

Sur la conservation de la masse, de l'énergie et du moment cinétique pour les schémas d'advection en variables $r, v_{\parallel}, v_{\perp}$

Emmanuel Frénod *

Résumé

Nous étudions les possibilités de construire des schémas d'advection qui préservent les propriétés physiques que sont la conservation de la masse, de l'énergie et du moment cinétique en variables 1D-espace 2D-vitesse $r, v_{\parallel}, v_{\perp}$.

Pour cela nous rappelons que ces propriétés sont la conséquence de la conservation le long des caractéristiques des mesures de masse $f d\mu$, d'énergie $(v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2) f d\mu$ et de moment cinétique $r v_{\perp} f d\mu$, où $d\mu = r^2 v_{\perp} dr dv_{\parallel} dv_{\perp}$. Puis, nous construisons un schéma d'advection qui possède une propriété similaire à la conservation des mesures de masse et d'énergie. Il conserve alors la masse et l'énergie.

Enfin nous montrons que la conservation du moment cinétique ne peut se faire qu'au détriment de la validité du schéma.

1 Introduction et propriétés de l'advection

L'évolution de la fonction de répartition $f(t, x, v)$ d'un plasma chaud et complètement ionisé est modélisée par l'équation de Vlasov-Fokker-Planck qui en variables euclidiennes s'écrit :

$$\begin{cases} \partial_t f + v \cdot \nabla_x f = P(f, f), \\ f|_{t=0} = f_0, \end{cases} \quad (1.1)$$

où $P(f, f)$ modélise les interactions entre les particules du plasma et où $x \in \mathbb{R}^3$, $v \in \mathbb{R}^3$ et $t \in \mathbb{R}^+$. Nous renvoyons à Krall et Trivelpiece[11], Arsevev et Peskov[2], Arsevev et Buryak[1], Bobylev [3], Devillettes [7], Degond et Lucquin-Desreux [6] et

*LMAM, Centre Universitaire de Vannes, Université de Bretagne Sud, 1 rue de la loi, F-56000 Vannes; travail effectué dans le cadre d'un contrat avec le Commissariat à l'Énergie Atomique, centre de Limeil-Valenton, F-94195 Villeneuve-St-Georges cedex

Goudon [10, 9] pour une revue complète sur cette équation.

Si la donnée initiale f_0 ne dépend que de la distance $r = |x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ entre x et l'origine, de la composante $v_{||}$ de v sur le le rayon vecteur x ($v_{||} = v \cdot x/|x|$) et du module v_{\perp} de la projection de v sur le plan orthogonal à x , il en est alors de même pour f à tous les instants t . Ainsi, nous introduisons le système de coordonnées sphériques en variable de position (r, θ, ϕ) défini par

$$x_1 = r \sin \theta \cos \varphi, \quad x_2 = r \sin \theta \sin \varphi, \quad x_3 = r \cos \theta. \quad (1.2)$$

En notant (e_1, e_2, e_3) la base associée au système (x_1, x_2, x_3) , la base locale usuelle associée à (r, θ, φ) est $(u_r, u_{\theta}, u_{\varphi})$, avec $u_r = x/|x| = \sin \theta \cos \varphi e_1 + \sin \theta \sin \varphi e_2 + \cos \theta e_3$, $u_{\theta} = \cos \theta \cos \varphi e_1 + \cos \theta \sin \varphi e_2 - \sin \theta e_3$ et $u_{\varphi} = -\sin \varphi e_1 + \cos \varphi e_2$ (c.f. figure 1.a). Nous appelons alors $(v_r, v_{\theta}, v_{\varphi})$ les coordonnées de la vitesse v dans cette base locale et enfin nous introduisons le système de coordonnées cylindriques $(v_{||}, v_{\perp}, \alpha)$, défini par (c.f. figure 1.b)

$$v_r = v_{||}, \quad v_{\theta} = v_{\perp} \cos \alpha, \quad v_{\varphi} = v_{\perp} \sin \alpha, \quad (1.3)$$

Dans ce système de coordonnées, l'équation de Vlasov-Fokker-Planck (1.1) devient

$$\begin{cases} \partial_t f + v_{||} \partial_r f + \frac{v_{\perp}^2}{r} \partial_{v_{||}} f - \frac{v_{||} v_{\perp}}{r} \partial_{v_{\perp}} f = P(f, f), \\ f|_{t=0} = f_0, \end{cases} \quad (1.4)$$

où $f(t, r, v_{||}, v_{\perp})$ est définie sur $\mathbb{R}_t \times \mathcal{E}$, avec $\mathcal{E} = \mathbb{R}_r^+ \times \mathbb{R}_{v_{||}} \times \mathbb{R}_{v_{\perp}}^+$.

La méthode usuellement utilisée pour calculer une solution approchée de (1.4) consiste, à chaque pas de temps, à découpler la résolution de l'équation de Fokker-Planck homogène

$$\begin{cases} \partial_t \bar{f} = P(\bar{f}, \bar{f}), \\ \bar{f}|_{t=0} = \bar{f}_0, \end{cases} \quad (1.5)$$

et celle de l'équation d'advection

$$\begin{cases} \partial_t \tilde{f} + v_{||} \partial_r \tilde{f} + \frac{v_{\perp}^2}{r} \partial_{v_{||}} \tilde{f} - \frac{v_{||} v_{\perp}}{r} \partial_{v_{\perp}} \tilde{f} = 0 \\ \tilde{f}|_{t=0} = \tilde{f}_0. \end{cases} \quad (1.6)$$

où \tilde{f}_0 provient de la résolution de (1.5).

Or la résolution de (1.5) a été étudiée, implémentée et testée dans Frénod et Lucquin-Desreux [8]. Les schémas qui y sont considérés préservent les propriétés physiques que sont la conservation de la masse de l'impulsion et de l'énergie. De plus ils réalisent la décroissance de l'entropie. Et donc, nous nous intéressons ici à des schémas de résolution de l'équation d'advection

$$\begin{cases} \partial_t f + v_{||} \partial_r f + \frac{v_{\perp}^2}{r} \partial_{v_{||}} f - \frac{v_{||} v_{\perp}}{r} \partial_{v_{\perp}} f = 0, \\ f|_{t=0} = f_0, \end{cases} \quad (1.7)$$

