THÈSE DE DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ PARIS NORD

Spécialité
MATHÉMATIQUES

présentée par
Emmanuel FRÉNOD

pour obtenir le titre de Docteur de l'Université Paris Nord

Sujet
Homogénéisation d'équations cinétiques avec potentiels oscillants

Soutenue à Cachan, le 16 Décembre 1994, devant le Jury composé de

Claude BARDOS
Claude BASDEVANT
Patrick GÉRARD
Jean-Claude GUILLOT
Kamel HAMDACHE
Frédéric HÉLEIN
Benoît PERTHAME

Remerciements

Je remercie Kamel Hamdache de m'avoir aiguillé et conseillé sur un sujet très intéressant et porteur.

Je désire également remercier Claude Basdevant pour le soutien qu'il m'a apporté au cours de ces trois années.

Claude Bardos a continuellement montré de l'intérêt pour mon travail et m'a donné des conseils pertinents. Il a accepté d'être rapporteur de cette thèse et membre du jury ce qui me touche beaucoup. Qu'il trouve ici la marque de ma reconnaissance.

Je désire également remercier Guy Métivier qui s'est intéressé à mon travail en acceptant d'être rapporteur. Il m'a communiqué, à cette occasion, quelques remarques pertinentes.

J'ai eu avec Frédéric Hélein plusieurs discussions qui m'ont éclairé sur certains points. Pour cela, et parce qu'il a accepté d'être membre du jury je le remercie chaleureusement.

Je remercie aussi Patrick Gérard, Jean-Claude Guillot et Benoît Perthame qui me font l'honneur d'être membres du jury.

Merci à Radja Alexandre avec qui j'ai beaucoup travaillé et discuté au cours de ces années. Bien des points de cette thèse se sont éclairés grâce à son aide.

Enfin, je désire remercier les membres des laboratoires dans lesquels j'ai travaillé pendant ces trois années, à savoir les membres du GHN du CMLA et du CEA/CELV. L' ambiance qui règne dans ces différents laboratoires a grandement facilité la réalisation de ce travail.

Table des matières

1 Introduction **4**
- 1.1 Présentation générale, notations 4
- 1.2 Motivations physiques 4
- 1.3 Analyse d'un exemple 6
- 1.4 Résumé de la méthode utilisée 8

2 Homogénéisation en dimension un **11**
- 2.1 Introduction, résultat principal 11
- 2.2 Preuve du théorème 2.1, $1^{ère}$ étape : équations du profil 12
- 2.3 $2^{ème}$ étape : Homogénéisation non locale 21
- 2.4 Comportement effectif de la densité de masse 22
- 2.5 Homogénéisation avec donnée initiale constante en vitesse 23
- 2.6 Exemple 25

3 Quelques perturbations du champ de force **27**
- 3.1 Cas d'une perturbation constante 27
- 3.2 Cas d'une perturbation oscillante à action moyenne nulle sur les particules piégées 32
- 3.3 Cas d'une perturbation oscillante à action moyenne non nulle sur les particules piégées 39

4 Le cas bidimensionnel du potentiel radial oscillant **43**

5 Introduction à l'homogénéisation en dimension quelconque **48**

6 Cas d'un potentiel ne dépendant que de la première coordonnée $u(y) = v(y_1)$ **49**

7 Un exemple donnant un système hamiltonien intégrable **53**
- 7.1 Introduction, résultats 53
- 7.2 Démonstration du théorème 7.4 56
- 7.3 Exemple du "Cat eye's flow" 67

8 Cas général **71**
- 8.1 Introduction, résultats 71
- 8.2 Estimations 72
- 8.3 Projection $\mathbb{P}$ et propriétés 73
- 8.4 Preuve du théorème 8.1 76

9 Homogénéisation non locale **79**

1 Introduction

1.1 Présentation générale, notations

Nous nous intéressons ici à un problème dans lequel deux échelles interviennent. L'échelle microscopique qui est caractéristique du phénomène physique et l'échelle macroscopique à laquelle le phénomène est observé.
Notre but est alors de déduire le modèle effectif (ou macroscopique) à partir du modèle microscopique. Pour être plus précis, nous désirons obtenir l'équation décrivant le phénomène à l'échelle macroscopique, connaissant celle modélisant le phénomène à l'échelle microscopique. Pour ce faire, nous paramétrons cette dernière par la taille typique de l'échelle microscopique ε, et obtenons une suite de solutions paramétrées par ε. Nous faisons alors tendre ce paramètre vers 0 et cherchons l'équation satisfaite par la limite faible de la suite de solutions.

L'équation de l'échelle microscopique que nous envisageons ici est l'équation de transport cinétique modélisant le mouvement de particules soumises à l'action d'un champ de force dérivant d'un potentiel oscillant

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t f^\varepsilon + \xi \cdot \nabla_x f^\varepsilon - \dfrac{1}{\varepsilon} \left(\nabla_y u \right) \left(\dfrac{x}{\varepsilon} \right) \cdot \nabla_\xi f^\varepsilon = 0, \\ f^\varepsilon_{|t=0} = f^\varepsilon_0, \end{array} \right. \tag{1.1}$$

où nous avons utilisé les notations suivantes. $f^\varepsilon \equiv f^\varepsilon(t,x,\xi)$, $t \in (0,T)$, où T est un réel positif, est la variable de temps, $x \in \mathbb{R}^n$ désigne la position et $\xi \in \mathbb{R}^n$ la vitesse. Le champ de force que nous considérons dans l'équation (1.1) dérive du potentiel oscillant $u^\varepsilon(x) = u(\frac{x}{\varepsilon})$. Nous supposons que $u(y)$ est $Y-$périodique où $Y \subset \mathbb{R}^n$ est un cube de $\mathbb{R}^n$. Nous identifierons généralement Y à $[-1,1]^n$.

Dans la suite nous noterons $\mathcal{O} = \mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^n_\xi$ et $\mathcal{Q} = (0,T) \times \mathcal{O}$. Nous appellerons $C^r_p(Y)$ l'ensemble des fonctions r fois continuement dérivables et $Y-$ périodiques, et $L^r_p(Y)$ (resp. $H^1_p(Y)$) celui des fonctions $L^r_{loc}(\mathbb{R}^n)$ (resp. $H^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$) qui sont $Y-$périodiques. La valeur moyenne d'une fonction périodique par rapport à $y \in Y$ s'écrira $\langle f(\cdot) \rangle = \dfrac{1}{|Y|} \displaystyle\int_Y f(y)dy$.

1.2 Motivations physiques

Une des motivations de ce travail est l'étude de la modélisation de l'interaction gaz-solide lorsque le solide est un cristal. Nous renvoyons le lecteur intéressé par ce sujet à F.O.Goodman & Y.W.Wachman [26] où est décrit un nombre important de modèles.

Nous supposons que les particules de gaz peuvent pénétrer le réseau cristallin du solide et s'y déplacer. Elles interagissent alors avec les atomes, supposés fixes du solide.
Dans un modèle complet, le solide agit sur une particule via une somme de potentiels à deux points. En effet, l'atome du solide placé en x_i crée en x le potentiel $W(x - x_i)$.

Ainsi, le potentiel résultant est

$$\tilde{V}(x) = \sum_{i=1}^{N} W(x - x_i), \tag{1.2}$$

où N est le nombre d'atomes du solide. Néanmoins, il est possible de simplifier ce modèle. Comme l'explique F.O.Goodman & Y.W.Wachman [26] dans le chapitre 4.8, le potentiel créé par un atome est la somme d'une composante à courte portée et à fort gradient, et d'une composante à longue portée et à faible gradient. En négligeant la seconde et en supposant que la portée de la première n'excède pas la moitié de la distance interatomique du solide, une particule ne subit l'action que d'un seul atome à la fois. Le potentiel $\tilde{V}$ devient un potentiel périodique dont une période est la cellule de base du cristal. Ceci se traduit par

$$\tilde{V}(x) = u\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \tag{1.3}$$

où $u(\cdot)$ est une fonction périodique de période Y et ε la taille caractéristique du réseau.

