Quelques calculs concernant Vlasov en Variables Canoniques Gyrocinétiques

EMMANUEL FRÉNOD

Séminaire d'analyse numérique, IRMA, le 12 / 12 / 2006

Variables Canoniques Gyrocinétiques

Mouvement des particules en coordonnées usuelles

Base canonique : $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$

Coord. de l'espace de phases : $(\tilde{\mathbf{r}}, \mathbf{v}) = ((\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}), (v_1, v_2, v_3))$.

$(\tilde{\mathbf{R}}, \mathbf{V})$: Traj. d'une particule soumise à un champ magnétique: $\frac{\mathbf{e}_1}{\Omega}$

$$\dot{\tilde{\mathbf{R}}} = \mathbf{V}, \quad \dot{\mathbf{V}} = \tilde{\mathbf{E}}(\tilde{\mathbf{R}}, t) + \mathbf{V} \times \frac{\mathbf{e}_1}{\Omega}$$

$\tilde{\mathbf{E}}$ peut dériver d'un potentiel

$$\tilde{\mathbf{E}} = -\nabla_{\tilde{\mathbf{r}}} \tilde{\Phi} = - \begin{pmatrix} \partial_{\tilde{x}} \Phi \\ \partial_{\tilde{y}} \Phi \\ \partial_{\tilde{z}} \Phi \end{pmatrix}$$

Changement de variables

$$(\mathbf{r}, \xi) = ((x, y, z)(u, \alpha, k))$$

$$\mathbf{r} = \tilde{\mathbf{r}} + \Omega \mathbf{v} \times \mathbf{e}_1, \quad k = \frac{\Omega}{2} {v_\perp}^2, \quad (v_\perp = \sqrt{{v_2}^2 + {v_3}^2}),$$

$$u = v_1, \qquad \alpha \text{ t.q. } v_2 = v_\perp \cos\alpha, v_3 = v_\perp \sin\alpha.$$

$$v_\perp = \sqrt{\frac{2k}{\Omega}}$$

$$\tilde{\mathbf{r}} = \mathbf{r} - \Omega \mathbf{v} \times \mathbf{e}_1 = \mathbf{r} + \Omega \begin{pmatrix} 0 \\ -v_\perp \sin\alpha \\ v_\perp \cos\alpha \end{pmatrix} = \mathbf{r} + \sqrt{\Omega} \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{2k} \sin\alpha \\ \sqrt{2k} \cos\alpha \end{pmatrix}$$

Mesure de Lebesgue : $d\tilde{x}\, d\tilde{y}\, d\tilde{z}\, dv_1\, dv_2\, dv_3 = \frac{1}{\Omega}\, dx\, dy\, dz\, du\, d\alpha\, dk$

Champ électrique en nouvelles variables

On définit :

$$\mathbf{E}^{\Omega}(\mathbf{r},\xi,t) = \tilde{\mathbf{E}}\left(\mathbf{r} + \sqrt{\Omega}\begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{2k}\sin\alpha \\ \sqrt{2k}\cos\alpha \end{pmatrix}, t\right)$$

Si il dérive d'un potentiel, on définit :

$$\Phi^{\Omega}(\mathbf{r},\xi,t) = \tilde{\Phi}\left(\mathbf{r} + \sqrt{\Omega}\begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{2k}\sin\alpha \\ \sqrt{2k}\cos\alpha \end{pmatrix}, t\right) = \tilde{\Phi}\left(\begin{pmatrix} x \\ y - \sqrt{\Omega}\sqrt{2k}\sin\alpha \\ z + \sqrt{\Omega}\sqrt{2k}\cos\alpha \end{pmatrix}, t\right)$$

$$\partial_x \Phi^{\Omega} = \partial_{\tilde{x}}\tilde{\Phi},\ \ \partial_y \Phi^{\Omega} = \partial_{\tilde{y}}\tilde{\Phi},\ \ \partial_z \Phi^{\Omega} = \partial_{\tilde{z}}\tilde{\Phi}, \quad \Longrightarrow \mathbf{E}^{\Omega} = -\nabla_{\mathbf{r}}\Phi^{\Omega}$$

