Pourquoi passer au continu ?

Emmanuel Frénod

Lab-STICC, Université de Bretagne-Sud, Vannes, France

28 octobre 2010

Introduction

Pourquoi les prototypes d’avions volent-ils ?

Dimensionnement des ailes et des gouvernes :

- Modèle discret reliant les flux d’air au nez de l’avion à la portance la résultante sur les gouvernes

- Modèle "particulaire" de l’écoulement le long de l’avion.

- Modèle continu décrivant l’intimité de l’écoulement le long de l’avion

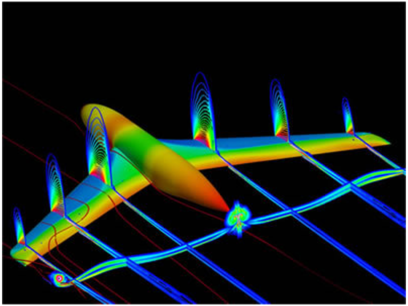


Fig.: Calcul de l'écoulement transsonique autour du fuselage et des ailes en phase de vol de l'avion générique Cat3D (Logiciel elsA par Vincent Brunet - ONERA)

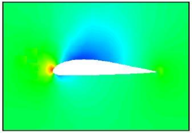


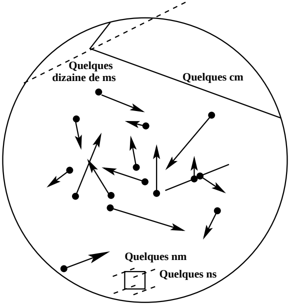
Fig.: pression autour d'une aile NACA4315 (Logiciel Fluent par Benoît Dubois - ESSTIN

Autre exemple de l'utilisation d'une modélisation continue

Film DHI

Notions primaires

Intrinsèquement, un fluide est quelque chose de discret.



$\longrightarrow$

$$\rho = \rho(t, x)$$
$$U = U(t, x)$$
$$T = T(t, x)$$
$$P = P(t, x)$$

Effet de "l'ensemble de particules" sur une target de quelques cm pendant quelques dizaines de ms

$=$

Effet de ρ, U, T et P sur cette même target de quelques cm pendant ce même temps

Définition de l'espace et du temps - 2

Nous percevons le temps (1d) et l'espace euclidien (3d)

Il faut embarquer dans les définitions du temps et de l'espace toutes les échelles caractéristiques utiles.

À ce niveau il y a :

- $\tau_{\text{min}} \sim$ qq μs
- $\xi_{\text{min}} \sim$ qq μm

en dessous desquelles la description n'a pas de sens

$(t$ (1d), τ_{min} ; x (3d), $\xi_{\text{min}})$

Intuition de la continuité

Nous avons une compréhension intuitive de la notion de continuité
Via les fonctions régulières

$$\rho = \rho(t,x)\ ;\quad U = U(t,x)\ ;\quad T = T(t,x)\ ;\quad P = P(t,x).$$

Attention à l'interprétation : La masse contenue dans une boite $\mathcal{B}$ dont les dimensions caractéristiques sont au minimum ξ_{min} est à l'instant t :

$$\int_{\mathcal{B}} \rho(t,x)\, dx.$$

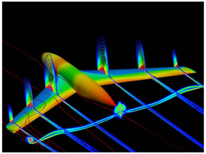
Ou plutôt : La masse, moyennée sur un intervalle de temps de longueur $\tau > \tau_{min}$ autour de t, contenue dans une boite $\mathcal{B}$ dont les dimensions caractéristiques sont au minimum ξ_{min} est :

$$\frac{1}{\tau}\int_{t-\tau/2}^{t+\tau/2}\int_{\mathcal{B}} \rho(t,x)\, dx\, dt.$$

Que peut-on en faire ?

Cas d'un écoulement autour d'un avion :

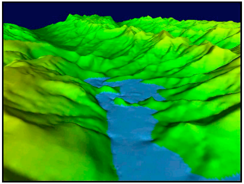
- Construire un modèle mathématique du support physique où le phénomène à lieu (description géométrique de l'objet)
- Construire un modèle mathématique du phénomène (équation aux dérivées partielles de Euler ou de Navier-Stokes)
- Discrétiser le modèle du support physique (maillage)
- Discrétiser le modèle du phénomène (différences finies, éléments finis, volumes finis)
- Insérer dans un logiciel (elsA)
- Simuler



Modéliser - Discrétiser - Simuler - 2

Cas de la rupture d'un barrage :

- Construire un modèle mathématique du support physique où le phénomène à lieu (fonction donnant la cartographie)
- Construire un modèle mathématique du phénomène (équation aux dérivées partielles de Saint-Venant)
- Discrétiser le modèle du support physique (maillage)
- Discrétiser le modèle du phénomène (volumes finis)
- Insérer dans un logiciel (Mike)
- Simuler



Comment voir le modèle du support physique et sa discrétisation

Le modèle du support physique :

- Une suface de dimension 2
- $\mathbb{R}^3$
- Un morceau de $\mathbb{R}^3$ limité par une surface
- $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^6$, etc.