Une fois cette hypothèse effectuée sur le potentiel, l'équation qui semble la plus naturelle pour modéliser le déplacement des particules au sein du réseau est l'équation de Liouville quantique avec potentiel oscillant,

$$\left\{\begin{array}{l} \partial_t f^\varepsilon + \xi \cdot \nabla_x f^\varepsilon + \dfrac{iq}{(2\pi)^n} \displaystyle\int_{{\rm I\!R}^n} \int_{{\rm I\!R}^n} e^{i(\xi-\xi')\eta} f^\varepsilon(t,x,\xi') \\ \qquad\qquad \dfrac{1}{\hbar}\left\{ u\left(\dfrac{x+\hbar/2\,\eta}{\varepsilon}\right) - u\left(\dfrac{x-\hbar/2\,\eta}{\varepsilon}\right)\right\} d\xi' d\eta = 0, \\ f^\varepsilon_{|t=0} = f^\varepsilon_0. \end{array}\right. \tag{1.4}$$

En considérant que la longueur de la période ε est de l'ordre de grandeur de la distance interatomique ($\sim 10^{-15}m$) et sachant que $\hbar \sim 10^{-27}$, il semble licite de considérer que $\hbar$ est très petit devant ε. Or comme l'explique P.A.Markowich, C.A.Ringhoffer & C.Schmeiser [34] lorsque $\hbar \to 0$, l'équation (1.4) converge vers (1.1). Pour plus de détails nous renvoyons le lecteur à P.A.Markowich, C.A.Ringhoffer & C.Schmeiser [34], P.Degond & P.A.Markowich [14], H.Steinrück [41] et aux récents travaux de P.L.Lions & T.Paul [33]. Nous renvoyons également à P.Gérard [22] où l'équation (1.1) est déduite par une analyse semi-classique de l'èquation de Schrödinger (c.f. aussi l'article de synthèse de C.Bardos, L.Dumas, P.Gérard & F.Golse [9]).
L'équation (1.1) est donc un modèle du problème qui nous intéresse.

Nous pourrions aller plus loin dans le cadre classique et considérer que le déplacement d'une particule dans un tel potentiel oscillant est régi par le système dynamique suivant

$$\ddot{X}(t) = -\frac{1}{\varepsilon}(\nabla_y u)\left(\frac{X}{\varepsilon}\right),\; X(0) = a,\; \dot{X}(0) = \Xi(0) = b. \tag{1.5}$$

Mais, comme nous le verrons plus loin, il est difficile de caractériser le système satisfait par les trajectoires limites lorsque ε tend vers 0.
Il est alors préférable d'aborder le problème du point de vue de la physique statistique et donc d'étudier l'équation (1.1).

Nous donnons maintenant une seconde interprétation du problème (1.1). Bien que nous négligions ici l'effet des collisions (absence d'opérateur de collision), il est intéressant de rattacher le "scalling" envisagé aux échelles liées aux grandeurs collisionnelles (libre parcours moyen, temps de relaxation, vitesse thermique, etc...). Les considérations abordées ci dessous, l'ont déjà été par F.Poupaud [37].
Considérons une équation de Boltzmann

$$\partial_t g + \xi \cdot \nabla_x g - \frac{q}{m} E \cdot \nabla_\xi g = Q(g)(\xi) = \int s(\xi^*, \xi) g(\xi^*) - s(\xi, \xi^*) g(\xi) \, d\xi^*, \qquad (1.6)$$

modélisant le comportement de particules collisionnelles de charge q et de masse m dans un champ électrique E. Nous renvoyons, par exemple à C.Cercignani [12] pour l'interprétation de l'opérateur de collisions Q. La maxwellienne d'équilibre engendrant le noyau de $Q(\cdot)$ est

$$M(\xi) = \left(2\pi v_{th}^2\right)^{-3/2} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2v_{th}}\right), \qquad (1.7)$$

où v_{th} désigne la vitesse thermique des particules. Le temps de relaxation τ est défini par

$$\frac{1}{\tau} = \int B(\xi, \xi^*) \, M(\xi) M(\xi^*) \, d\xi d\xi^*. \qquad (1.8)$$

où $B(\xi, \xi^*) = s(\xi^*, \xi)/M(\xi)$.
Nous allons maintenant effectuer un changement d'échelle dans l'équation (1.6) tenant compte des grandeurs introduites ci-dessus. Introduisons t_0, l_0, un temps et une longueur de référence et choisissons v_{th} comme vitesse de référence. Considérons alors les variables adimensionnées suivantes $z = x/l_0$ et $u = \xi/v_{th}$. Soit E_0 une valeur de référence du champ définie par $E/E_0 = A = (q/m)E$. La fonction adimensionnée $h(\cdot)$ définie par

$$h(s, z, u) = g(t_0 s, l_0 z, v_{th} u), \qquad (1.9)$$

vérifie

$$\frac{\tau}{t_0} \partial_s h + \frac{\tau v_{th}}{l_0} u \cdot \nabla_z h - \frac{\tau E}{E_0 v_{th}} \cdot \nabla_u h = \tau Q^a(h), \qquad (1.10)$$

où Q^a est le noyau de collisions adimensionné.
En remarquant que $\tau v_{th} = l_r$, l_r étant le libre parcours moyen, et en utilisant que l'énergie thermique U_{th} est définie par $U_{th} = (m/q)v_{th}$, (1.10) devient

$$\frac{\tau}{t_0} \partial_s h + \frac{l_r}{l_0} u \cdot \nabla_z h - \frac{\tau E_0}{U_{th}} A \cdot \nabla_u h = \tau Q^a(h). \qquad (1.11)$$

car $E/(E_0 v_{th}) = (E_0/U_{th})A$.

Supposons alors, pour simplifier, que $\tau = l_r = 1$ et introduisons deux petits paramètres

$$\delta = \frac{\tau}{t_0} = \frac{1}{t_0}, \quad \varepsilon = \frac{l_r}{l_0} = \frac{1}{l_0}, \tag{1.12}$$

En supposant que le champ électrique est un champ fort i.e. $E_0 = U_{th}$, l'équation (1.11) devient

$$\delta \partial_s h + \varepsilon u \nabla_z h - A\left(\frac{s}{\delta}, \frac{z}{\varepsilon}\right) \nabla_u h = Q^a(h). \tag{1.13}$$

Si les échelles de référence choisies impliquent $\delta = \varepsilon$, l'équation (1.13) devient

$$\partial_s h + u \nabla_z h - \frac{1}{\varepsilon} A\left(\frac{s}{\varepsilon}, \frac{z}{\varepsilon}\right) \nabla_u h = \frac{1}{\varepsilon} Q^a(h). \tag{1.14}$$

L'étude effectuée ici s'insère dans ce modèle en négligeant l'effet des collisions, en supposant que A est indépendante du temps et que $A(y) = \nabla_y u(y)$.
Pour une étude détaillée de l'équation (1.14) ne prenant pas en compte des champs oscillants, mais traitant le noyau de collisions, nous renvoyons à G.Frosali, C.V.M.Van der Mee & C.Paveri-Fontana [21] et à F.Poupaud [37].

1.3 Analyse d'un exemple

Afin d'exhiber certains phénomènes qui apparaissent dans l'asymptotique de notre problème, nous allons analyser le comportement d'une particule dans le cas unidimensionnel simple suivant

$$\begin{cases} u(y) \text{ est } [-1,1] - \text{périodique}, \\ u(y) = \dfrac{1}{2} y^2 \text{ sur } [-1,1]. \end{cases} \tag{1.15}$$

Ce potentiel et le champ de force microscopique qui lui est associé sont représentés sur la figure ci-dessous.

figure=dessins/pot.ps,width=0.43 figure=dessins/force.ps,width=0.43

FIGURE 1 – Potentiel $u(y)$ (1.15) et champ de force associé $\frac{1}{\varepsilon}(\nabla_y u)(\frac{x}{\varepsilon})$.