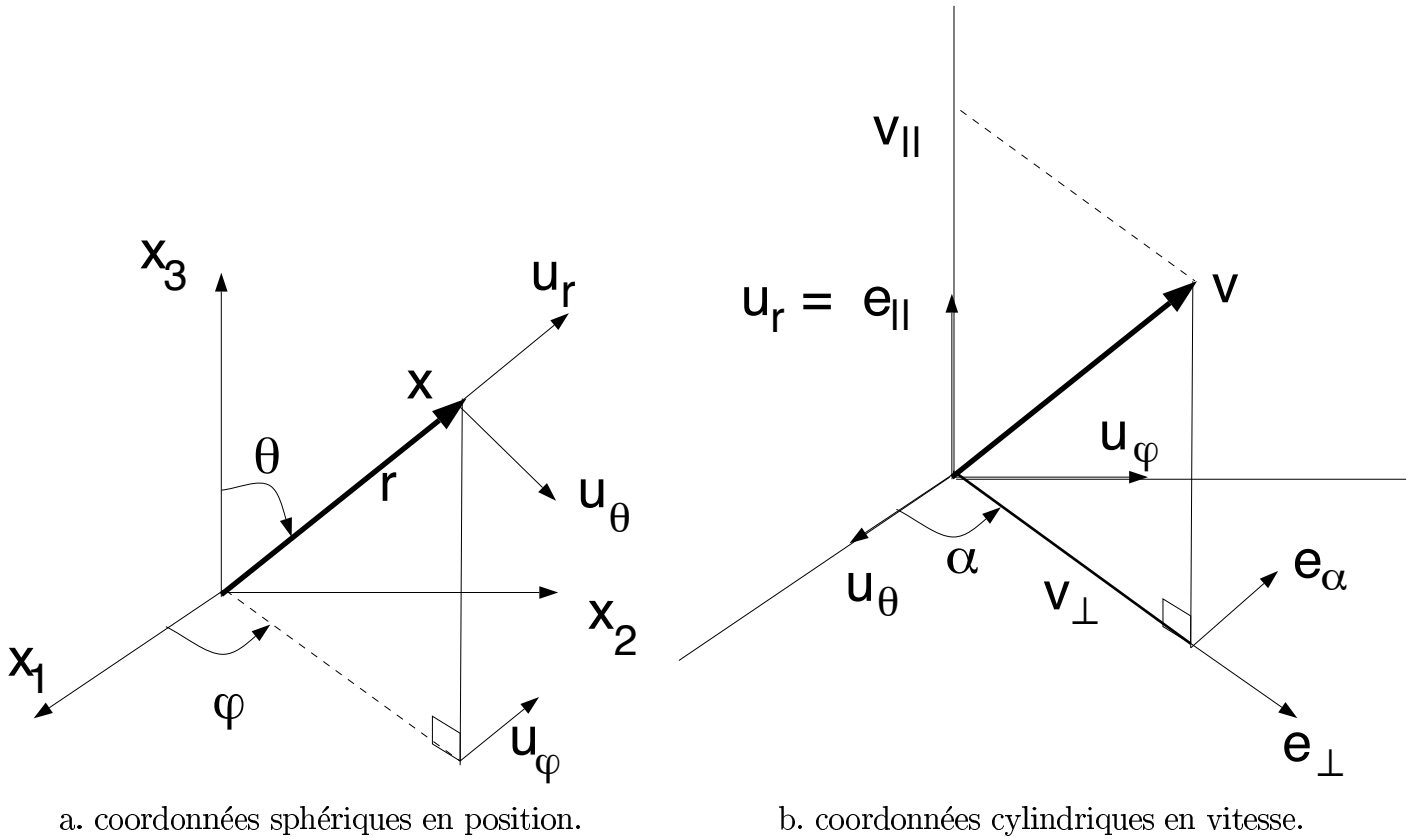


FIG. 1: Système de coordonnées.

où $f(t, r, v_{\parallel}, v_{\perp})$ est définie sur $\mathbb{R}_t \times \mathcal{E}$, avec $\mathcal{E} = \mathbb{R}_r^+ \times \mathbb{R}_{v_{\parallel}} \times \mathbb{R}_{v_{\perp}}^+$, qui puissent aisément se coupler aux schémas de résolution de l'équation de Fokker-Planck homogène de [8]. Cette contrainte impose en particulier que la fonction de répartition discrète approchant f soit définie à tous les instants sur un maillage identique. Ceci exclut donc les méthodes particulières (c.f. [12]). Pourtant ces dernières seraient certainement adaptées à la géométrie des caractéristiques associées à l'équation (1.7) : certaines d'entre elles ont, comme nous le verrons, une forte courbure. D'ailleurs, cette forte courbure semble exclure l'utilisation de méthodes de type différences finies comme cela est fait dans Buet et Degond [4]. En effet, cela induirait l'utilisation de pas de temps très petits.

La méthode qui semble alors s'imposer consiste à effectuer une advection exacte puis à répartir le résultat obtenu sur les nœuds d'un maillage (identique à tous les instants). Cette idée a déjà été exploitée dans Rogier et Schneider [13] et dans Deck et Samba [5]. Nous renvoyons également à Staniforth et Côté [14] pour une revue de ces méthodes. Le point commun de toutes ces références est l'utilisation de techniques d'interpolation pour effectuer la répartition.

Ici, ayant à notre disposition un solveur de Fokker-Planck respectant les propriétés physiques, nous souhaitons que le solveur de l'advection soit, lui aussi, respectueux

des propriétés physiques. C'est ce respect qui guidera donc la façon de répartir le résultat de l'advection exacte.

Les propriétés physiques essentielles de l'advection sont la conservation de la masse, de l'énergie et du moment cinétique et s'écrivent :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{E}} f(t, r, v_{\parallel}, v_{\perp}) d\mu, \\ \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{E}} (v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2) f(t, r, v_{\parallel}, v_{\perp}) d\mu, \\ \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{E}} r v_{\perp} f(t, r, v_{\parallel}, v_{\perp}) d\mu, \end{cases} \quad (1.8)$$

avec $d\mu = r^2 v_{\perp} dr dv_{\parallel} dv_{\perp}$. Elles sont la conséquence, d'une part, de l'invariance de f le long des caractéristiques $\mathcal{C}(s, M, t) = (R(s, M, t), V_{\parallel}(s, M, t), V_{\perp}(s, M, t))$,

$$\begin{cases} R(s, M, t) = \left((r + v_{\parallel}(t-s))^2 + (v_{\perp}(t-s))^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \\ V_{\parallel}(s, M, t) = \frac{v_{\parallel}r + (v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2)(t-s)}{R(s, M, t)}, \\ V_{\perp}(s, M, t) = \frac{v_{\perp}r}{R(s, M, t)}, \end{cases} \quad (1.9)$$

solutions du système dynamique associé à (1.7) :

$$\begin{cases} \dot{R} = V_{\parallel}, \quad \dot{V}_{\parallel} = \frac{V_{\perp}^2}{R}, \quad \dot{V}_{\perp} = -\frac{V_{\parallel}V_{\perp}}{R}, \\ (R(s, M, s), V_{\parallel}(s, M, s), V_{\perp}(s, M, s)) = M = (r, v_{\parallel}, v_{\perp}). \end{cases} \quad (1.10)$$