$$(\text{car } \tilde{\mathbf{E}} = -\nabla_{\tilde{\mathbf{r}}}\tilde{\Phi})$$

$$\partial_\alpha \Phi^{\Omega} = -\sqrt{\Omega}\sqrt{2k}[\partial_{\tilde{y}}\tilde{\Phi}\cos\alpha + \partial_{\tilde{z}}\tilde{\Phi}\sin\alpha] = \sqrt{\Omega}\sqrt{2k}[\mathbf{E}_2^{\Omega}\cos\alpha + \mathbf{E}_3^{\Omega}\sin\alpha],$$

$$\partial_k \Phi^{\Omega} = \sqrt{\Omega}/\sqrt{2k}[-\partial_{\tilde{y}}\tilde{\Phi}\sin\alpha + \partial_{\tilde{z}}\tilde{\Phi}\cos\alpha] = \sqrt{\Omega}/\sqrt{2k}[\mathbf{E}_2^{\Omega}\sin\alpha + \mathbf{E}_3^{\Omega}\cos\alpha],$$

Trajectoires des particules en nouvelles coordonnées

Trajectoire dans les nouvelles coord. : $(\mathbf{R}, \Xi) = ((X, Y, Z), (U, A, K))$

$$\mathbf{R} = \tilde{\mathbf{R}} + \Omega \mathbf{V} \times \mathbf{e}_1, \quad K = \frac{\Omega}{2}({V_2}^2 + {V_3}^3),$$

$$U = V_1, \qquad A \text{ t.q. } V_2 = \sqrt{{V_2}^2 + {V_3}^3} \cos A, V_3 = \sqrt{{V_2}^2 + {V_3}^3} \sin A.$$

Traj. var. usuelles: $\quad \dot{\tilde{\mathbf{R}}} = \mathbf{V}, \quad \dot{\mathbf{V}} = \tilde{\mathbf{E}}(\tilde{\mathbf{R}}, t) + \mathbf{V} \times \frac{\mathbf{e}_1}{\Omega}$

$$\dot{\mathbf{R}} = \dot{\tilde{\mathbf{R}}} + \Omega \dot{\mathbf{V}} \times \mathbf{e}_1 = \mathbf{V} + \Omega(\tilde{\mathbf{E}}(\tilde{\mathbf{R}}, t) + \mathbf{V} \times \frac{\mathbf{e}_1}{\Omega}) \times \mathbf{e}_1$$

$$= \mathbf{V} + \Omega \tilde{\mathbf{E}}(\tilde{\mathbf{R}}, t) \times \mathbf{e}_1 - V_2 \mathbf{e}_2 - V_3 \mathbf{e}_3 = V_1 \mathbf{e}_1 + \Omega \tilde{\mathbf{E}}(\tilde{\mathbf{R}}, t)$$

$$= U \mathbf{e}_1 + \Omega \mathbf{E}^{\Omega}(\mathbf{R}, \Xi, t)$$

i.e. $\boxed{\dot{X} = U, \ \ \dot{Y} = \Omega \mathbf{E}_3^{\Omega}(\mathbf{R}, \Xi, t), \ \ \dot{Z} = -\Omega \mathbf{E}_2^{\Omega}(\mathbf{R}, \Xi, t)}$

$$\dot{U} = \dot{V}_1 = \tilde{\mathbf{E}}_1(\tilde{\mathbf{R}}, t) \Longrightarrow \boxed{\dot{U} = \mathbf{E}_1^{\Omega}(\mathbf{R}, \Xi, t)}$$

$$\dot{K} = \tfrac{\Omega}{2}\left(V_2{}^2 + V_3{}^2\right)^{\bullet}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\dot{K} = \sqrt{\Omega}\sqrt{2K}\left(\mathbf{E}_2^{\Omega}(\mathbf{R}, \Xi, t)\cos A + \mathbf{E}_3^{\Omega}(\mathbf{R}, \Xi, t)\sin A\right)}$$