Dans le but d'appréhender les possibilités de transport avec un tel champ de force, nous introduisons les caractéristiques associées à l'équation (1.5). Celles-ci sont les courbes intégrales du système différentiel

$$\begin{cases} \dot{x} = \xi, \\ \dot{\xi} = -\dfrac{x}{\varepsilon^2}, \end{cases} \quad \text{sur } [-\varepsilon, \varepsilon] \times \mathbb{R}_\xi, \tag{1.16}$$

ou bien les courbes de niveau du hamiltonien (ou de l'énergie)

$$H^\varepsilon(x,\xi) = \frac{1}{2}\xi^2 + \frac{1}{2\varepsilon^2} x^2 \quad \text{sur } [-\varepsilon, \varepsilon] \times \mathbb{R}_\xi. \tag{1.17}$$

figure=dessins/zob.ps,height=60mm

FIGURE 2 – Portrait de phase associé au champ de force de la figure 1

Nous les dessinons ensuite sur tout l'espace des phases $\mathbb{R}^2_{x,\xi}$ par périodicité par rapport à la variable x. Le portrait de phase ainsi obtenu est représenté sur la figure 2.
Nous voyons que le niveau d'énergie $\frac{1}{2}$ est une valeur critique, et ce, indépendamment de ε. Une particule ayant un niveau d'énergie supérieur peut traverser $\mathbb{R}_x$ tout entier. Pour nous en convaincre, étudions le système (1.5) avec $a = 0$, pour simplifier et $b > 1$ (ou $b < -1$) pour que l'énergie de la particule considérée soit supérieure à $\frac{1}{2}$. La particule sous l'effet du champ de force est d'abord ralentie. En effet, tant que $x < \varepsilon$ le mouvement de la particule est décrit par

$$\ddot{X}(t) = -\frac{1}{\varepsilon^2}X(t),\ X(0) = 0,\ \dot{X}(0) = \Xi(0) = b, \tag{1.18}$$

dont la solution est $X^\varepsilon(t) = \varepsilon b \sin(\frac{t}{\varepsilon})$, $\dot{X}^\varepsilon(t) = b\cos(\frac{t}{\varepsilon})$. La vitesse décroit donc bien. Mais, au temps $t = \varepsilon \arcsin(\frac{1}{b})$ la particule passe dans la cellule suivante. Elle est alors soumise à la force attractive $-\frac{1}{\varepsilon^2}(X(t) - 2\varepsilon)$ et est réaccélérée, etc ... Cette particule se déplace donc avec une vitesse oscillant à haute fréquence. Ainsi, son mouvement asymptotique lorsque $\varepsilon \to 0$ est un déplacement à vitesse constante. Cette vitesse est la valeur moyenne de la vitesse oscillante et vaut $(\arcsin(\frac{1}{b}))^{-1} = (\arcsin(\frac{1}{\sqrt{2H}}))^{-1}$, où H désigne l'énergie de la particule.
Nous appelons une telle particule : particule emballée (ou "runaway particle"). Cette terminologie est motivée par le fait suivant. Imaginons que l'on ajoute à la force considérée un terme constant, sous son effet, la vitesse de la particule augmenterait alors de cellule en cellule. Nous renvoyons à la sous-section 3.1 où le cas de l'ajout d'un terme constant dans le champ de force est traité.

Dans le cas contraire, une particule qui n'a pas un niveau d'énergie suffisant oscille entre deux maxima du potentiel. En effet la solution du système (1.5) avec $a = 0$ (pour simplifier) $|b| < 1$ (pour que l'énergie soit inférieure à $\frac{1}{2}$) est donnée pour tout temps par la fonction

$$X^\varepsilon(t) = \varepsilon b \sin\left(\frac{t}{\varepsilon}\right),\ \dot{X}^\varepsilon(t) = b\cos\left(\frac{t}{\varepsilon}\right). \tag{1.19}$$

Nous constatons qu'une particule capturée oscille à haute fréquence. Ceci génère le comportement asymptotique suivant. En faisant tendre $\varepsilon \to 0$, nous obtenons que $X^\varepsilon(\cdot) \to 0$ dans L^∞ et que $\dot{X}^\varepsilon(\cdot) \rightharpoonup 0$ dans L^∞ faible$-*$, alors que l'énergie cinétique $\frac{1}{2}\left(\dot{X}^\varepsilon(t)\right)^2 = \frac{1}{2}b^2\cos^2(\frac{t}{\varepsilon})$ ne converge pas vers 0. En effet, $\frac{1}{2}\left(\dot{X}^\varepsilon(\cdot)\right)^2 \rightharpoonup \frac{b^2}{4}$ dans L^∞ faible$-*$. Donc lorsque ε devient de plus en plus petit le mouvement d'une particule capturée n'est plus visible, néanmoins il se manifeste à travers l'énergie.
Ainsi, nous voyons que le comportement asymptotique du mouvement d'une particule ne se décrit pas aisément.

Regardons alors si nous pouvons tirer des informations qualitatives à partir du portrait de phase. Lorsque $\varepsilon \to 0$, les caractéristiques elliptiques correspondant aux bas niveaux d'énergie dégénèrent en des segments de droite verticaux. Les caractéristiques correspondant aux niveaux d'énergie plus élevés dégénèrent en des droites horizontales coupant (pour certaines) les segments évoqués plus haut.
Ainsi, nous voyons que ces caractéristiques limites ne sont pas les trajectoires du mouvement moyen des particules. De plus, ces trajectoires limites étant sécantes, elles ne sont pas solutions d'un système hamiltonien.

Si nous regardons maintenant le comportement du hamiltonien, nous avons $H^\varepsilon(x,\xi) \rightharpoonup H(\xi) = \frac{1}{2}\xi^2 + cst$, hamiltonien d'un système qui a perdu toute information sur les oscillations :

$$\dot{X} = \Xi, \quad \dot{\Xi} = 0 \tag{1.20}$$

ne décrivant ni le mouvement limite des particules ni le comportement limite des caractéristiques.
Il semble donc que les comportements du mouvement des particules, des caractéristiques et du hamiltonien perdent leurs liens lors du passage à la limite. Ainsi, le comportement asymptotique de notre problème n'est pas trivial.

Il est intéressant de noter à ce niveau que le mouvement limite des particules se décrit mieux dans l'espace des phases (x, H) où H désigne l'énergie.
En effet, dans ces variables, et au vu de l'étude que nous avons effectuée, les trajectoires limites des particules sont solutions de

$$\dot{X} = \mathcal{X}(|H - \frac{1}{2}|)\left(\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2H}}\right)\right)^{-1}, \quad \dot{H} = 0 \tag{1.21}$$

où $\mathcal{X}$ désigne la fonction de Heaviside.
Ceci présage de l'importance du rôle joué par l'énergie (nous le verrons plus loin) dans l'étude du comportement asymptotique de l'équation (1.1).

1.4 Résumé de la méthode utilisée

Pour l'analyse mathématique de l'équation (1.1), nous renvoyons à R.Dautray & J.L.Lions [13], W.Greenberg, C.V.M.Van der Mee & V.Protopopescu [28] et au récent travail de R.Di Perna & P.L.Lions [15].
A ε fixé, la solution de l'équation (1.1) est explicite dès que les solutions $(X(s,x,\xi,t)$, $\Xi(s,x,\xi,t))$ du système hamiltonien

$$\begin{cases} \dot{X}^\varepsilon = \Xi^\varepsilon, \;\; \dot{\Xi}^\varepsilon = -\dfrac{1}{\varepsilon}\nabla_y u\left(\dfrac{X}{\varepsilon}\right), \\ X^\varepsilon_{|t=s} = x, \;\; \Xi^\varepsilon_{|t=s} = \xi, \end{cases} \tag{1.22}$$

sont connues. En effet, f^ε est donnée par

$$f^\varepsilon(t,x,\xi) = f_0^\varepsilon\left(X^\varepsilon(t,x,\xi,0), \Xi^\varepsilon(t,x,\xi,0)\right). \tag{1.23}$$

Dans l'exemple ci-dessus, où les caractéristiques sont connues, nous voyons que leur comportement asymptotique ne peut être décrit aisément. Le comportement de f^ε lorsque $\varepsilon \to 0$, et donc la déduction de l'équation effective n'est pas triviale. Nous devons donc utiliser des méthodes d'homogénéisation plus élaborées.

Pour une description détaillée des méthodes classiques d'homogénéisation nous renvoyons le lecteur à J.L.Lions [32], E.Sanchez-Palencia [39], L.Tartar [42, 43, 44, 45], F.Murat [38], et à A.Bensoussan, J.L.Lions & G.Papanicolaou [11].

De nombreux auteurs ont prouvé la stabilité des équations cinétiques par rapport à la convergence faible en utilisant les résultats de compacité en moyenne. (voir C.Bardos, F.Golse, B.Perthame & R.Sentis [10], F.Golse, P.L.Lions, B.Perthame & R.Sentis [25], R.Di Perna & J.L.Lions [16], R.Di Perna, J.L.Lions & Y.Meyer [17], F.Golse [23, 24], et dans un cadre proche du notre R.Alexandre & K.Hamdache [2]).
Nous remarquons que dans le problème étudié ici, le champ $\frac{1}{\varepsilon}\nabla_y u(\frac{x}{\varepsilon})$ n'est pas borné, les résultats de compacité en moyenne ne s'appliquent donc pas. Il apparait alors des phénomènes de mémoire dus à la persistance de l'interaction des oscillations de $u(\frac{x}{\varepsilon})$ avec celles de f^ε.