En d'autres termes, nous avons :

$$f(t, r, v_{\parallel}, v_{\perp}) = f(s, R(t, M, s), V_{\parallel}(t, M, s), V_{\perp}(t, M, s)). \quad (1.11)$$

Et, d'autre part, le système (1.9) préserve la mesure μ , i.e.

$$\int_A d\mu = \int_{\mathcal{C}(s, A, t)} d\mu, \quad (1.12)$$

pour tous réels s et t et tout sous ensemble A de \mathcal{E} ; ou ce qui est équivalent :

$$\int_A F(r, v_{\parallel}, v_{\perp}) d\mu = \int_{\mathcal{C}(s, A, t)} F(R(t, M, s), V_{\parallel}(t, M, s), V_{\perp}(t, M, s)) d\mu, \quad (1.13)$$

pour tous réels s et t , tout sous ensemble A de \mathcal{E} et toute fonction F de $L^1(\mathcal{E}, \mu)$.

Ainsi, de (1.13), en posant $F(r, v_{\parallel}, v_{\perp}) = f(s, r, v_{\parallel}, v_{\perp})$, et en utilisant (1.11) nous tirons l'invariance par translation le long des caractéristiques de la mesure de masse $f d\mu$:

$$\begin{aligned} \int_A f(s, r, v_{\parallel}, v_{\perp}) d\mu &= \int_{\mathcal{C}(s, A, t)} f(s, R(t, M, s), V_{\parallel}(t, M, s), V_{\perp}(t, M, s)) d\mu \\ &= \int_{\mathcal{C}(s, A, t)} f(t, r, v_{\parallel}, v_{\perp}) d\mu \end{aligned} \quad (1.14)$$

pour tous réels s et t et tout sous ensemble A . En posant alors $A = \mathcal{E}$ dans cette dernière formule, sachant $\mathcal{C}(s, \mathcal{E}, t) = \mathcal{E}$, nous obtenons (1.8.a).

En remarquant de plus, que les solutions du système dynamique (1.10) vérifient :

$$\frac{d}{dt}(RV_{\perp}) = \frac{d}{dt}(V_{\parallel}^2 + V_{\perp}^2) = 0, \quad (1.15)$$

et en utilisant (1.13) avec, soit $F(r, v_{\parallel}, v_{\perp}) = (v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2)f(s, r, v_{\parallel}, v_{\perp})$, soit $F(r, v_{\parallel}, v_{\perp}) = rv_{\perp}f(s, r, v_{\parallel}, v_{\perp})$, nous obtenons l'invariance par translation le long des caractéristiques des mesures d'énergie $(v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2)f d\mu$ et de moment cinétique $rv_{\perp}f d\mu$:

$$\begin{aligned} \int_A (v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2)f(s, r, v_{\parallel}, v_{\perp}) d\mu &= \int_{\mathcal{C}(s, A, t)} (V_{\parallel}^2(t, M, s) + V_{\perp}^2(t, M, s)) \\ &\quad f(s, R(t, M, s), V_{\parallel}(t, M, s), V_{\perp}(t, M, s)) d\mu, \\ &= \int_{\mathcal{C}(s, A, t)} (v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2)f(t, r, v_{\parallel}, v_{\perp}) d\mu, \end{aligned} \quad (1.16)$$

et

$$\int_A rv_{\perp}f(s, r, v_{\parallel}, v_{\perp}) d\mu = \int_{\mathcal{C}(s, A, t)} rv_{\perp}f(t, r, v_{\parallel}, v_{\perp}) d\mu, \quad (1.17)$$

pour tous réels s et t et tout sous ensemble A . Les formules (1.8.b) et (1.8.c) sont ensuite obtenues en choisissant $A = \mathcal{E}$.

Il est important de remarquer que les relations (1.8) sont la conséquence de relations plus locales que sont les identités (1.14), (1.16) et (1.17). Or notre but étant d'étudier les possibilités de construire des schémas d'advection possédant des propriétés analogues à (1.8), nous étudions donc les possibilités de préserver les propriétés (1.14), (1.16) et (1.17) lors de la discrétisation .

Nous montrons alors qu'il est aisé d'obtenir des schémas conservant la masse et l'énergie (i.e. possédant des propriétés similaires à (1.14), (1.16) et donc à (1.8.a) et (1.8.b)). En revanche, il ne semble pas exister de schémas raisonnables préservant en plus le moment cinétique (i.e. possédant une propriété similaire à (1.17) et donc à (1.8.c)).

Dans la section 2, nous présentons un schéma conservant la masse et l'énergie avec un maillage régulier. Pour cela, nous discrétisons l'espace \mathcal{E} en un maillage E composé de parallélépipèdes rectangles, sur lequel nous plaçons la mesure $\nu = rv_{\perp}$ approximant μ . Puis, nous contruisons des caractéristiques discrètes sur E . Celles-ci associent à tout point M de E un ensemble $B(s, M, t)$ de points constitué des huit nœuds de E entourant $\mathcal{C}(s, M, t)$. Enfin, à l'aide de cette notion de caractéristique discrète, nous construisons sur l'ensemble des fonctions définies sur E une transformation possédant des propriétés analogues à (1.14) et (1.16). Pour cela, nous répartissons de manière ad-hoc la valeur $\nu f(M)$ sur les nœuds de $B(s, M, t)$.

Dans la section 3, nous montrons que dans certains parallélépipèdes du maillage, il existe une région telle que si $\mathcal{C}(s, M, t)$ y appartient, il est impossible de réaliser

une répartition de la valeur $\nu f(M)$ sur les nœuds du parallélépipède (qui est alors $B(s, M, t)$) induisant des propriétés analogues à (1.14), (1.16) et (1.17) simultanément.

2 Un schéma conservant la masse et l'énergie

Dans cette section, nous proposons un schéma d'advection qui conserve la masse et l'énergie ; c'est à dire qui possède des propriétés analogues à (1.14) et (1.16) et donc à (1.8.a) et (1.8.b).