En calcultant $\dot{V}_2$ et $\dot{V}_3$ on obtient : $\dot{A} = \sqrt{\tfrac{\Omega}{2K}}(-\dot{V}_2 \sin A + \dot{V}_3 \cos A)$

$$\Longrightarrow \boxed{\dot{A} = -\frac{1}{\Omega} - \sqrt{\frac{\Omega}{2K}}\left(\mathbf{E}_2^{\Omega}(\mathbf{R}, \Xi, t)\sin A - \mathbf{E}_3^{\Omega}(\mathbf{R}, \Xi, t)\cos A\right)}$$

Equations du mouvement en nouvelles coordonnées

$$\dot{X} = U, \quad \dot{Y} = \Omega \mathbf{E}_3^\Omega(\mathbf{R}, \Xi, t), \quad \dot{Z} = -\Omega \mathbf{E}_2^\Omega(\mathbf{R}, \Xi, t),$$

$$\dot{U} = \mathbf{E}_1^\Omega(\mathbf{R}, \Xi, t),$$

$$\dot{K} = \sqrt{\Omega}\sqrt{2K}(\mathbf{E}_2^\Omega(\mathbf{R}, \Xi, t)\cos A + \mathbf{E}_3^\Omega(\mathbf{R}, \Xi, t)\sin A)$$

$$\dot{A} = -\frac{1}{\Omega} - \sqrt{\frac{\Omega}{2K}}(\mathbf{E}_2^\Omega(\mathbf{R}, \Xi, t)\sin A - \mathbf{E}_3^\Omega(\mathbf{R}, \Xi, t)\cos A)$$

Si le champ électrique dérive d'un potentiel :

$$\dot{X} = U, \qquad \dot{U} = -(\partial_x \Phi^\Omega)(\mathbf{R}, \Xi, t),$$

$$\dot{Z} = \Omega(\partial_y \Phi^\Omega)(\mathbf{R}, \Xi, t), \qquad \dot{Y} = -\Omega(\partial_z \Phi^\Omega)(\mathbf{R}, \Xi, t),$$

$$\dot{K} = (\partial_\alpha \Phi^\Omega)(\mathbf{R}, \Xi, t), \qquad \dot{A} = -\frac{1}{\Omega} - (\partial_k \Phi^\Omega)(\mathbf{R}, \Xi, t)$$

Mise sous forme de système hamiltonien

$$\overline{y} = \frac{y}{\Omega}, \quad \overline{Y} = \frac{Y}{\Omega},$$

$$\overline{\Phi^{\Omega}}(x, \overline{y}, z, \alpha, k) = \Phi^{\Omega}(x, \Omega\overline{y}, z, \alpha, k) \quad \Rightarrow \partial_{\overline{y}}\overline{\Phi^{\Omega}} = \frac{1}{\Omega}\partial_y \Phi^{\Omega}$$

Hamiltonien : $\boxed{H^{\Omega}(x, \overline{y}, z, u, \alpha, k) = \frac{1}{2}u^2 + \frac{k}{\Omega} + \overline{\Phi^{\Omega}}(x, \overline{y}, z, \alpha, k)}$

Equations du mouvement, si le champ électrique dérive d'un potentiel :

$$\dot{X} = \partial_u H^{\Omega}(X, Y, Z, U, A, K), \quad \dot{U} = -\partial_x H^{\Omega}(X, Y, Z, U, A, K),$$

$$\dot{Z} = \partial_{\overline{y}} H^{\Omega}(X, Y, Z, U, A, K), \quad \dot{\overline{Y}} = -\partial_z H^{\Omega}(X, Y, Z, U, A, K),$$

$$\dot{K} = \partial_{\alpha} H^{\Omega}(X, Y, Z, U, A, K), \quad \dot{A} = -\partial_k H^{\Omega}(X, Y, Z, U, A, K).$$

Vlasov en Variables Canoniques Gyrocinétiques

Remarque et définition

Les seconds membres des éq. du mouvement sont à divergence nulle.