La méthode que nous suivons ici, utilise le résultat de G.N'Guetseng suivant, concernant la convergence du produit scalaire de f^ε avec une fonction test oscillante.
Des estimations à priori sur la suite f^ε, nous déduisons l'existence du profil $F(t,x,y,\xi) \in L^\infty(0,T,L^2(\mathcal{O};L^2_p(Y)))$, tel que, à une sous suite extraite près,

$$\int_{\mathcal{Q}} f^\varepsilon(t,x,\xi)\,\varphi(t,x,\frac{x}{\varepsilon},\xi)\,d\mathcal{Q} \to \frac{1}{|Y|}\int_{\mathcal{Q}\times Y} F(t,x,y,\xi)\,\varphi(t,x,y,\xi)\,d\mathcal{Q}dy \tag{1.24}$$

pour toute fonction $\varphi(t,x,y,\xi) \in C^0_0([0,T)\times\mathcal{O};C^0_p(Y))$. De plus, la limite faible f de f^ε et le profil F sont liés par

$$f(t,x,\xi) = \langle F(t,x,\cdot,\xi)\rangle\,. \tag{1.25}$$

Pour plus de détails, nous renvoyons le lecteur à G.N'Guetseng [35, 36], G.Allaire [3] et W.E [19]. Nous renvoyons également à J.L.Joly & J.Rauch [30] et à J.L.Joly, G.Metivier & J.Rauch [31] qui ont introduit et utilisé la notion de profil pour l'analyse des oscillations d'équations hyperboliques non linéaires.

En utilisant la formulation faible de (1.1) avec des fonctions test oscillantes $\psi^\varepsilon \equiv \psi(t,x,\frac{x}{\varepsilon},\xi)$, $\psi(t,x,y,\xi) \in C^1_0([0,T)\times\mathcal{O};C^1_p(Y))$,

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{Q}} f^\varepsilon\left(\partial_t\psi^\varepsilon + \xi\cdot\nabla_x\psi^\varepsilon\right)d\mathcal{Q}\\ +\frac{1}{\varepsilon}\int_{\mathcal{Q}} f^\varepsilon\left(\xi\cdot\nabla_y\psi^\varepsilon - \nabla_y u(\frac{x}{\varepsilon})\cdot\nabla_\xi\psi^\varepsilon\right)d\mathcal{Q} = -\int_{\mathcal{O}} f^\varepsilon_0\psi^\varepsilon(0)\,d\mathcal{O}.\end{aligned} \tag{1.26}$$

et en utilisant le résultat exposé ci-dessus, nous obtenons le système satisfait par le profil. Puis, grâce à la relation (1.25), nous déduisons l'équation homogénéisée en intégrant l'équation du profil par rapport à y. Cette étape s'effectue en s'inspirant d'une méthode d'homogénéisation non locale exposée dans Y.Amirat, K.Hamdache & A.Ziani [4, 5] et dans L.Tartar [43].

Dans la section 2, nous réalisons l'homogénéisation de l'équation (1.1) dans le cas de la dimension 1. Nous montrons que le comportement homogénéisé de l'équation (1.1) est une équation cinétique à mémoire.

Dans la section 3, nous étudions quelques perturbations du cas précédemment étudié, à savoir l'ajout d'un terme de force constant, et le cas où le champ de force est la somme d'un champ dérivant d'un potentiel périodique généralisé $u(x, \frac{x}{\varepsilon})$ et d'un champ oscillant. Pour ces exemples, nous pouvons déduire l'équation du profil en utilisant une méthode analogue à la précédente.

Ensuite, le cas bidimensionnel d'un potentiel radial $u(\frac{|x|}{\varepsilon})$ est étudié dans la section 4. Nous pouvons dans ce cas, comme nous le faisons dans la section 3, déduire l'équation satisfaite par le profil.

Puis la section 5 présente brièvement les difficultés de l'homogénéisation en dimension quelconque.

Dans la section 6, nous présentons un résultat d'homogénéisation en dimension n lorsque le potentiel ne dépend que de la première coordonnée.

Nous étudions un cas où le sytème (1.22) est intégrable au sein de la section 7.

Enfin la section 8 est vouée à l'étude du cas général.

Dans la section 9 nous effectuons l'étape d'homogénéisation non locale commune aux sections 7 et 8.

2 Homogénéisation en dimension un

Dans toute cette section nous identifions Y à $[-1, 1]$.

2.1 Introduction, résultat principal

Dans cette section, nous étudions le cas de la dimension 1, i.e $n = 1$. L'équation (1.1) devient alors

$$\begin{cases} \partial_t f^\varepsilon + \xi \cdot \partial_x f^\varepsilon - \dfrac{1}{\varepsilon} u' \left(\dfrac{x}{\varepsilon} \right) \cdot \partial_\xi f^\varepsilon = 0, \\ f_{|t=0} = f_0^\varepsilon. \end{cases} \tag{2.1}$$

Comme nous l'avons dit en introduction, l'homogénéisation de cette équation se déroule en deux étapes. La première s'effectue sous les seules hypothèses suivantes. f_0^ε vérifie

$$\begin{cases} f_0^\varepsilon(x, \xi) = f_0(x, \frac{x}{\varepsilon}, \xi), \\ f_0 \in L^2(\mathcal{O}; C_p(Y)), \ f_0 \geq 0. \end{cases} \tag{2.2}$$

Le potentiel u est $C_p^0(Y) \cap C^2([-1, 1])$ et vérifie, dans le but d'obtenir les résultats les plus explicites possibles,

$$0 \leq u(y) \leq u_m, \ u(0) = 0, \ u(\pm 1) = u_m, \tag{2.3}$$

0 étant le seul extrémum dans $]-1, 1[$, (i.e. $u'(y) \neq 0 \ \forall y \neq 0, -1$ ou 1). Typiquement, $u(\cdot)$ est de la forme représentée ci-dessous.

figure=dessins/potgen.ps,height=55mm

Figure 3 – Allure des potentiels considérés

Puis, pour la seconde étape, où nous utilisons une méthode d'homogénéisation non locale, nous ajoutons l'hypothèse suivante

$$f_0(x, y, \xi) = f_1(x) a(y, \xi), \text{ où } f_1 \in L^2(\mathbb{R}), \ f_1 \geq 0, \ a \in (L^\infty \cap L^2)(\mathbb{R}; C_p(Y)), \ a \geq 0. \tag{2.4}$$

Nous énonçons maintenant notre résultat principal,

Théorème 2.1 *Sous les hypothèses (2.2),(2.3) et (2.4), il existe une fonction $D(\xi)$ et une famille de mesures paramétrées positives ν_ξ, ayant leur support dans un intervalle borné $\Lambda_\xi \subset \mathbb{R}$, telles que $f^\varepsilon \rightharpoonup f$, unique solution de*

$$\begin{cases} \partial_t f + D(\xi) \partial_x f - \displaystyle\int_0^t ds \int d\nu_\xi(\lambda) \, \partial_x^2 f(s, x + \lambda(t - s), \xi), \\ f_{t=0} = f_1 \left\langle a^\#(\cdot, \xi) \right\rangle. \end{cases} \tag{2.5}$$

Les définitions de D, Λ_ξ et $a^\#$ sont données par (2.65), (2.62) et (2.59) respectivement.

Nous commençons la démonstration de ce résultat en utilisant, dans la formulation faible de (2.1), des fonctions test oscillantes qui permettent, en appliquant le résultat de N'Guetseng présenté en introduction, de déduire l'existence du profil F associé à f^ε ainsi que l'équation de contrainte qu'il vérifie.

$$\xi\partial_y F - u'(y)\partial_\xi F = 0. \tag{2.6}$$

Nous nommons $\mathbb{K}$ l'ensemble des fonctions de $L^2_p(Y \times \mathbb{R})$, vérifiant (2.6) dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$. Puis, connaissant toutes les intégrales premières du système hamiltonien

$$\dot{Y} = \Xi, \quad \dot{\Xi} = u'(Y), \tag{2.7}$$

et grâce à l'hypothèse (2.3), nous caractérisons le sous espace $\mathbb{K}$. Nous construisons ensuite des fonctions test particulières qui, utilisées dans la formulation faible de (2.1), donne l'équation bien posée satifaite par le profil. L'equation homogénéisée s'obtient enfin en moyennant l'équation du profil par rapport à la variable y. Cette moyenne s'effectue en utilisant une méthode d'homogénéisation non locale inspirée de Y.Amirat, K.Hamdache & A.Ziani [4].