L'espace \mathcal{E} est discrétisé par un maillage régulier $E = \{r^i, i = 0, +\infty\} \times \{v_{\parallel}^k, k = -\infty, +\infty\} \times \{v_{\perp}^m, m = 0, +\infty\}$. La fonction de répartition f définie à chaque instant t sur \mathcal{E} est approchée par $\Phi = (\Phi_{ikm})_{i=0,+\infty, k=-\infty,+\infty, m=0,+\infty}$ définie pour la suite d'instant $\{t_p, p = 0, +\infty\}$ sur E . La valeur de $\Phi_{ikm}(t_p)$ est une approximation de $f(t_p, r^i, v_{\parallel}^k, v_{\perp}^m)$. Nous construisons la suite $(\Phi(t_p))$ de sorte que

$$\sum_E \left(r^{i^2} v_{\perp}^m \Phi_{ikm}(t_p) \right) \text{ et } \sum_E \left(v_{\parallel}^{k^2} + v_{\perp}^{m^2} \right) \left(r^{i^2} v_{\perp}^m \Phi_{ikm}(t_p) \right) \quad (2.1)$$

soit indépendantes de t_p .

En premier lieu, $\Phi_{ikm}(0)$ est obtenue en approximant la donnée initiale f_0 . Ensuite, nous exprimons $\Phi(t_{p+1})$ en fonction de $\Phi(t_p)$. Pour cela, nous commençons par calculer la position $\mathcal{C}(t_p, M, t_{p+1})$ de chaque nœud $M = M_{ikm} = (r^i, v_{\parallel}^k, v_{\perp}^m)$ de E après translation le long des caractéristiques solutions de (1.10). Nous avons :

$$\mathcal{C}(t_p, M, t_{p+1}) = (R(t_p, M, t_{p+1}), V_{\parallel}(t_p, M, t_{p+1}), V_{\perp}(t_p, M, t_{p+1})), \quad (2.2)$$

avec $R, V_{\parallel}, V_{\perp}$ donnés par la formule (1.9). Nous considérons ensuite $B(t_p, M, t_{p+1})$ l'ensemble des huit nœuds de E entourant $\mathcal{C}(t_p, M, t_{p+1})$ (c.f. figure 2). Nous avons :

$$B(t_p, M, t_{p+1}) = \{N_{000}, N_{001}, N_{010}, N_{011}, N_{100}, N_{101}, N_{110}, N_{111}\}, \quad (2.3)$$

avec $N_{\iota\lambda\mu} \in E$ pour $(\iota, \lambda, \mu) \in \{0, 1\}^3$. Nous notons :

$$N_{\iota\lambda\mu} = (q^{\iota}, u_{\parallel}^{\lambda}, u_{\perp}^{\mu}), \quad (\iota, \lambda, \mu) \in \{0, 1\}^3, \quad (2.4)$$

où $q^0 = q^0(t_p, M, t_{p+1})$ et $q^1 = q^1(t_p, M, t_{p+1})$ sont les deux points successifs du maillage de l'axe r vérifiant

$$q^0 \leq R(t_p, M, t_{p+1}) \leq q^1, \quad (2.5)$$

où $u_{\parallel}^0 = u_{\parallel}^0(t_p, M, t_{p+1})$ et $u_{\parallel}^1 = u_{\parallel}^1(t_p, M, t_{p+1})$ sont les deux points successifs du maillage de l'axe v_{\parallel} vérifiant

$$u_{\parallel}^0 \leq V_{\parallel}(t_p, M, t_{p+1}) \leq u_{\parallel}^1, \quad (2.6)$$

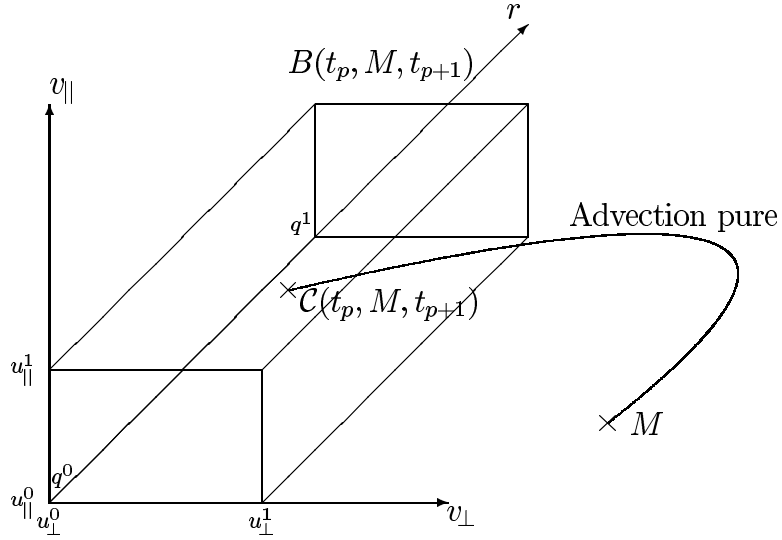


FIG. 2: Représentation de $B(t_p, M, t_{p+1})$.

et où $u_{\perp}^0 = u_{\perp}^0(t_p, M, t_{p+1})$ et $u_{\perp}^1 = u_{\perp}^1(t_p, M, t_{p+1})$ sont les deux points successifs du maillage de l'axe v_{\perp} vérifiant

$$u_{\perp}^0 \leq V_{\perp}(t_p, M, t_{p+1}) \leq u_{\perp}^1. \quad (2.7)$$

Ensuite, nous répartissons la valeur de la fonction ($r^2 v_{\perp} \Phi(t_p)$) au nœud M (cette valeur est $r^{i^2} v_{\perp}^m \Phi_{ikm}(t_p)$) sur les points de $B(t_p, M, t_{p+1})$. En nommant $A_{\iota\lambda\mu}$ la contribution de cette valeur à la valeur de ($r^2 v_{\perp} \Phi(t_{p+1})$) au nœud $((q^{\iota}, u_{\parallel}^{\lambda}, u_{\perp}^{\mu}))$, nous posons

$$A_{\iota\lambda\mu} = \left(\frac{q^{\iota+1} - R}{q^{\iota+1} - q^{\iota}} \right) \left(\frac{u_{\parallel}^{\lambda+1^2} - V_{\parallel}^2}{u_{\parallel}^{\lambda+1^2} - u_{\parallel}^{\lambda^2}} \right) \left(\frac{u_{\perp}^{\mu+1^2} - V_{\perp}^2}{u_{\perp}^{\mu+1^2} - u_{\perp}^{\mu^2}} \right) \left(r^{i^2} v_{\perp}^m \Phi_{ikm}(t_p) \right), \quad (2.8)$$

pour $(\iota, \lambda, \mu) \in \{0, 1\}^3$ et avec la convention $1 + 1 = 0$.