On pose f t.q $\dfrac{df(X,Y,Z,U,A,K)}{dt} = 0$ ou $\dfrac{df(X,\overline{Y},Z,U,A,K)}{dt} = 0$

1ière équation de Vlasov

L'équation de Vlasov associée à cette éq. du mouvement,

$$\dot{X} = U, \;\; \dot{Y} = \Omega \mathbf{E}_3^{\Omega}(\mathbf{R}, \Xi, t), \;\; \dot{Z} = -\Omega \mathbf{E}_2^{\Omega}(\mathbf{R}, \Xi, t),$$

$$\dot{U} = \mathbf{E}_1^{\Omega}(\mathbf{R}, \Xi, t),$$

$$\dot{K} = \sqrt{\Omega}\sqrt{2K}(\mathbf{E}_2^{\Omega}(\mathbf{R}, \Xi, t)\cos A + \mathbf{E}_3^{\Omega}(\mathbf{R}, \Xi, t)\sin A)$$

$$\dot{A} = -\frac{1}{\Omega} - \sqrt{\frac{\Omega}{2K}}(\mathbf{E}_2^{\Omega}(\mathbf{R}, \Xi, t)\sin A - \mathbf{E}_3^{\Omega}(\mathbf{R}, \Xi, t)\cos A$$

est :

$$\partial_t f + u\partial_x f + \Omega \mathbf{E}_3^{\Omega}(\mathbf{r}, \xi, t)\partial_y f - \Omega \mathbf{E}_2^{\Omega}(\mathbf{r}, \xi, t)\partial_z f + \mathbf{E}_1^{\Omega}(\mathbf{r}, \xi, t)\partial_u f$$
$$+ \sqrt{\Omega}\sqrt{2k}(\mathbf{E}_2^{\Omega}(\mathbf{r}, \xi, t)\cos\alpha + \mathbf{E}_3^{\Omega}(\mathbf{r}, \xi, t)\sin\alpha)\partial_k f$$
$$-(\frac{1}{\Omega} + \sqrt{\frac{\Omega}{2k}}(\mathbf{E}_2^{\Omega}(\mathbf{r}, \xi, t)\sin\alpha - \mathbf{E}_3^{\Omega}(\mathbf{r}, \xi, t)\cos\alpha))\partial_\alpha f = 0,$$

$$f_{|t=0} = f_0.$$

$((\mathbf{r}, \xi) = ((x, y, z)(u, \alpha, k)))$

2ième équation de Vlasov

Si le champ électrique dérive d'un potentiel. Eq. du mouvement :

$$\dot{X} = U, \qquad \dot{U} = -(\partial_x \Phi^{\Omega})(\mathbf{R}, \Xi, t),$$
$$\dot{Z} = \Omega(\partial_y \Phi^{\Omega})(\mathbf{R}, \Xi, t), \quad \dot{Y} = -\Omega(\partial_z \Phi^{\Omega})(\mathbf{R}, \Xi, t),$$
$$\dot{K} = (\partial_\alpha \Phi^{\Omega})(\mathbf{R}, \Xi, t), \quad \dot{A} = -\frac{1}{\Omega} - (\partial_k \Phi^{\Omega})(\mathbf{R}, \Xi, t)$$

Eq. de Vlasov :

$$\partial_t f + u\partial_x f - \Omega\partial_z\Phi^{\Omega}(\mathbf{r}, \xi, t)\partial_y f + \Omega\partial_y\Phi^{\Omega}(\mathbf{r}, \xi, t)\partial_z f$$
$$- \partial_x\Phi^{\Omega}(\mathbf{r}, \xi, t)\partial_u f + \partial_\alpha\Phi^{\Omega}(\mathbf{r}, \xi, t)\partial_k f - (\frac{1}{\Omega} + \partial_k\Phi^{\Omega}(\mathbf{r}, \xi, t))\partial_\alpha f = 0,$$
$$f_{|t=0} = f_0,$$

$((\mathbf{r}, \xi) = ((x, y, z)(u, \alpha, k)))$

3ième équation de Vlasov

Eq. du mouvement sous forme hamiltonienne :

$$\dot{X} = \partial_u H^{\Omega}(X, Y, Z, U, A, K), \quad \dot{U} = -\partial_x H^{\Omega}(X, Y, Z, U, A, K),$$
$$\dot{Z} = \partial_{\overline{y}} H^{\Omega}(X, Y, Z, U, A, K), \quad \dot{\overline{Y}} = -\partial_z H^{\Omega}(X, Y, Z, U, A, K),$$
$$\dot{K} = \partial_\alpha H^{\Omega}(X, Y, Z, U, A, K), \quad \dot{A} = -\partial_k H^{\Omega}(X, Y, Z, U, A, K).$$