Remarque 2.2 Nous verrons apparaitre une différence entre deux cas. Le premier de ces cas est $u'(-1) = 0$ ou $u'(1) = 0$, et le second est $u'(-1) \neq 0$ et $u'(1) \neq 0$. Dans le premier cas, il existe une énergie pour laquelle la courbe intégrale du système (2.7) ne parcourt pas la totalité de la caractéristique en un temps fini. En revanche, dans le second cas, ceci ne se produit pas.
Pour l'homogénéisation de l'équation (2.1) cette différence se fait peu sentir. En revanche, lorsque le champ de force est perturbé (c.f. section 3), nous ne pouvons déduire le comportement homogénéisé que dans le second cas. ■

Nous nous intéressons ensuite au comportement effectif de la densité de masse lorsque la donnée initiale est à support compact. Nous montrons qu'elle vérifie une équation de transport avec un terme de mémoire. Ce résultat illustre la perte de régularité en moyenne de f^ε.

2.2 Preuve du théorème 2.1, $1^{ère}$ étape : équations du profil

Nous donnons en premier lieu une estimation sur f^ε. Nous avons le

Lemme 2.3 *La suite f^ε vérifie*

$$||f^\varepsilon||_{L^\infty(0,T;L^2(\mathcal{O}))} < C, \tag{2.8}$$

Cette estimation est classique et sa démonstration peut être trouvée dans [28]. Nous la résumons ici. Nous multiplions l'équation (2.1) par f^ε. Nous l'intégrons ensuite par rapport à x et ξ, les deux derniers termes disparaissent, et nous obtenons

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{O}} (f^\varepsilon)^2 \, d\mathcal{O} = 0, \tag{2.9}$$

i.e.

$$||f^\varepsilon(t,\cdot,\cdot)||_{L^2(\mathcal{O})} = ||f_0^\varepsilon(t,\cdot,\cdot)||_{L^2(\mathcal{O})} \le C||f_0(\cdot,\cdot,\cdot)||_{L^2(\mathcal{O};L^2_p(Y))}, \tag{2.10}$$

prouvant l'estimation (2.8). ■

Du lemme 2.3, nous déduisons que, à une sous-suite extraite près, $f^\varepsilon \rightharpoonup f$ et qu'il existe un profil F tel que le résultat de N'Guetseng s'applique.
Nous cherchons alors, l'équation de contrainte vérifiée par ce profil. Dans ce but, nous utilisons dans la formulation faible de (2.1) des fonctions test oscillantes définies par

$$\varphi^\varepsilon(t,x,\xi) = \varepsilon\psi(t,x,\frac{x}{\varepsilon},\xi). \tag{2.11}$$

pour toute $\psi(t,x,y,\xi) \in C_0^1([0,T)\times\mathcal{O};C_p^1(Y))$.
Nous obtenons ainsi

$$\begin{aligned} &\varepsilon\int_{\mathcal{Q}} f^\varepsilon\left(\partial_t\psi^\varepsilon + \xi\cdot\partial_x\psi^\varepsilon\right)d\mathcal{Q} \\ &+\int_{\mathcal{Q}} f^\varepsilon\left(\xi\cdot\partial_y\psi^\varepsilon - u'(\frac{x}{\varepsilon})\cdot\partial_\xi\psi^\varepsilon\right)d\mathcal{Q} = -\varepsilon\int_{\mathcal{O}} f_0^\varepsilon\psi^\varepsilon(0)\,d\mathcal{O}, \end{aligned} \tag{2.12}$$

où $\psi^\varepsilon = \psi(t,x,\frac{x}{\varepsilon},\xi)$. Nous faisons tendre $\varepsilon \to 0$ dans (2.12). Sachant que $u(\cdot) \in C_p^0(Y)\cap C^2([-1,1])$, la fonction $u'(y)\partial_\xi\psi(t,x,y,\xi)$ est une fonction test admissible au sens de Allaire [3]. En utilisant alors le résultat de N'Guetseng, nous déduisons que le profil F vérifie

$$\int_{\mathcal{Q}\times Y} F\left(\xi\partial_y\psi - u'(y)\partial_\xi\psi\right)d\mathcal{Q}dy = 0 \tag{2.13}$$

$\forall\psi \in C_0^1([0,T)\times\mathcal{O};C_p^1(Y))$, d'où nous déduisons l'équation de contrainte

$$\xi\partial_y F - u'(y)\partial_\xi F = 0 \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}\times Y). \tag{2.14}$$

pour presque tout $t \in [0,T)$ et $x \in \mathbb{R}$. Nous définissons le sous-espace $\mathbb{K}$, associé à l'équation de contrainte, par

$$\mathbb{K} = \{v \in L^2(\mathbb{R};L_p^2(Y)),\ \xi\partial_y v - u'(y)\partial_\xi v = 0,\ \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}\times\mathbb{R})\} \tag{2.15}$$

L'hypothèse (2.3) sur u permet d'identifier $\mathbb{K}$ explicitement. C'est l'objet du lemme suivant.

Lemme 2.4 *Soit la fonction $\sigma(E)$ définie par*

$$\begin{cases} \sigma(y,E) = \left(E^2 - 2u(y)\right)^{-1/2} \text{ pour } E^2 > 2u(y),\ 0 \text{ ailleurs,} \\ \sigma(E) = \langle\sigma(\cdot,E)\rangle\,. \end{cases} \tag{2.16}$$

Sous les hypothèses (2.3), une fonction $G(y,\xi) \in \mathbb{K}$ si et seulement si il existe une fonction $h(E)$, vérifiant $\sqrt{|E|\sigma(E)}h(E) \in L^2(\mathbb{R})$ et $h(E) = h(-E)$ pour $E^2 \le 2u_m$, telle que

$$G(y,\xi) = h\left(\frac{\xi}{|\xi|}\sqrt{|\xi|^2 + 2u(y)}\right). \tag{2.17}$$

Avant de démontrer ce lemme, nous donnons quelques résultats concernant les fonctions $\sigma(y,E)$ et $\sigma(E)$.
En premier lieu, nous avons la

Propriété 2.5 *La fonction* $|E|\sigma(y,E) \in L^1_{loc}(Y \times I\!R)$.

En effet, considérons un compact K de $Y \times I\!R$. Il existe alors une constante $M > \sqrt{2u_m}$ telle que $K \subset Y \times [-M,M]$ et donc, en appellant $\mathcal{X}$ la fonction de Heaviside,

$$\begin{aligned}
&\int_K |E|\sigma(y,E)dydE \\
&\quad = \int_K |E|\mathcal{X}(E^2-2u(y))\left(E^2-2u(y)\right)^{-1/2} dydE \\
&\quad \leq \int_{Y\times[-M,M]} |E|\mathcal{X}(E^2-2u(y))\left(E^2-2u(y)\right)^{-1/2} dydE \\
&\qquad = 2\int_{Y\times[0,M]} |E|\mathcal{X}(E^2-2u(y))\left(E^2-2u(y)\right)^{-1/2} dydE \\
&\qquad\qquad = \int_Y \left(M^2-2u(y)\right)^{1/2} dy
\end{aligned} \tag{2.18}$$

qui est une quantité finie. ∎

Ensuite nous donnons à $\sigma(E)$ une forme plus utilisable. Nous définissons $y_\pm(E)$ comme les deux solutions de $u(y) = E^2/2$, avec $-1 \leq y_-(E) \leq 0 \leq y_+(E) \leq 1$, si elles existent, et $y_\pm(E) = \pm 1$ sinon (c.f. Figure 3). Ainsi, $\sigma(y,E) \neq 0$ ssi $y_-(E) \leq y \leq y_+(E)$ et $\sigma(E)$ s'exprime comme

$$\sigma(E) = \frac{1}{2}\int_{y_-(E)}^{y_+(E)} (E^2-2u(y))^{-1/2}dy. \tag{2.19}$$