Enfin, la valeur de $\Phi(t_{p+1})$ au nœud $M_{jln} = (r^j, v_{\parallel}^l, v_{\perp}^n)$ est définie comme la somme de toutes les contributions $A_{\iota\lambda\mu}$ issues de répartitions de valeur de la fonction ($r^2 v_{\perp} \Phi(t_p)$) en des points M tels que $M_{jln} \in B(t_p, M, t_{p+1})$. En d'autres termes, nous posons

$$\Phi_{jln}(t_{p+1}) = \sum_{q^{\iota}(t_p, M, t_{p+1})=r^j, u_{\parallel}^{\lambda}(t_p, M, t_{p+1})=v_{\parallel}^l, u_{\perp}^{\mu}(t_p, M, t_{p+1})=v_{\perp}^n, M \in E} \frac{A_{\iota\lambda\mu}}{r^{j^2} v_{\perp}^n}. \quad (2.9)$$

Le schéma ainsi construit conserve la masse et l'énergie i.e. :

THÉORÈME 2.1 *La suite $\Phi(t_p)$ définie par (2.9) vérifie :*

$$\sum_E \left(r^{i^2} v_{\perp}^m \Phi_{ikm}(t_p) \right) = \sum_E \left(r^{i^2} v_{\perp}^m \Phi_{ikm}(t_{p+1}) \right), \quad (2.10)$$

$$\sum_E (v_{\parallel}^{k^2} + v_{\perp}^{m^2}) (r^{i^2} v_{\perp}^m \Phi_{ikm}(t_p)) = \sum_E (v_{\parallel}^{k^2} + v_{\perp}^{m^2}) (r^{i^2} v_{\perp}^m \Phi_{ikm}(t_{p+1})). \quad (2.11)$$

Ce Théorème est la conséquence directe du

LEMME 2.2 *Les quote-parts $A_{\iota\lambda\mu}$ issues de la répartition de $r^{i^2} v_{\perp}^m \Phi_{ikm}(t_p)$, données par la formule (2.8) vérifient*

$$\sum_{\{0,1\}^3} A_{\iota\lambda\mu} = (r^{i^2} v_{\perp}^m \Phi_{ikm}(t_p)), \quad (2.12)$$

$$\sum_{\{0,1\}^3} (u_{\parallel}^{\lambda^2} + u_{\perp}^{\mu^2}) A_{\iota\lambda\mu} = (v_{\parallel}^{k^2} + v_{\perp}^{m^2}) (r^{i^2} v_{\perp}^m \Phi_{ikm}(t_p)), \quad (2.13)$$

Démonstration. La formule (2.12) est la conséquence directe des relations suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{q^1 - R}{q^1 - q^0} + \frac{q^0 - R}{q^0 - q^1} &= 1, \\ \frac{u_{\parallel}^{1^2} - V_{\parallel}^2}{u_{\parallel}^{1^2} - u_{\parallel}^{0^2}} + \frac{u_{\parallel}^{0^2} - V_{\parallel}^2}{u_{\parallel}^{0^2} - u_{\parallel}^{1^2}} &= 1, \\ \frac{u_{\perp}^{1^2} - V_{\perp}^2}{u_{\perp}^{1^2} - u_{\perp}^{0^2}} + \frac{u_{\perp}^{0^2} - V_{\perp}^2}{u_{\perp}^{0^2} - u_{\perp}^{1^2}} &= 1. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Quant à elle, la formule (2.13) provient d'une part de :

$$\begin{aligned} u_{\parallel}^{0^2} \frac{u_{\parallel}^{1^2} - V_{\parallel}^2}{u_{\parallel}^{1^2} - u_{\parallel}^{0^2}} + u_{\parallel}^{1^2} \frac{u_{\parallel}^{0^2} - V_{\parallel}^2}{u_{\parallel}^{0^2} - u_{\parallel}^{1^2}} &= V_{\parallel}^2, \\ u_{\perp}^{0^2} \frac{u_{\perp}^{1^2} - V_{\perp}^2}{u_{\perp}^{1^2} - u_{\perp}^{0^2}} + u_{\perp}^{1^2} \frac{u_{\perp}^{0^2} - V_{\perp}^2}{u_{\perp}^{0^2} - u_{\perp}^{1^2}} &= V_{\perp}^2, \end{aligned} \quad (2.15)$$

et du fait que, d'après (1.15), nous avons :

$$\begin{aligned} V_{\parallel}^2(t_p, M, t_{p+1}) + V_{\perp}^2(t_p, M, t_{p+1}) &= V_{\parallel}^2(t_p, M_{ikm}, t_{p+1}) + V_{\perp}^2(t_p, M_{ikm}, t_{p+1}) \\ &= v_{\parallel}^{k^2} + v_{\perp}^{m^2}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

■

REMARQUE 2.3 Les propriétés (2.12) et (2.13) sont des analogues discrets de (1.14) et (1.16) alors que les propriétés (2.10) et (2.11) sont des analogues discrets de (1.8.a) et (1.8.b)

3 Sur la conservation du moment cinétique

Dans cette section, nous montrons qu'il n'est pas possible de conserver le moment cinétique en plus de la masse et de l'énergie en suivant la même démarche que dans la section 2. Par "suivre la même démarche", nous entendons que l'espace \mathcal{E} est approximé par le même maillage E , que $f(t, r, v_{\parallel}, v_{\perp})$ est approchée par la même fonction Φ définie sur E et que le processus consistant à translater la valeur $r^i v_{\perp}^m \Phi_{ikm}(t_p)$ le long des caractéristiques $\mathcal{C}(t_p, M, t_{p+1})$ puis à la répartir sur les nœuds de $B(t_p, M, t_{p+1})$ est préservé.