Eq. de Vlavov :

$$\begin{aligned} \partial_t f + \partial_u H^{\Omega}(\mathbf{r}, \xi, t)\partial_x f - \partial_x H^{\Omega}(\mathbf{r}, \xi, t)\partial_u f \\ + \partial_{\overline{y}} H^{\Omega}(\mathbf{r}, \xi, t)\partial_z f - \partial_z H^{\Omega}(\mathbf{r}, \xi, t)\partial_y f \\ + \partial_\alpha H^{\Omega}(\mathbf{r}, \xi, t)\partial_k f - \partial_k H^{\Omega}(\mathbf{r}, \xi, t))\partial_\alpha f = 0, \\ f_{|t=0} = f_0, \end{aligned}$$

$((\mathbf{r}, \xi) = ((x, y, z)(u, \alpha, k)))$

Scaling de l’équation de Vlasov

grandeurs de référence et variables adimensionnées

Temps caract. : $\bar{t}$

Longueur caract. dans la direction du champ magnétique : $\overline{L}_{\|}$

Long. caract. dans la dir. $\perp$ au champ. magnétique : $\overline{L}_{\perp}$

Vitesse caract. dans la direction du champ magnétique : $\overline{V}_{\|}$

Energie cinétique caract. dans la dir. $\perp$ au champ. magn. : $\overline{K}$

Variables adimensionnées : $t', x', y', z', u', \alpha, k'$ t.q.

$$t = \bar{t}t', \; x = \overline{L}_{\|}x', \; y = \overline{L}_{\perp}y', \; z = \overline{L}_{\perp}z' \;, \; u = \overline{V}_{\|}u', \; k = \overline{K}k'.$$

Champ électrique adimensionné

Taille caract. du champ électrique : $\overline{E}$.

Champs adimensionnés $\mathbf{E}^{\Omega\prime}$ et $\tilde{\mathbf{E}}'$ t.q. :

$$\overline{E}\tilde{\mathbf{E}}'(\tilde{\mathbf{r}}', t') = \tilde{\mathbf{E}}(\overline{L}_{\|}\tilde{x}', \overline{L}_{\perp}\tilde{y}', \overline{L}_{\perp}\tilde{z}', \overline{t}t')$$

$$\overline{E}\mathbf{E}^{\Omega\prime}(\tilde{\mathbf{r}}', \xi', t') = \mathbf{E}^{\Omega}(\overline{L}_{\|}x', \overline{L}_{\perp}y', \overline{L}_{\perp}z', \alpha, \overline{K}k', \overline{t}t')$$

D'aprés le lien entre $\mathbf{E}^{\Omega}$ et $\tilde{\mathbf{E}}$ on a :

$$\mathbf{E}^{\Omega\prime}(\tilde{\mathbf{r}}', \xi', t') = \tilde{\mathbf{E}}'(x', y' - \frac{\sqrt{\Omega\overline{K}}}{\overline{L}_{\perp}}\sqrt{2k'}\sin\alpha, z' + \frac{\sqrt{\Omega\overline{K}}}{\overline{L}_{\perp}}\sqrt{2k'}\cos\alpha, t'))$$

Adimensionnement pour la densité f

$\tilde{f}_0(\tilde{\mathbf{r}}, \xi)$ décrit répartition initiale des particules.