Cette nouvelle forme permet entre autres de prouver la

Propriété 2.6 *La fonction* $\sigma(E)$ *est paire, et vérifie*

$$\sigma(E) > 0, \quad \forall E, \tag{2.20}$$

$$\left\{\begin{array}{l} si\ u'(-1)=0\ ou\ u'(1)=0,\ \sigma(E)<\infty, \quad \forall E,\ t.q.\ E^2 \neq 2u_m\ et\ E \neq 0, \\ si\ u'(-1)\neq 0\ et\ u'(1)\neq 0,\ \sigma(E)<\infty, \quad \forall E,\ t.q.\ E^2 \neq 0, \end{array}\right. \tag{2.21}$$

et

$$|E|\sigma(E) \in L^1_{loc}(I\!R). \tag{2.22}$$

En effet, la première de ces propriétés est trivialement réalisée pour $E \neq 0$. Nous la montrons pour $E = 0$. Pour cela, nous utilisons un développement limité de $u(y)$ en 0 :

$$u(y) = u''(0)y^2 + o(y^2), \tag{2.23}$$

duquel nous déduisons un développement limité de $y_\pm(E)$

$$y_\pm(E) = \frac{\pm|E|}{\sqrt{2u''(0)}} + o(E) \tag{2.24}$$

En utilisant ces deux développements, nous calculons $\sigma(E)$ pour E proche de 0.

$$\begin{aligned}
\sigma(E) &= \frac{1}{2}\int_{y_-(E)}^{y_+(E)} \left(E^2 - 2u''(0)y^2\right)^{-1/2} + o(E) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2u''(0)}}\left[\arcsin\left(\frac{\sqrt{2u''(0)}y}{E}\right)\right]_{-|E|/\sqrt{2u''(0)}}^{|E|/\sqrt{2u''(0)}} + o(E) \\
&= \frac{\pi}{2\sqrt{2u''(0)}} + o(E),
\end{aligned} \tag{2.25}$$

et donc

$$\sigma(0) = \frac{\pi}{2\sqrt{2u''(0)}}, \tag{2.26}$$

achevant la preuve de (2.20).

Pour prouver (2.21), nous remarquons que si d'une part $E^2 > 2u_m$, l'intégrande de (2.19) est finie, et donc $\sigma(E) < \infty$.
D'autre part, dans le cas où $u'(-1) = 0$ ou $u'(1) = 0$, si $|E| < \sqrt{2u_m}$, nous avons $y_+(E) < 1$ et $y_-(E) > -1$. Ainsi, le seul point où $u'(y)$ s'annule est 0.
Choisissons alors un réel δ tel que ni $A^\delta = [y_-(E), y_-(E)+\delta]$ ni $B^\delta = [y_+(E)-\delta, y_+(E)]$ ne contienne 0 et décomposons l'intégrale (2.19) en trois :

$$\begin{aligned}
\sigma(E) = \frac{1}{2}\int_{y_-(E)+\delta}^{y_+(E)-\delta}(E^2 - 2u(y))^{-1/2}dy + \frac{1}{2}\int_{A^\delta}(E^2 - 2u(y))^{-1/2}dy \\
+\frac{1}{2}\int_{B^\delta}(E^2 - 2u(y))^{-1/2}dy.
\end{aligned} \tag{2.27}$$

La première intégrale de (2.27) est finie. Montrons que les deux autres le sont également.
Sachant que $u'(y)$ ne s'annule ni sur A^δ ni sur B^δ nous écrivons

$$\begin{aligned}
\int_{A^\delta}(E^2 - 2u(y))^{-1/2}dy &= \int_{A^\delta} u'(y)(E^2 - 2u(y))^{-1/2}\frac{1}{u'(y)}dy \\
&\leq \frac{1}{\inf\limits_{A^\delta} u'(y)}\int_{A^\delta} u'(y)(E^2 - 2u(y))^{-1/2} \\
&\leq \frac{1}{\inf\limits_{A^\delta} u'(y)}\left[(E^2 - 2u(y))^{1/2}\right]_{y_-(E)}^{y_-(E)+\delta} \quad \text{et} \\
\int_{B^\delta}(E^2 - 2u(y))^{-1/2}dy &\leq \frac{1}{\inf\limits_{B^\delta} u'(y)}\left[(E^2 - 2u(y))^{1/2}\right]_{y_-(E)-\delta}^{y_-(E)}
\end{aligned} \tag{2.28}$$

qui sont bien des quantités finies. Nous concluons donc que $\sigma(E)$ est finie $\forall E$, tel que $E^2 \neq 2u_m$ et $E \neq 0$.
Dans le cas où $u'(-1) \neq 0$ et $u'(1) \neq 0$, nous effectuons la même démonstration que précédemment en remarquant qu'elle reste alors valable si $y_-(E) = -1$ et $y_+(E) = 1$ i.e. si $|E| \geq \sqrt{2u_m}$. Dans ce cas nous obtenons que $\sigma(E)$ est finie $\forall E$, tel que $E \neq 0$.

Ainsi, (2.21) est démontrée.
Enfin (2.22) est une conséquence directe de la propriété 2.5.
La propriété 2.6 est donc prouvée. ■

Une conséquence de la propriété 2.6 est la

Propriété 2.7 *La fonction* $(\sigma(E))^{-1}$ *est continue sur* $I\!R$, *et continument dérivable sur* $I\!R \setminus \{\pm\sqrt{2u_m}\}$.
De plus, dans le cas où $u'(-1) = 0$ *ou* $u'(1) = 0$, *la fonction* $(\sigma(E))^{-1}$ *s'annule en* $\pm\sqrt{2u_m}$.

Remarque 2.8 Il est intéressant de noter que $\sigma(E)$ est proportionnel au temps de parcours, du point $y_-(E)$ au point $y_+(E)$, de la solution du système hamiltonien (2.7). ■

Nous passons maintenant à la preuve du lemme.

Démonstration du lemme 2.4 - Celle-ci se déroule en trois parties. En premier lieu, nous montrons que si $G \in I\!K$ il existe une fonction $h(\cdot)$ telle que (2.17) soit vérifiée. Ensuite, nous montrons qu'une fonction $G(\cdot,\cdot)$ associée à une fonction $h(\cdot)$ via (2.17) vérifie l'équation de contrainte (2.14) ssi $h(E) = h(-E)$ pour $E^2 \leq 2u_m$. La troisième étape consiste à déterminer l'espace auquel doit appartenir $h(\cdot)$.

Etape préliminaire - Avant tout, considérons le changement de variables $(y,\xi) \to (y,E)$, qui est un C^1-difféomorphisme de $(Y \times (\mathbb{R}_\xi \setminus \{0\}))$ vers $\{(y,E),\ E^2 - 2u(y) > 0\}$, défini par

$$E = \mathcal{E}(y,\xi) := \frac{\xi}{|\xi|}\sqrt{\xi^2 + 2u(y)}. \tag{2.29}$$

L'application inverse $(y,E) \to (y,\xi)$ est définie pour $E^2 > 2u(y)$, par

$$\xi = d(y,E) := \frac{E}{|E|}\sqrt{E^2 - 2u(y)}. \tag{2.30}$$

De façon simple, nous voyons

$$\begin{aligned} dyd\xi &= |E|\mathcal{X}(E^2 - 2u(y))\left(E^2 - 2u(y)\right)^{-1/2}\, dydE, \\ &= |E|\sigma(y,E)\, dydE. \end{aligned} \tag{2.31}$$

D'après la propriété 2.5, $|E|\sigma(y,E)$ définit bien une densité de mesure Borélienne, et (2.31) a bien un sens.

Etape 1 - Abordons maintenant le corps de la démonstration où nous utilisons le changement de variables introduit ci-dessus.