Plus précisément, nous montrons que si le point $\mathcal{C}(t_p, M, t_{p+1}) = (R, V_{\parallel}, V_{\perp}) = (R(t_p, M, t_{p+1}), V_{\parallel}(t_p, M, t_{p+1}), V_{\perp}(t_p, M, t_{p+1}))$, avec $M = M_{ikm}$ se trouve dans une maille telle que $u_{\parallel}^0 = u_{\perp}^0 = 0$ en la position

$$R = \tilde{R} = q^1, \quad V_{\parallel} = \tilde{V}_{\parallel} = u_{\parallel}^0 = 0 \quad \text{et} \quad V_{\perp} = \tilde{V}_{\perp} = \frac{u_{\perp}^0 + u_{\perp}^1}{2} = \frac{u_{\perp}^1}{2}, \quad (3.1)$$

il n'existe pas de solution $A_{\ell\lambda\mu}$, $(\ell, \lambda, \mu) \in \{0, 1\}^3$ vérifiant

$$A_{\ell\lambda\mu} \geq 0, \quad (\ell, \lambda, \mu) \in \{0, 1\}^3. \quad (3.2)$$

et satisfaisant simultanément

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{\{0,1\}^3} A_{\ell\lambda\mu} = \left(r^{i^2} v_{\perp}^m \Phi_{ikm}(t_p) \right), \\ \sum_{\{0,1\}^3} (u_{\parallel}^{\lambda^2} + u_{\perp}^{\mu^2}) A_{\ell\lambda\mu} = (V_{\parallel}^2 + V_{\perp}^2) \left(r^{i^2} v_{\perp}^m \Phi_{ikm}(t_p) \right) = (v_{\parallel}^{k^2} + v_{\perp}^{m^2}) \left(r^{i^2} v_{\perp}^m \Phi_{ikm}(t_p) \right), \\ \sum_{\{0,1\}^3} q^{\ell} u_{\perp}^{\mu} A_{\ell\lambda\mu} = R V_{\perp} \left(r^{i^2} v_{\perp}^m \Phi_{ikm}(t_p) \right) = r^i v_{\perp}^m \left(r^{i^2} v_{\perp}^m \Phi_{ikm}(t_p) \right), \end{array} \right. \quad (3.3)$$

La fonction $\Phi(t_{p+1})$ étant définie par (2.9), ces trois relations sont l'équivalent discret des propriétés (1.14), (1.17) et (1.16). Si elles pouvaient être satisfaites, elles impliqueraient que

$$\sum_E \left(r^{i^2} v_{\perp}^m \Phi_{ikm}(t_p) \right), \quad \sum_E r^i v_{\perp}^m \left(r^{i^2} v_{\perp}^m \Phi_{ikm}(t_p) \right) \quad \text{et} \quad \sum_E (v_{\parallel}^{k^2} + v_{\perp}^{m^2}) \left(r^{i^2} v_{\perp}^m \Phi_{ikm}(t_p) \right) \quad (3.4)$$

seraient indépendantes de t_p , et donc la conservation de la masse de l'énergie et du moment cinétique.

Pour montrer l'incompatibilité entre (3.2) et (3.3), nous notons $A = r^{i^2} v_{\perp}^m \Phi_{ikm}(t_p)$ et introduisons six paramètres $g_0, g_1, h_0, h_1, k_0, k_1$ vérifiant

$$0 \leq g_0 \leq 1, \quad g_1 = 1 - g_0, \quad h_0 \geq 0, \quad h_1 \geq 0, \quad k_0 \geq 0, \quad k_1 \geq 0. \quad (3.5)$$

Nous découplons alors (3.3) de la façon suivante :

$$\begin{cases} A_{\iota 00} + A_{\iota 10} + A_{\iota 01} + A_{\iota 11} = g_{\iota} A \\ q^{\iota} u_{\perp}^0 (A_{\iota 00} + A_{\iota 10}) + q^{\iota} u_{\perp}^1 (A_{\iota 01} + A_{\iota 11}) = \tilde{R} \tilde{V}_{\perp} h_{\iota} g_{\iota} A \\ (u_{\parallel}^{02} + u_{\perp}^{02}) A_{\iota 00} + (u_{\parallel}^{12} + u_{\perp}^{02}) A_{\iota 10} + (u_{\parallel}^{02} + u_{\perp}^{12}) A_{\iota 01} + (u_{\parallel}^{12} + u_{\perp}^{12}) A_{\iota 11} = \\ (\tilde{V}_{\parallel}^2 + \tilde{V}_{\perp}^2) k_{\iota} g_{\iota} A \end{cases} \quad (3.6)$$

avec, pour satisfaire l'équivalence entre (3.3) et (3.6),

$$h_0 g_0 + h_1 g_1 = 1 \text{ et } k_0 g_0 + k_1 g_1 = 1, \quad (3.7)$$

i.e.

$$h_0 g_0 = 1 - h_1 (1 - g_0) \text{ et } k_0 g_0 = 1 - k_1 (1 - g_0). \quad (3.8)$$

Et, nous montrons que pour que (3.6) ait des solutions positives en $\iota = 1$, il faut $g_1 \neq 0$ et $k_0 < 2h_0$ et pour qu'elle en ait en $\iota = 0$, il faut $k_0 > 2h_0$.

Remarquons au passage que (3.8) couplée à (3.5) donne

$$h_0 g_0 \leq 1, \quad h_1 g_1 \leq 1, \quad k_0 g_0 \leq 1, \quad k_1 g_1 \leq 1. \quad (3.9)$$

Plaçons nous donc en $\iota = 1$. En utilisant la définition de \tilde{R} , \tilde{V}_{\parallel} et \tilde{V}_{\perp} (3.1), les deux premières équations de (3.6) deviennent :

$$\begin{cases} \alpha_1 + \beta_1 = g_1 A, \\ u_{\perp}^1 \beta_1 = \frac{u_{\perp}^1}{2} h_1 g_1 A, \end{cases} \quad (3.10)$$

où nous avons posé :

$$\alpha_1 = A_{100} + A_{110}, \quad \beta_1 = A_{101} + A_{111}. \quad (3.11)$$

La solution de (3.10) est donnée par

$$\begin{cases} \alpha_1 = \frac{1}{2} (2 - h_1) g_1 A, \\ \beta_1 = \frac{1}{2} h_1 g_1 A. \end{cases} \quad (3.12)$$

Ecrivons ensuite la troisième équation de (3.6)

$$u_{\parallel}^{12} A_{110} + u_{\perp}^{12} A_{101} + (u_{\parallel}^{12} + u_{\perp}^{12}) (\beta_1 - A_{101}) = \frac{u_{\perp}^{12}}{4} k_1 g_1 A, \quad (3.13)$$

i.e.

$$A_{110} - A_{101} = \left(\frac{u_{\perp}^{12}}{u_{\parallel}^{12}} \left(\frac{k_1}{4} - \frac{h_1}{2} \right) - \frac{h_1}{2} \right) g_1 A. \quad (3.14)$$

