde{\mathcal{A}}_\epsilon}{\partial t}\right| \leq \gamma,\ \left|\frac{\partial \widetilde{\mathcal{C}}_\epsilon}{\partial t}\right| \leq \gamma, \left|\frac{\partial \nabla \widetilde{\mathcal{A}}_\epsilon}{\partial t}\right| \leq \gamma.$$

$$\left|\frac{\partial \widetilde{\mathcal{A}}_\epsilon}{\partial \theta}\right| \leq \gamma,\ \left|\frac{\partial \widetilde{\mathcal{C}}_\epsilon}{\partial \theta}\right| \leq \gamma,\ |\nabla \widetilde{\mathcal{A}}_\epsilon| \leq \gamma,\ |\nabla \cdot \widetilde{\mathcal{C}}_\epsilon| \leq \gamma.$$

$$\exists \widetilde{G}_{thr},\ \ \theta_\alpha < \theta_\omega \in [0,1] \text{ tels que } \forall\ \theta \in [\theta_\alpha, \theta_\omega] \Longrightarrow \widetilde{\mathcal{A}}_\epsilon(t,\theta,x) \geq \widetilde{G}_{thr}.$$

$$\widetilde{\mathcal{A}}_\epsilon(t,\theta,x) \leq \widetilde{G}_{thr} \Longrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial \widetilde{\mathcal{A}}_\epsilon}{\partial t}(t,\theta,x) = 0,\ \nabla \widetilde{\mathcal{A}}_\epsilon(t,\theta,x) = 0, \\ \dfrac{\partial \widetilde{\mathcal{C}}_\epsilon}{\partial t}(t,\theta,x) = 0,\ \nabla \cdot \widetilde{\mathcal{C}}_\epsilon(t,\theta,x) = 0. \end{cases}$$

$$|\widetilde{\mathcal{C}}_\epsilon| \leq \gamma|\widetilde{\mathcal{A}}_\epsilon|,\ |\widetilde{\mathcal{C}}_\epsilon|^2 \leq \gamma|\widetilde{\mathcal{A}}_\epsilon|,\ |\nabla \widetilde{\mathcal{A}}_\epsilon| \leq \gamma|\widetilde{\mathcal{A}}_\epsilon|,\ \left|\frac{\partial \widetilde{\mathcal{A}}_\epsilon}{\partial t}\right| \leq \gamma|\widetilde{\mathcal{A}}_\epsilon|.$$

$$\left|\frac{\partial (\nabla \widetilde{\mathcal{A}}_\epsilon)}{\partial t}\right|^2 \leq \gamma|\widetilde{\mathcal{A}}_\epsilon|,\ \left|\nabla \cdot \widetilde{\mathcal{C}}_\epsilon\right| \leq \gamma|\widetilde{\mathcal{A}}_\epsilon|,\ \left|\frac{\partial \widetilde{\mathcal{C}}_\epsilon}{\partial t}\right| \leq \gamma|\widetilde{\mathcal{A}}_\epsilon|,\ \left|\frac{\partial \widetilde{\mathcal{C}}_\epsilon}{\partial t}\right|^2 \leq \gamma^2|\widetilde{\mathcal{A}}_\epsilon|.$$

1. Existence sur un intervalle indépendant de ϵ de z^ϵ

2. Comportement de z^ϵ quand $\epsilon \to 0$

Existence sur un intervalle indépendant de ϵ de z^ϵ

Une remarque

L'existence de z^ϵ sur un intervalle dépendant de ϵ, solution de :

$$\frac{\partial z^\epsilon}{\partial t} - \frac{1}{\epsilon}\nabla\cdot(\mathcal{A}^\epsilon \nabla z^\epsilon) = \frac{1}{\epsilon}\nabla\cdot\mathcal{C}^\epsilon.$$
$$z^\epsilon_{|t=0} = z_0 \ (\in L^2(\mathbb{T}^2)).$$

est simple à obtenir :

$$\frac{\partial z^{\epsilon,\nu}}{\partial t} - \frac{1}{\epsilon}\nabla\cdot((\mathcal{A}^\epsilon + \nu)\nabla z^{\epsilon,\nu}) = \frac{1}{\epsilon}\nabla\cdot\mathcal{C}^\epsilon.$$