Variations $\sim \overline{L}_{||}$ sur $\tilde{x}, \cdots \Rightarrow$ variations $\sim 1/\overline{L}_{||}$ sur $\tilde{f}_0$

$$(\overline{L}_{||}\overline{L}_{\perp}^{2}\,\overline{V}_{||}\frac{\overline{K}}{\Omega})\int \tilde{f}_0(\overline{L}_{||}x', \overline{L}_{\perp}y' - \sqrt{\Omega\overline{K}}\sqrt{2k'}\sin\alpha,$$

$$\overline{L}_{\perp}z' + \sqrt{\Omega\overline{K}}\sqrt{2k'}\cos\alpha, \overline{V}_{||}u', \sqrt{\frac{\overline{K}}{\Omega}}\sqrt{2k'}\cos\alpha, \sqrt{\frac{\overline{K}}{\Omega}}\sqrt{2k'}\sin\alpha)\, d\mathbf{r}'\, d\xi'$$

$$\sim 1$$

$\longrightarrow$ Chang. de variables et l'adim. cohérents

$$\overline{f}\, f'(\mathbf{r}', \xi', t') = (\overline{L}_{\|} \overline{L}_{\perp}^{2}\, \overline{V}_{\|} \frac{\overline{K}}{\Omega}) \tilde{f}_0(\overline{L}_{\|} x', \overline{L}_{\perp} y' - \sqrt{\Omega \overline{K}} \sqrt{2k'} \sin\alpha,$$

$$\overline{L}_{\perp} z' + \sqrt{\Omega \overline{K}} \sqrt{2k'} \cos\alpha, \overline{V}_{\|} u', \sqrt{\frac{\overline{K}}{\Omega}} \sqrt{2k'} \cos\alpha, \sqrt{\frac{\overline{K}}{\Omega}} \sqrt{2k'} \sin\alpha)$$

Facteur d'échelle $\overline{f}$ t.q. : $\int f'_{|t=0}\, d\mathbf{r}'\, d\xi' \sim 1$. DONC

$$\overline{f} = \overline{L}_{\|} \overline{L}_{\perp}^{2}\, \overline{V}_{\|} \frac{\overline{K}}{\Omega} \tag{1}$$

1ière équation de Vlasov adimensionnée

$$\partial_{t'} f' + \frac{\overline{t}\,\overline{V}_{||}}{\overline{L}_{||}} u' \partial_{x'} f' + \frac{\overline{t}\,\overline{E}\Omega}{\overline{L}_{\perp}} \mathbf{E}_3^{\Omega\,\prime} \partial_{y'} f' - \frac{\overline{t}\,\overline{E}\Omega}{\overline{L}_{\perp}} \mathbf{E}_2^{\Omega\,\prime} \partial_{z'} f' + \frac{\overline{t}\,\overline{E}}{\overline{V}_{||}} \mathbf{E}_1^{\Omega\,\prime} \partial_{u'} f'$$

$$+ \Big(\frac{\overline{t}\,\overline{E}\sqrt{\Omega\overline{K}}}{\overline{K}} \sqrt{2k'}\,\mathbf{E}_2^{\Omega\,\prime} \cos\alpha + \frac{\overline{t}\,\overline{E}\sqrt{\Omega\overline{K}}}{\overline{K}} \sqrt{2k'}\,\mathbf{E}_3^{\Omega\,\prime} \sin\alpha\Big)\partial_{k'} f'$$

$$- \Big(\frac{1}{\Omega} + \Big(\overline{t}\,\overline{E}\sqrt{\frac{\Omega}{\overline{K}}}\frac{1}{\sqrt{2k'}}\mathbf{E}_2^{\Omega\,\prime} \sin\alpha - \overline{t}\,\overline{E}\sqrt{\frac{\Omega}{\overline{K}}}\frac{1}{\sqrt{2k'}}\mathbf{E}_3^{\Omega\,\prime} \cos\alpha\Big)\Big)\partial_\alpha f' = 0,$$

$$f_{|t=0} = f_0.$$

Grandeurs physiques

Pulsation cyclotronique caractéristique : $\overline{\omega_c} = \dfrac{1}{\Omega}$

Rayon de Larmor caractéristique : $\overline{a_L} = \sqrt{\dfrac{\overline{K}}{\Omega}\,\dfrac{1}{\overline{\omega_c}}} = \sqrt{\Omega\overline{K}}$