Sa discrétisation :

- Un maillage de la suface de dimension 2
- Un maillage de $\mathbb{R}^3$
- Un maillage d'un morceau de $\mathbb{R}^3$ limité par une surface
- etc.

Comment voir le modèle du phénomène

Une équation aux dérivées partielles permet de traduire mathématiquement des phrases du type : "En tel point, telle quantité varie proportionnellement au flux de telle autre quantité."

$$\mathrm{NS}_1 : \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho U) = 0.$$

$$\rho = \rho(t,x) \ ; \quad U = U(t,x) \ ; \quad T = T(t,x) \ ; \quad P = P(t,x).$$

Fonctions $\in$ espace de dimension infinie.

$$\mathrm{NS}(\rho, U, T, P) = 0.$$

Regarder si, a priori, vu les conditions il y a de la turbulence. Si oui : taille des structures $\in [\xi_{\mathrm{tur}}^{\mathrm{min}}, \xi_{\mathrm{tur}}^{\mathrm{max}}]$.

(t (1d), τ_{min}, ; x (3d), ξ_{min}, $[\xi_{\mathrm{tur}}^{\mathrm{min}}, \xi_{\mathrm{tur}}^{\mathrm{max}}]$)

Comment voir la discrétisation du modèle du phénomène

$$\rho = \rho(t,x)\ ;\quad U = U(t,x)\ ;\quad T = T(t,x)\ ;\quad P = P(t,x).$$

Fonctions $\in$ espace de dimension infinie.

$$\mathrm{NS}(\rho, U, T, P) = 0.$$

$$\overline{\rho} = \overline{\rho}(t,x)\ ;\quad \overline{U} = \overline{U}(t,x)\ ;\quad \overline{T} = \overline{T}(t,x)\ ;\quad \overline{P} = \overline{P}(t,x).$$

Fonctions $\in$ espace de dimension finie.

$$\overline{\mathrm{NS}}(\overline{\rho}, \overline{U}, \overline{T}, \overline{P}) = 0.$$

$$\|\rho - \overline{\rho}\| + \|U - \overline{U}\| + \|T - \overline{T}\| + \|P - \overline{P}\| \leq c(\tau_{\mathrm{maill}} + \xi_{\mathrm{maill}}).$$

τ_{maill} est le pas de discrétisation du temps ; ξ_{maill} est la taille des mailles du maillage en espace.
(Si $\xi_{\mathrm{maill}} > \xi_{\mathrm{tur}}^{\mathrm{min}}$: Ajout de termes turbulents dans NS $\longrightarrow \overline{\mathrm{NS}}$)

(t (1d), τ_{min}, τ_{maill} ; x (3d), ξ_{min}, $[\xi_{\mathrm{tur}}^{\mathrm{min}}, \xi_{\mathrm{tur}}^{\mathrm{max}}]$, ξ_{maill})

Une remarque - 1

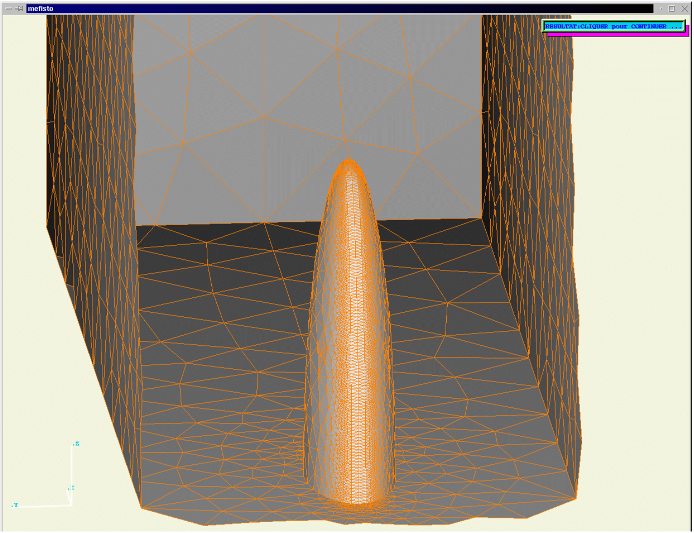
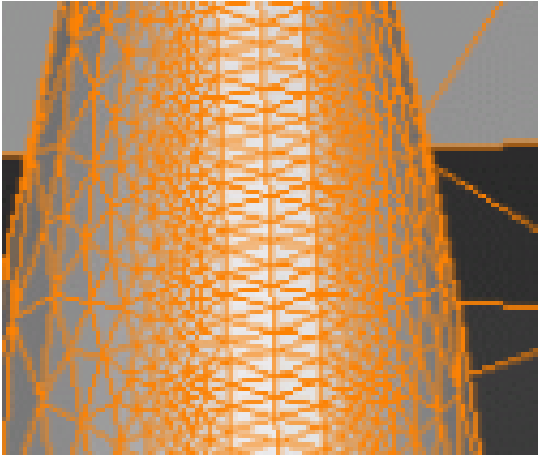


Fig.: Maillage du volume compris entre un profil NACA 16020 et une boite englobante (Logiciel Mephisto par Laurent Jeanfaivre - ASCI)

Une remarque - 2



Maille $\sim \xi_{min}$. Donc : résultat ponctuelle n'a pas de sens.