Puis $\nu \to 0$

Point de départ : solution périodique

Théorème

Sous les hypothèses, il y a existence et unicité de $\mathcal{S} = \mathcal{S}(t, \theta, x)$ $\in L^\infty_\#(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{T}^2))$, *périodique de periode 1 en* θ, *solution de*

$$\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \theta} - \nabla \cdot (\widetilde{\mathcal{A}}_\epsilon(t, \cdot, \cdot)\nabla \mathcal{S}) = \nabla \cdot \widetilde{\mathcal{C}}_\epsilon(t, \cdot, \cdot).$$

$$\int_{\mathbb{T}^2} \mathcal{S}(t, \theta, x)dx = 0.$$

Elle satisfait :

$$\|\mathcal{S}\|_{L^\infty_\#(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{T}^2))} \leq \frac{\gamma}{\sqrt{\widetilde{G}_{thr}}} + 2\gamma.$$

$$\|\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial t}\|^2_{L^\infty_\#(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{T}^2))} \leq \frac{\gamma + \gamma^3}{\sqrt{\widetilde{G}_{thr}}} + 2\gamma.$$

La fonction $\mathcal{Z}^\epsilon$

Comme

$$\mathcal{Z}^\epsilon = \mathcal{Z}^\epsilon(t,x) = \mathcal{S}(t,\frac{t}{\epsilon},x),$$

vérifie :

$$\frac{\partial \mathcal{Z}^\epsilon}{\partial t} = \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial t}(t,\frac{t}{\epsilon},x) + \frac{1}{\epsilon}\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \theta}(t,\frac{t}{\epsilon},x),$$

elle est solution de :

$$\frac{\partial \mathcal{Z}^\epsilon}{\partial t} - \frac{1}{\epsilon}\nabla\cdot(\widetilde{\mathcal{A}}_\epsilon \nabla \mathcal{Z}^\epsilon) = \frac{1}{\epsilon}\nabla\cdot\mathcal{C}^\epsilon + \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial t}(t,\frac{t}{\epsilon},x).$$

Donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial (z^\epsilon - \mathcal{Z}^\epsilon)}{\partial t} - \dfrac{1}{\epsilon}\nabla\cdot(\widetilde{\mathcal{A}}_\epsilon \nabla (z^\epsilon - \mathcal{Z}^\epsilon)) = \dfrac{\partial \mathcal{S}}{\partial t}(t,\dfrac{t}{\epsilon},x). \\ (z^\epsilon - \mathcal{Z}^\epsilon)_{|t=0} = z_0 - \mathcal{S}(0,0,\cdot). \end{array} \right.$$

$\exists \mathcal{Z}^\epsilon \Rightarrow \exists z^\epsilon$

$$\int_{\mathbb{T}^2} \left(z^\epsilon - \mathcal{Z}^\epsilon\right)\left[\frac{\partial (z^\epsilon - \mathcal{Z}^\epsilon)}{\partial t} - \frac{1}{\epsilon}\nabla\cdot(\widetilde{\mathcal{A}}_\epsilon \nabla (z^\epsilon - \mathcal{Z}^\epsilon)) \;=\; \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial t}(t,\frac{t}{\epsilon},x)\right] dx \longrightarrow$$

$$\frac{d\left(\|z^\epsilon - \mathcal{Z}^\epsilon\|_2^2\right)}{dt} \;\leq 2\sqrt{\frac{\gamma+\gamma^3}{\sqrt{\widetilde{G}_{thr}}} + 2\gamma}\;\|z^\epsilon - \mathcal{Z}^\epsilon\|_2.$$

Lemme de Gronwall $\longrightarrow$

$$z^\epsilon - \mathcal{Z}^\epsilon \text{ existe sur tout intervalle } [0,T].$$

Comme $\mathcal{Z}^\epsilon = \mathcal{Z}^\epsilon(t,x) = \mathcal{S}(t,\frac{t}{\epsilon},x)$ existe sur tout intervalle $[0,T]$,

$$z^\epsilon \text{ existe sur tout intervalle } [0,T], \text{ et } \|z^\epsilon\|_{L^\infty([0,T],L^2(\mathbb{T}^2))} \;\leq \widetilde{\gamma}.$$

Comportement de z^ϵ quand $\epsilon \to 0$

Existence de la limite 2 échelles de z^ϵ

$\|z^\epsilon\|_{L^\infty([0,T],L^2(\mathbb{T}^2))}$ bornée $\Rightarrow$

z^ϵ converge à 2 échelles vers un profile $U \in L^\infty([0,T],L^\infty_\#(\mathbb{R},L^2(\mathbb{T}^2)))$.