Donc, d'après (3.14) et (3.11) le système (3.6) devient :

$$\begin{cases} A_{111} = \frac{1}{2}h_1g_1A - A_{101}, \\ A_{110} = \left(\frac{u_{\perp}^{12}}{u_{\parallel}^{12}} \left(\frac{k_1}{4} - \frac{h_1}{2} \right) - \frac{h_1}{2} \right) g_1A + A_{101}, \\ A_{100} = \left(\frac{1}{2}(2 - h_1) - \frac{u_{\perp}^{12}}{u_{\parallel}^{12}} \left(\frac{k_1}{4} - \frac{h_1}{2} \right) + \frac{h_1}{2} \right) g_1A - A_{101}. \end{cases} \quad (3.15)$$

Et, ce dernier système a des solutions vérifiant (3.2), i.e.

$$\begin{cases} A_{101} \geq 0, \\ \frac{1}{2}h_1g_1A - A_{101} \geq 0, \\ \left(\frac{u_{\perp}^{12}}{u_{\parallel}^{12}} \left(\frac{k_1}{4} - \frac{h_1}{2} \right) - \frac{h_1}{2} \right) g_1A + A_{101} \geq 0, \\ \left(\frac{1}{2}(2 - h_1) - \frac{u_{\perp}^{12}}{u_{\parallel}^{12}} \left(\frac{k_1}{4} - \frac{h_1}{2} \right) + \frac{h_1}{2} \right) g_1A - A_{101} \geq 0, \end{cases} \quad (3.16)$$

ou

$$\begin{cases} A_{101} \geq 0, \\ A_{101} \leq \frac{1}{2}h_1g_1A, \\ A_{101} \geq - \left(\frac{u_{\perp}^{12}}{u_{\parallel}^{12}} \left(\frac{k_1}{4} - \frac{h_1}{2} \right) - \frac{h_1}{2} \right) g_1A, \\ A_{101} \leq \left(1 - \frac{u_{\perp}^{12}}{u_{\parallel}^{12}} \left(\frac{k_1}{4} - \frac{h_1}{2} \right) \right) g_1A, \end{cases} \quad (3.17)$$

si et seulement si

$$\begin{cases} h_1 \geq 0, \\ \frac{u_{\perp}^{12}}{u_{\parallel}^{12}} \left(\frac{k_1}{4} - \frac{h_1}{2} \right) \geq 0, \\ 1 - \frac{u_{\perp}^{12}}{u_{\parallel}^{12}} \left(\frac{k_1}{4} - \frac{h_1}{2} \right) \geq 0, \\ 1 - \frac{1}{2}h_1 \geq 0, \end{cases} \quad (3.18)$$

i.e.

$$\begin{cases} 0 \leq h_1 \leq 2, \\ 2h_1 \leq k_1 \leq 4 \frac{u_{\parallel}^{12}}{u_{\perp}^{12}} + 2h_1. \end{cases} \quad (3.19)$$

Si $g_1 = 1$ et $g_0 = 0$, (ce qui serait raisonnable à la vue de la définition de R) la condition

$$k_1 \geq 2h_1, \quad (3.20)$$

et la condition (3.7) ne peuvent être satisfaites simultanément. Car, alors la relation (3.7) devient :

$$h_1 = 1, \quad k_1 = 1. \quad (3.21)$$

Nous nous plaçons donc dans l'hypothèse où $g_1 \neq 1$. La condition (3.20) donne alors

$$k_1 g_1 \geq 2h_1 g_1, \quad (3.22)$$

qui, sachant que $k_1 g_1 \leq 1$, impose d'une part

$$g_1 h_1 \leq \frac{1}{2}. \quad (3.23)$$

D'autre part, en utilisant (3.8), nous obtenons $1 - g_0 k_0 \geq 2 - 2g_0 h_0$, i.e.

$$k_0 \leq 2h_0 - \frac{1}{g_0}. \quad (3.24)$$

Plaçons nous alors en $\iota = 0$, et montrons que les conditions que la positivité des $A_{0,\lambda,\mu}$ impose, sont en contradiction avec (3.24). Lorsque $\iota = 0$, les deux premières équations de (3.6) deviennent

$$\begin{cases} \alpha_0 + \beta_0 = g_0 A, \\ q^0 u_{\perp}^1 \beta_0 = q^1 \frac{u_{\perp}^1}{2} h_0 g_0 A, \end{cases} \quad (3.25)$$

où

$$\alpha_0 = A_{000} + A_{010}, \quad \beta_0 = A_{001} + A_{011}. \quad (3.26)$$

Nous avons

$$\begin{cases} \alpha_0 = \frac{1}{2} \left(2 - \frac{q^1}{q^0} h_0 \right) g_0 A, \\ \beta_0 = \frac{1}{2} \frac{q^1}{q^0} h_0 g_0 A. \end{cases} \quad (3.27)$$

Ensuite, la troisième équation de (3.6) donne

$$A_{010} - A_{001} = \left(\frac{u_{\perp}^1{}^2}{u_{\parallel}^1{}^2} \left(\frac{k_0}{4} - \frac{q^1 h_0}{q^0 2} \right) - \frac{q^1 h_0}{q^0 2} \right) g_0 A. \quad (3.28)$$

Ainsi, le système (3.6) devient

$$\begin{cases} A_{011} = \frac{1}{2} \frac{q^1}{q^0} h_0 g_0 A - A_{001}, \\ A_{010} = \left(\frac{u_{\perp}^1{}^2}{u_{\parallel}^1{}^2} \left(\frac{k_0}{4} - \frac{q^1 h_0}{q^0 2} \right) - \frac{q^1 h_0}{q^0 2} \right) g_0 A + A_{001}, \\ A_{000} = \left(\frac{1}{2} \left(2 - \frac{q^1}{q^0} h_0 \right) - \frac{u_{\perp}^1{}^2}{u_{\parallel}^1{}^2} \left(\frac{k_0}{4} - \frac{q^1 h_0}{q^0 2} \right) + \frac{q^1 h_0}{q^0 2} \right) g_0 A - A_{001}. \end{cases} \quad (3.29)$$