Une fonction $G(\cdot,\cdot) \in \mathbb{K}$ ssi $\forall\psi \in C_0^1(\mathbb{R}; C_p^1(Y))$

$$\int_{Y\times\mathbb{R}_\xi} G(y,\xi)\,(\xi\partial_y\psi - u'(y)\partial_\xi\psi)\,dyd\xi = 0. \tag{2.32}$$

Construisons alors des fonctions test ψ comme suit. Pour toute fonction $\varphi(y,E)$ continuement dérivable, $Y-$périodique en y et à support compact dans $\{(y,E), E^2-2u(y) > 0)\}$ pour tout y fixé nous définissons

$$\psi(y,\xi) = \varphi\left(y, \frac{\xi}{|\xi|}\sqrt{\xi^2+2u(y)}\right). \tag{2.33}$$

Cette fonction est alors continuement dérivable, à support compact dans $Y\times(\mathbb{R}\setminus\{0\})$ et vérifie $(\xi\partial_y\psi - u'(y)\partial_\xi\psi) = \partial_y\varphi$.
Ainsi, en utilisant les fonctions test définies par (2.33) dans (2.32) et en effectuant le changement de variables (2.29), nous obtenons

$$\int_{Y\times\mathbb{R}_E} G\left(y, \frac{E}{|E|}\sqrt{E^2-2u(y)}\right) d(y,E)\,\partial_y\varphi\,\sigma(y,E)|E|dydE = 0. \tag{2.34}$$

D'après les définitions de $d(y,E)$ (c.f.(2.30)) et de $\sigma(y,E)$ (c.f.(2.16)), nous avons $d(y,E)\sigma(y,E) = E/|E|$ et donc (2.34) devient

$$\int_{Y\times\mathbb{R}_E} G\left(y, \frac{E}{|E|}\sqrt{E^2-2u(y)}\right) \mathcal{X}(E^2-2u(y))\,\partial_y\varphi\,EdydE = 0. \tag{2.35}$$

Définissons alors sur l'ensemble $\{(y,E), E^2-2u(y) \geq 0\}$ la fonction $h(y,E)$ par $h(y,E) = G\left(y, \frac{E}{|E|}\sqrt{E^2-2u(y)}\right)$. Ainsi (2.35) s'écrit

$$\int_{Y\times\mathbb{R}_E} h(y,E)\,\mathcal{X}(E^2-2u(y))\,\partial_y\varphi\,EdydE = 0, \tag{2.36}$$

ce qui implique que $h(y,E)$ ne dépend pas de y sur l'ensemble $\{(y,E), E^2-2u(y) > 0)\}$.
Donc nous concluons que

$$G(y,\xi) = h\left(\frac{\xi}{|\xi|}\sqrt{\xi^2+2u(y)}\right) \text{ p.p. dans } Y\times\mathbb{R}. \tag{2.37}$$

Etape 2 - Nous prouvons maintenant qu'une fonction $G(y,\xi)$ définie par (2.17) vérifie l'équation de contrainte (2.14) ssi $h(E) = h(-E)$ lorsque $E^2 \leq 2u_m$.
La fonction $G(y,\xi)$ ainsi définie vérifie (2.14) ssi $\forall\psi \in C_0^1(\mathbb{R}; C_p^1(Y))$,

$$\int_{Y\times\mathbb{R}_\xi} h\left(\frac{\xi}{|\xi|}\sqrt{\xi^2+2u(y)}\right)(\xi\partial_y\psi - u'(y)\partial_\xi\psi)\,dyd\xi = 0. \tag{2.38}$$

Or, en effectuant le changement de variables (2.29), (2.38) donne

$$\int_{Y\times \mathbb{R}_E} h(E)\,\partial_y\varphi\,\mathcal{X}(E^2-2u(y))\,EdydE=0, \tag{2.39}$$

où, par définition, $\varphi(y,E)=\psi\left(y,\frac{E}{|E|}\sqrt{E^2-2u(y)}\right)$. Cette dernière devient, en utilisant la définition de $y_\pm(E)$

$$\int_{\mathbb{R}_E} h(E)\left(\int_{y_-(E)}^{y_+(E)}\partial_y\varphi dy\right)EdE=0. \tag{2.40}$$

Lorsque $E^2>2u_m$, nous avons $y_\pm(E)=\pm 1$, et donc $\int_{y_-(E)}^{y_+(E)}\partial_y\varphi dy=0$. L'intégration par rapport à E dans (2.40) se réduit donc à une intégration sur $\{E,E^2\le 2u_m\}$.
Or, sur cet ensemble, $\int_{y_-(E)}^{y_+(E)}\partial_y\varphi dy=\varphi(y_+(E),E)-\varphi(y_-(E),E)$. Donc, en remarquant que $\varphi(y_\pm(E),E)=\psi(y_\pm(E),\frac{E}{|E|}\sqrt{E^2-2u(y_\pm(E))})=\psi(y_\pm(E),0)$, (2.40) devient

$$\int_{E^2\le 2u_m} h(E)\left(\psi(y_+(E),0)-\psi(y_-(E),0)\right)EdE=0. \tag{2.41}$$

En partitionnant ensuite le domaine d'intégration en $\{E,\,E^2\le 2u_m,\,E\ge 0\}$ et $\{E,\,E^2\le 2u_m,\,E<0\}$ et en changeant E en $-E$ sur ce dernier nous obtenons, $\forall\psi\in C_0^1(\mathbb{R};C_p^1(Y))$,

$$\begin{aligned}-\int_{0\le E\le\sqrt{2u_m}} & h(-E)\left(\psi(y_+(-E),0)-\psi(y_-(-E),0)\right)EdE\\ &+\int_{0\le E\le\sqrt{2u_m}} h(E)\left(\psi(y_+(E),0)-\psi(y_-(E),0)\right)EdE=0.\end{aligned} \tag{2.42}$$

Par densité (2.42) est vérifiée pour toute fonction $\psi\in C_0^0(\mathbb{R};C_p^0(Y))$.
Les deux remarques suivantes vont nous permettre de tirer de (2.42) l'information $h(E)=h(-E)$ pour $E^2\le 2u_m$. Premièrement, nous avons $y_\pm(E)=y_\pm(-E)$. Deuxièmement, pour toute fonction $\varphi(E)\in C_0^0(\mathbb{R})$, il existe une fonction $\psi(E)\in C_0^0(\mathbb{R})$ telle que $\varphi(E)=\psi(y_+(E))-\psi(y_-(E))$. En effet, les hypothèses effectuées sur u (c.f. figure 3) permettent de définir ψ par $\psi(y_-(E))=-\varphi(E)/2$, $\psi(y_+(E))=\varphi(E)/2$, qui vérifie bien la relation demandée.
Donc de (2.42) nous déduisons que $\forall\varphi\in C_0^0(\mathbb{R})$,

$$-\int_{0\le E\le\sqrt{2u_m}} h(-E)E\left(\varphi(E)\right)dE+\int_{0\le E\le\sqrt{2u_m}} h(E)E\left(\varphi(E)\right)dE=0, \tag{2.43}$$

ce qui implique que $h(E)=h(-E)$ pour $E^2\le 2u_m$.

Etape 3 - Nous cherchons maintenant à quel espace appartient la fonction h compte tenu de la régularité de G. Par un calcul simple, nous obtenons

$$\begin{aligned}&\int_{Y\times\mathbb{R}_\xi} |G(y,\xi)|^2\, dy d\xi \\ &\quad = \int_{\mathbb{R}_E} |h(E)|^2 |E| \int_Y \mathcal{X}(E^2-2u(y)) \left(E^2-2u(y)\right)^{-\frac{1}{2}} dy dE,\end{aligned} \tag{2.44}$$

ce qui amène à conclure que $G(y,\xi)\in L^2(\mathbb{R}_\xi; L^2_p(Y))$ si et seulement si $\sqrt{|E|\sigma(E)}h(E)\in L^2(\mathbb{R}_E)$.
Ceci achève la preuve du lemme. ■

Remarque 2.9 Au sein de de cette remarque nous expliquons la validité du lemme 2.4 en utilisant des considérations sur la géométrie des caractéristiques. Cela permet de bien comprendre pourquoi (2.17) a lieu et ce que représente la variable E.
Une fonction $G\in\mathbb{K}$ si et seulement si elle est intégrale première du système hamiltonien

$$\dot{Y}(t)=\Xi(t),\ \ \dot{\Xi}(t)=u'(Y(t)),\ \ Y(0)=y,\ \ \Xi(0)=\xi. \tag{2.45}$$

En d'autres termes, elle est dans $\mathbb{K}$ si et seulement si elle est constante le long des caractéristiques $(Y(t,y,\xi),\Xi(t,y,\xi))$ solutions de (2.45).
Considérons le hamiltonien associé au problème (2.45) $H(y,\xi)=\xi^2+2u(y)$. Dans le plan de phase (y,ξ), les caractéristiques sont solutions de $H(y,\xi)=E^2,\ E\in\mathbb{R}$. Les hypothèses faites sur $u(\cdot)$ nous permettent d'affirmer que si $E^2\leq 2u_m$, une seule caractéristique est alors associée au niveau d'énergie E^2. Celle-ci est une courbe fermée, symétrique par rapport à l'axe des y. Si, en revanche, $E^2>2u_m$, deux caractéristiques sont alors associées à E^2. Elles sont symétriques l'une de l'autre par rapport à l'axe des y. La figure 4 représente le portrait de phase associé au potentiel de la figure 3.

figure=dessins/cargen.ps,height=65mm

FIGURE 4 – Portrait de phase associé au potentiel de la figure 3.