Force magnétique caractéristique : $\sqrt{\dfrac{\overline{K}}{\Omega}\,\dfrac{1}{\Omega}} = \dfrac{\sqrt{\overline{K}}}{\Omega\sqrt{\Omega}}$

$$\frac{\bar{t}\overline{V_\parallel}}{\overline{L_\parallel}} = (\bar{t}\overline{\omega_c})(\frac{\overline{a_L}}{\overline{L_\parallel}})(\overline{V_\parallel}\sqrt{\frac{\Omega}{\overline{K}}}), \quad \frac{\bar{t}\overline{E}\Omega}{\overline{L_\perp}} = (\frac{\overline{a_L}}{\overline{L_\perp}})(\bar{t}\overline{\omega_c})(\overline{E}\frac{\Omega\sqrt{\Omega}}{\sqrt{\overline{K}}}),$$

$$\frac{\bar{t}\overline{E}}{\overline{V_\parallel}} = (\bar{t}\overline{\omega_c})(\overline{E}\frac{\Omega\sqrt{\Omega}}{\sqrt{\overline{K}}})(\sqrt{\frac{\overline{K}}{\Omega}}\frac{1}{\overline{V_\parallel}}), \quad \bar{t}\overline{E}\sqrt{\frac{\Omega}{\overline{K}}} = (\bar{t}\overline{\omega_c})(\overline{E}\frac{\Omega\sqrt{\Omega}}{\sqrt{\overline{K}}})$$

1ier scaling sur la 1ière équation de Vlasov

(Approximation Centre Guide temps usuel)

$$\overline{t}\overline{\omega_c} = \frac{1}{\varepsilon}, \quad \frac{\overline{a_L}}{\overline{L_{\|}}} = \frac{\overline{a_L}}{\overline{L_{\perp}}} = \varepsilon, \quad \overline{V_{\|}}\sqrt{\frac{\Omega}{\overline{\overline{K}}}} = 1, \quad \overline{E}\frac{\Omega\sqrt{\Omega}}{\sqrt{\overline{\overline{K}}}} = \varepsilon$$

$$\begin{aligned}
&\partial_{t'} f' + u'\partial_{x'} f' + \varepsilon \mathbf{E}_3^{\Omega\prime}\partial_{y'} f' - \varepsilon \mathbf{E}_2^{\Omega\prime}\partial_{z'} f' + \mathbf{E}_1^{\Omega\prime}\partial_{u'} f' \\
&\quad + (\sqrt{2k'}\mathbf{E}_2^{\Omega\prime}\cos\alpha + \sqrt{2k'}\mathbf{E}_3^{\Omega\prime}\sin\alpha)\partial_{k'} f' \\
&\quad - (\frac{1}{\varepsilon} + (\frac{1}{\sqrt{2k'}}\mathbf{E}_2^{\Omega\prime}\sin\alpha - \frac{1}{\sqrt{2k'}}\mathbf{E}_3^{\Omega\prime}\cos\alpha))\partial_\alpha f' = 0, \\
&f_{|t=0} = f_0.
\end{aligned}$$

$$\mathbf{E}^{\Omega\prime} = \tilde{\mathbf{E}}'(x', y' - \varepsilon\sqrt{2k'}\sin\alpha, z' + \varepsilon\sqrt{2k'}\cos\alpha).$$

2ième scaling sur la 1ière équation de Vlasov

(Approximation Rayon de Larmor Fini)

$$\overline{t}\,\overline{\omega_c} = \frac{1}{\varepsilon}, \quad \frac{\overline{a_L}}{\overline{L}_{\parallel}} = \varepsilon, \quad \frac{\overline{a_L}}{\overline{L}_{\perp}} = 1, \quad \overline{V}_{\parallel}\sqrt{\frac{\Omega}{\overline{K}}} = 1, \quad \overline{E}\frac{\Omega\sqrt{\Omega}}{\sqrt{\overline{K}}} = \varepsilon$$