Mais (par exemple) : $\displaystyle\int_{\mathcal{B}} \overline{\rho}\, dx$ a du sens $\left(\sim \displaystyle\int_{\mathcal{B}} \overline{\rho}\, dx \right)$.

Que peut-on faire des simulations ?

À l'aide de simulations, il est possible de faire :

- Prévisions
- Tests d'hypothèses
- Contribution à des tests de scénarios
- Optimisation

Que peut-on faire du couple modélisation / simulations ?

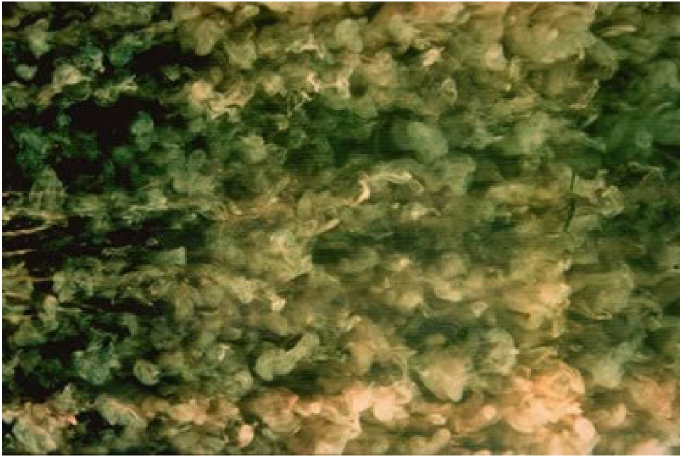


Fig.: Écoulement turbulent le long d'une plaque sans gradient de pression longitudinal (ONERA)

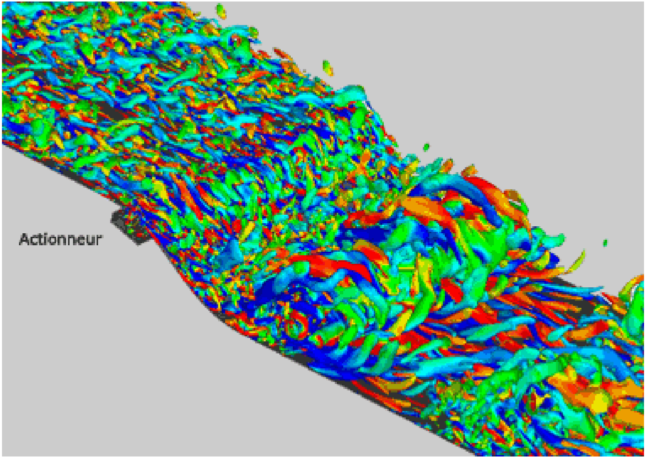


Fig.: Calcul 3D d'un écoulement turbulent sur une rampe descendante équipée d'un actionneur pulsant des tourbillons à l'amont de la zone de décollement (ONERA))

Outils mathématiques

- Analyse
- Analyse fonctionnelle
- Théorie des EDP
- Théorie des opérateurs
- Théorie de l'approximation
- Analyse asymptotique
- Homogénéisation
- Analyse multi-echelles

Permettent d'aborder les modèles comme des objets mathématiques.

$$\rho = \rho(t,x)\ ;\quad U = U(t,x)\ ;\quad T = T(t,x)\ ;\quad P = P(t,x).$$
$$\mathrm{NS}(\rho, U, T, P) = 0.$$

Peut être remplacé par

$$\widetilde{\rho} = \widetilde{\rho}(t,x)\ ;\quad \widetilde{U} = \widetilde{U}(t,x)\ ;\quad \widetilde{T} = \widetilde{T}(t,x)\ ;\quad \widetilde{P} = \widetilde{P}(t,x).$$
$$\widetilde{\mathrm{NS}}(\widetilde{\rho}, \widetilde{U}, \widetilde{T}, \widetilde{P}) = 0.$$

Contient l'action moyenne des microstructures sur les structures macroscopiques et vice versa.

$$\widetilde{\rho} \sim \rho\ ;\quad \widetilde{U} \sim U\ ;\quad \widetilde{T} \sim T\ ;\quad \widetilde{P} \sim P.$$

Peut être étayé par des simulations numériques.

La modélisation continue des questions MGDIS

Pourquoi passer à la modélisation continue

- Modélisation Financière à temps continu
  - Modèles valables à toutes les échelles de temps. Puis discrétisés à la période mensuelle, trimestrielle, semestrielle ou annuelle juste avant implémentation
  - Modèles valables à toutes les échelles de temps implémentés tels quels. Puis présentation des résultats à la période voulue.
- Modélisation financière multi-échelles
- Modélisation financière multi-niveaux
- Observatoire des territoires multi-échelles
- Outils de programmation, suivi, pilotage et évaluation multi-niveaux et multi-échelles