Ce système a des solutions positives, i.e. :

$$\begin{cases} A_{001} \geq 0, \\ \frac{1}{2} \frac{q^1}{q^0} h_0 g_0 A - A_{001} \geq 0, \\ \left(\frac{u_{\perp}^{12}}{u_{\parallel}^{12}} \left(\frac{k_0}{4} - \frac{q^1 h_0}{q^0 2} \right) - \frac{q^1 h_0}{q^0 2} \right) g_0 A + A_{001} \geq 0, \\ \left(\frac{1}{2} \left(2 - \frac{q^1}{q^0} h_0 \right) - \frac{u_{\perp}^{12}}{u_{\parallel}^{12}} \left(\frac{k_0}{4} - \frac{q^1 h_0}{q^0 2} \right) + \frac{q^1 h_0}{q^0 2} \right) g_0 A - A_{001} \geq 0, \end{cases} \quad (3.30)$$

ou

$$\begin{cases} A_{001} \geq 0, \\ A_{001} \leq \frac{1}{2} \frac{q^1}{q^0} h_0 g_0 A, \\ A_{001} \geq - \left(\frac{u_{\perp}^{12}}{u_{\parallel}^{12}} \left(\frac{k_0}{4} - \frac{q^1 h_0}{q^0 2} \right) - \frac{q^1 h_0}{q^0 2} \right) g_0 A, \\ A_{001} \leq \left(1 - \frac{u_{\perp}^{12}}{u_{\parallel}^{12}} \left(\frac{k_0}{4} - \frac{q^1 h_0}{q^0 2} \right) \right) g_0 A, \end{cases} \quad (3.31)$$

si et seulement si

$$\begin{cases} h_0 \geq 0, \\ \frac{u_{\perp}^{12}}{u_{\parallel}^{12}} \left(\frac{k_0}{4} - \frac{q^1 h_0}{q^0 2} \right) \geq 0, \\ 1 - \frac{u_{\perp}^{12}}{u_{\parallel}^{12}} \left(\frac{k_0}{4} - \frac{q^1 h_0}{q^0 2} \right) \geq 0, \\ 1 - \frac{1}{2} \frac{q^1}{q^0} h_0 \geq 0. \end{cases} \quad (3.32)$$

Ce dernier système est équivalent à :

$$\begin{cases} 0 \leq h_0 \leq 2 \frac{q^0}{q^1}, \\ 2 \frac{q^1}{q^0} h_0 \leq k_0 \leq 4 \frac{u_{\parallel}^{12}}{u_{\perp}^{12}} + 2 \frac{q^1}{q^0} h_0, \end{cases} \quad (3.33)$$

qui implique, en particulier

$$k_0 \geq 2 \frac{q^1}{q^0} h_0. \quad (3.34)$$

Or, sachant que $\frac{q^1}{q^0} > 1$ la condition (3.34) est en contradiction avec la condition (3.24). Il n'existe donc pas de solution positive au système (3.3).

Ainsi, si le point $\mathcal{C}(t_p, M, t_{p+1}) = (R(t_p, M, t_{p+1}), V_{\parallel}(t_p, M, t_{p+1}), V_{\perp}(t_p, M, t_{p+1})) = (R, V_{\parallel}, V_{\perp})$, avec $M = M_{ikm}$ se trouve dans une maille telle que $u_{\parallel}^0 = u_{\perp}^0 = 0$ en la

position $(\tilde{R}, \tilde{V}_\parallel, \tilde{V}_\perp)$, il n'existe pas de solution $A_{\iota\lambda\mu}$ positive vérifiant (3.2). Et, vu les inégalités (3.34) et (3.24), comme $\frac{g^1}{q^0} > 1$ et $g_0 > 0$, si le point $\mathcal{C}(t_p, M, t_{p+1})$ se situe dans un voisinage de $(\tilde{R}, \tilde{V}_\parallel, \tilde{V}_\perp)$, de la même façon il n'existe pas de solution $A_{\iota\lambda\mu}$ positive vérifiant (3.2).

En conclusion, dans certaines mailles (et certainement dans un grand nombre d'entre elles), il existe une région telle que si $\mathcal{C}(t_p, M, t_{p+1})$ y appartient, il est impossible de réaliser une répartition de la valeur $(r^{i^2} v_\perp^m \Phi_{ikm}(t_p))$ sur les nœuds de la maille respectant la positivité et induisant la conservation simultanée de la masse du moment cinétique et de l'énergie. Cela signifie que la préservation de ces trois quantités simultanément ne peut se faire qu'au détriment de la validité. Il faudrait en effet répartir la valeur $(r^{i^2} v_\perp^m \Phi_{ikm}(t_p))$ sur un plus grand nombre de nœuds. ■

Références

- [1] A. A. Arsevev and O. E. Buryak. On the connection between a solution of the Boltzmann equation and a solution of the Landau-Fokker-Planck equation. *Math. USSR Sbornik*, 69(2) :465–478, 1991.
- [2] A. A. Arsevev and N. V. Peskov. On existence of a generalized solution of Landau's equation. *USSR Comput. Maths math. Phys.*, 17 :241–246, 1978.
- [3] A. V. Bobylev. Expansion of the Boltzmann collision integral operator in a Landau series. *Sov. Phys. Dolk.*, 20(11) :740–742, 1981.
- [4] C. Buet and P. Degond. A deterministic approximation of the Boltzmann equation. *A paraître*.
- [5] D. Deck and G. Samba. Le code Procions. Technical Report 2780, CEA/CEL-V, F94195 Villeneuve St. Georges, 1994.
- [6] P. Degond and B. Lucquin-Desreux. The Fokker-Planck asymptotics of the Boltzmann operator in the Coulomb case. *Math. Mod. and Meth. in Appl. Sc.*, 2(2), 167–182 1992.
- [7] L. Devillettes. On asymptotics of the Boltzmann equation when the collisions become grazing. *Trans. Th. and Stat. Phys.*, 21(3) :259–276, 1992.
- [8] E. Frénod and B. Lucquin-Desreux. On conservative and entropic discrete axisymmetric Fokker-Planck operators. *Accepté pour publication à Math. Mod. and Num. Anal.*
- [9] T. Goudon. On the homogeneous Boltzmann equation and its connection to the Landau-Fokker-Planck equation : influence of grazing collisions. *Communication personnelle*.

- [10] T. Goudon. Sur l'équation de Boltzmann homogène et sa relation avec l'équation de Landau-Fokker-Planck : influence des collisions rasantes. *Accepté pour publication au C.R.A.S, E.D.P.*
- [11] N.A. Krall and A.W. Trivelpiece. *Principles of Plasma Physics*. Int. Series in Pure and Appl. Phys. Mc graw-hill book company edition.
- [12] P.-A. Raviart. An analysis of particle methods. *in Lecture Notes in Mathematics (Springer-Verlag)*, 1127 :243–324, 1985.
- [13] F. Rogier and J. Schneider. A direc method for solving the Boltzmann equation. *Accepté pour publication à Th. and Stat. Phys.*
- [14] A. Staniforth and J. Côté. Semi-Lagangian integration schemes for atmospheric models - A review. *Month. Weath. Rev.*, 119 :2206–2223, 1991.