$$\partial_{t'} f' + u'\partial_{x'} f' + \mathbf{E}_3^{\Omega\,\prime}\partial_{y'} f' - \mathbf{E}_2^{\Omega\,\prime}\partial_{z'} f' + \mathbf{E}_1^{\Omega\,\prime}\partial_{u'} f'$$
$$+ (\sqrt{2k'}\mathbf{E}_2^{\Omega\,\prime}\cos\alpha + \sqrt{2k'}\mathbf{E}_3^{\Omega\,\prime}\sin\alpha)\partial_{k'} f'$$
$$- (\frac{1}{\varepsilon} + (\frac{1}{\sqrt{2k'}}\mathbf{E}_2^{\Omega\,\prime}\sin\alpha - \frac{1}{\sqrt{2k'}}\mathbf{E}_3^{\Omega\,\prime}\cos\alpha))\partial_\alpha f' = 0,$$
$$f_{|t=0} = f_0.$$

$$\mathbf{E}^{\Omega\,\prime} = \tilde{\mathbf{E}}'(x', y' - \sqrt{2k'}\sin\alpha, z' + \sqrt{2k'}\cos\alpha).$$

Scaling de l’équation de Vlasov avec potentiel

En gros on fait la même chose que pour le cas précédent avec qq. différences

Potentiel adimensionné

Taille caract. du champ électrique : $\overline{E}$.

Potentiels adimensionnés ${\Phi^{\Omega}}'$ et $\tilde{\Phi}'$ t.q. :

$$\overline{E}\,\overline{L}_{\|}\tilde{\Phi}'(\tilde{\mathbf{r}}',t') = \tilde{\Phi}(\overline{L}_{\|}\tilde{x}',\overline{L}_{\perp}\tilde{y}',\overline{L}_{\perp}\tilde{z}',\overline{t}t')$$

$$\overline{E}\,\overline{L}_{\|}{\Phi^{\Omega}}'(\tilde{\mathbf{r}}',\xi',t') = \Phi^{\Omega}(\overline{L}_{\|}x',\overline{L}_{\perp}y',\overline{L}_{\perp}z',\alpha,\overline{K}k',\overline{t}t')$$

D'aprés le lien entre $\mathbf{E}^{\Omega}$ et $\tilde{\mathbf{E}}$ on a :

$${\Phi^{\Omega}}'(\tilde{\mathbf{r}}',\xi',t') = \tilde{\Phi}'(x',y' - \frac{\overline{a_L}}{\overline{L}_{\perp}}\sqrt{2k'}\sin\alpha, z' + \frac{\overline{a_L}}{\overline{L}_{\perp}}\sqrt{2k'}\cos\alpha, t'))$$

$$\overline{E}\partial_{\tilde{x}'}{\Phi^{\Omega}}' = \partial_{\tilde{x}}\Phi^{\Omega}, \quad \overline{E}\frac{\overline{L}_{\|}}{\overline{L}_{\perp}}\partial_{\tilde{y}'}{\Phi^{\Omega}}' = \partial_{\tilde{y}}\Phi^{\Omega}$$

1ier scaling sur la 2ième équation de Vlasov

(Approximation Centre Guide temps usuel)

$$\partial_{t'} f' + u'\partial_{x'} f' - \varepsilon\partial_{z'}\Phi^{\Omega}\partial_{y'} f' + \varepsilon\partial_{y'}\Phi^{\Omega}\partial_{z'} f'$$

$$- \partial_{x'}\Phi^{\Omega}\partial_{u'} f' + \frac{1}{\varepsilon}\partial_{\alpha}\Phi^{\Omega}\partial_{k'} f' - (\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon}\partial_{k'}\Phi^{\Omega})\partial_{\alpha} f' = 0,$$

$$f_{|t=0} = f_0,$$

2ième scaling sur la 2ième équation de Vlasov

(Approximation Rayon de Larmor Fini)

$$\partial_{t'} f' + u' \partial_{x'} f' - \frac{1}{\varepsilon} \partial_{z'} \Phi^{\Omega} \partial_{y'} f' + \frac{1}{\varepsilon} \partial_{y'} \Phi^{\Omega} \partial_{z'} f'$$

$$- \partial_{x'} \Phi^{\Omega} \partial_{u'} f' + \frac{1}{\varepsilon} \partial_{\alpha} \Phi^{\Omega} \partial_{k'} f' - (\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon} \partial_{k'} \Phi^{\Omega}) \partial_{\alpha} f' = 0,$$

$$f_{|t=0} = f_0,$$