(à sous-suite extraite près)

Formulation faible avec des fonctions test oscillantes

Pour $\psi(t,\theta,x)$, régulière, à support compact dans $[0,T)\times\mathbb{T}^2$, périodique de période 1 en θ :

$$\psi^\epsilon(t,x)=\psi(t,\frac{t}{\epsilon},x),\ \text{(on a : } \frac{\partial\psi^\epsilon}{\partial t}(t,x)=\frac{\partial\psi}{\partial t}(t,\frac{t}{\epsilon},x)+\frac{1}{\epsilon}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}(t,\frac{t}{\epsilon},x)).$$

$$\int_{\mathbb{T}^2}\int_0^T\left(\psi^\epsilon\right)\left[\frac{\partial z^\epsilon}{\partial t}-\frac{1}{\epsilon}\nabla\cdot(\mathcal{A}^\epsilon\nabla z^\epsilon)=\frac{1}{\epsilon}\nabla\cdot\mathcal{C}^\epsilon\right]dxdt\ \longrightarrow$$

$$\int_{\mathbb{T}^2}\int_0^T z^\epsilon\left(\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^\epsilon+\frac{1}{\epsilon}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)^\epsilon+\frac{1}{\epsilon}\nabla\cdot(\mathcal{A}^\epsilon\nabla\psi^\epsilon)\right)dxdt$$
$$+\frac{1}{\epsilon}\int_{\mathbb{T}^2}\int_0^T\nabla\cdot\mathcal{C}^\epsilon\psi^\epsilon dtdx=-\int_{\mathbb{T}^2}z_0(x)\psi(0,0,x)\,dx.$$

Equation pour U

$$\epsilon \times \Bigg(\int_{\mathbb{T}^2} \int_0^T z^\epsilon \left(\left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)^\epsilon + \frac{1}{\epsilon} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \theta}\right)^\epsilon + \frac{1}{\epsilon} \nabla \cdot (\mathcal{A}^\epsilon \nabla \psi^\epsilon) \right) dxdt$$
$$+ \frac{1}{\epsilon} \int_{\mathbb{T}^2} \int_0^T \nabla \cdot \mathcal{C}^\epsilon \psi^\epsilon \, dtdx = - \int_{\mathbb{T}^2} z_0(x) \psi(0,0,x)\, dx \Bigg); \quad \epsilon \to 0$$

Donne ($\widetilde{\mathcal{A}}$ et $\widetilde{\mathcal{C}}$ limites 2 échelles de $\mathcal{A}^\epsilon$ et $\mathcal{C}^\epsilon$)

$$\int_{\mathbb{T}^2} \int_0^T \int_0^1 U \left(\frac{\partial \psi}{\partial \theta} + \nabla \cdot (\widetilde{\mathcal{A}} \nabla \psi) \right) + \nabla \cdot \widetilde{\mathcal{C}} \, \psi \; dxdtd\theta = 0.$$

C'est une formulation faible de :

$$\frac{\partial U}{\partial \theta} - \nabla \cdot (\widetilde{\mathcal{A}} \nabla U) = \nabla \cdot \widetilde{\mathcal{C}}.$$

Remarque

$$\widetilde{\mathcal{A}}(t,\theta,x) = a\, g_a(|\mathcal{U}(t,\theta,x)|)\,,\ \widetilde{\mathcal{C}}(t,\theta,x) = c\, g_c(|\mathcal{U}(t,\theta,x)|)\, \frac{\mathcal{U}(t,\theta,x)}{|\mathcal{U}(t,\theta,x)|}.$$