Ces considérations sont à relier à l'exemple étudié en introduction (sous-section 1.3) : $\frac{1}{2}E^2$ représente l'énergie mécanique des particules. $\frac{1}{2}E^2=u_m$ est l'énergie critique sous laquelle une particule est immobilisée et au-dessus de laquelle elle peut se déplacer.

En utilisant les propriétés géométriques établies ci-dessus, nous pouvons donner la dépendance de G par rapport à y et ξ. Premièrement, les caractéristiques étant les courbes de niveau du hamiltonien, $G(y,\xi)$ s'exprime en fonction de $H(y,\xi)$. Les deux caractéristiques correspondant à un niveau d'énergie E^2 élevé ($E^2>2u_m$) peuvent être distinguées en introduisant la fonction signe $\xi/|\xi|$. Ainsi, il existe une fonction $h(E)$ telle que $G(y,\xi)=h(\frac{\xi}{|\xi|}\sqrt{\xi^2+2u(y)})$.
Deuxièmement, le fait qu'il n'y ait qu'une seule caractéristique, symétrique par rapport à l'axe des y, associée aux bas niveaux d'énergie impose la condition de parité : $h(E)=h(-E)$ pour $E^2\leq 2u_m$. ■

Du lemme 2.4, nous déduisons le

Corollaire 2.10 *Sous l'hypothèse (2.3) il existe une fonction* $h \in L^\infty(0,T; L^2(I\!R_x \times I\!R_E, |E|\sigma(E)dxdE))$ *vérifiant* $h(t,x,E) = h(t,x,-E)$ *lorsque* $E^2 < 2u_m$*, telle que le profil* F *s'exprime*

$$F(t,x,y,\xi) = h(t,x,\mathcal{E}(y,\xi)), \tag{2.46}$$

$\mathcal{E}(\cdot,\cdot)$ *étant définie par (2.29).*

Ainsi, chercher le comportement de F se réduit à étudier le comportement de h. A ce propos, nous avons le

Théorème 2.11 *Nous définissons*

$$\left\{\begin{array}{l} \xi^\#(E) = \dfrac{E}{|E|}\dfrac{1-\theta(E)}{\sigma(E)}, \\ h_0(x,E) = \dfrac{1-\theta(E)}{\sigma(E)} \left\langle f_0(x,\cdot,d(\cdot,E))\sigma(\cdot,E)\right\rangle \\ \quad + \dfrac{\theta(E)}{2\sigma(E)} \left\langle \left\{ f_0(x,\cdot,d(\cdot,E)) + f_0(x,\cdot,d(\cdot,-E))\right\} \sigma(\cdot,E)\right\rangle, \end{array}\right. \tag{2.47}$$

où $\sigma(\cdot,\cdot)$ *et* $\sigma(\cdot)$ *sont définies par (2.16),* $d(\cdot,\cdot)$ *par (2.30), et où* $\theta(E) = 1$ *si* $E^2 \leq 2u_m$, 0 *sinon. Alors, sous les hypothèses (2.2) et (2.3), pour presque tout* E*,* h *est l'unique solution de l'équation de transport paramétrée par* E

$$\left\{\begin{array}{l} \partial_t h + \xi^\#(E)\partial_x h = 0, \\ h_{|t=0} = h_0. \end{array}\right. \tag{2.48}$$

Démonstration - Nous construisons tout d'abord des fonctions test appartenant à $I\!K$. Celles-ci injectées dans la formulation faible nous permettent de déduire le théorème en utilisant comme seul outil, le changement de variable (2.29).

Pour toute fonction $\psi(t,x,E) \in C_0^1(\,[0,T) \times I\!R_x \times (I\!R_E \setminus \{\pm\sqrt{2u_m}\})\,)$, ne dépendant que de trois variables, nous définissons

$$\varphi(t,x,E) = \frac{\theta(E)}{2}\left(\psi(t,x,E) + \psi(t,x,-E)\right) + (1-\theta(E))\psi(t,x,E). \tag{2.49}$$

La fonction φ étant paire pour les E tels que $E^2 \leq 2u_m$, nous déduisons du lemme 2.4 que $\varphi(t,x,\mathcal{E}(y,\xi)) \in I\!K$ (pour tout (t,x)). De plus, la fonction φ est continuement dérivable. Ainsi, la fonction test $\varphi^\varepsilon(t,x,\xi) = \varphi(t,x,\mathcal{E}(\frac{x}{\varepsilon},\xi))$ possède la régularité nécessaire pour être utilisée dans la formulation faible de l'équation (2.1). Nous l'utilisons donc, le terme de contrainte disparait, puis en faisant tendre $\varepsilon \to 0$, nous obtenons que le profil F vérifie

$$\int_{\mathcal{Q}\times Y} F\left(\partial_t\varphi + \xi\partial_x\varphi\right) d\mathcal{Q}dy = -\int_{\mathcal{O}\times Y} f_0\varphi(0)\, d\mathcal{O}dy. \tag{2.50}$$

Nous remplaçons maintenant F et φ par leur expression en fonction de h et ψ. L'équation (2.50) devient alors

$$\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\int_{\mathcal{Q}\times Y} h(t,x,\mathcal{E}(y,\xi))(\partial_t+\xi\partial_x)\Big[\ (1-\theta(\mathcal{E}(y,\xi)))\,\psi(t,x,\mathcal{E}(y,\xi)) \\ \qquad\qquad +\tfrac{1}{2}\theta(\mathcal{E}(y,\xi))\,\{\psi(t,x,\mathcal{E}(y,\xi))+\psi(t,x,\mathcal{E}(y,-\xi))\}\Big]\,d\mathcal{Q}dy \\ \displaystyle = -\int_{\mathcal{O}\times Y} f_0(x,y,\xi)\,\big[\,(1-\theta(\mathcal{E}(y,\xi)))\psi(0,x,\mathcal{E}(y,\xi)) \\ \qquad\qquad +\tfrac{1}{2}\theta(\mathcal{E}(y,\xi))\,\{\psi(0,x,\mathcal{E}(y,\xi))+\psi(0,x,\mathcal{E}(y,-\xi))\}\big]\,d\mathcal{O}dy, \end{array}\right. \tag{2.51}$$

$\mathcal{E}(y,\xi)$ étant définie par (2.29).

Remarque 2.12 Nous avions choisi ψ dans $C^1_0([0,T)\times \mathbb{R}_x\times\mathbb{R}_E\setminus\{\pm\sqrt{2u_m}\})$ pour que φ soit C^1, mais, vu qu'il n'y a plus de dérivée en y ni en ξ, par densité, (2.51) est vérifiée $\forall\psi\in C^1_0([0,T)\times\mathbb{O}\,)$ où $\mathbb{O}\,=\mathbb{R}_x\times\mathbb{R}_E$, $\mathbb{Q}\,=(0,T)\times\mathbb{O}\,$.

En utilisant ensuite le changement de variables (2.29), (2.51) devient,

$$\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\int_{\mathbb{Q}\,\times Y} h(t,x,E)(\partial_t+d(y,E)\partial_x)\Big[\ (1-\theta(E))\,\psi(t,x,E) \\ \qquad\qquad +\frac{\theta(E)}{2}\,\{\psi(t,x,E)+\psi(t,x,-E)\}\Big]\,|E|\sigma(y,E)d\mathbb{Q}\,dy \\ \displaystyle = -\int_{\mathbb{O}\,\times Y} f_0(x,y,d(y,E))\,\Big[\,(1-\theta(E))\psi(0,x,E) \\ \qquad\qquad +\frac{\theta(E)}{2}\,\{\psi(0,x,E)+\psi(0,x,-E)\}\Big]\,|E|\sigma(y,E)d\mathbb{O}\,dy. \end{array}\right. \tag{2.52}$$

Rappelons que $h(t,x,E)=h(t,x,-E)$ lorsque $\theta(E)=1$, donc, et parce que intégrer une fonction impaire sur un intervalle centré en 0 donne 0, nous avons

$$\int_{\mathbb{R}} h(t,x,E)\,d(y,E)\,\partial_x\{\psi(t,x,E)+\psi(t,x,-E)\}\,\frac{\theta(E)}{2}\,|E|\sigma(y,E)dE=0, \tag{2.53}$$

pour presque tout $y\in Y$.
Nous remarquons également que

$$\begin{array}{l} \displaystyle\int_{\mathbb{R}} h(t,x,E)\partial_t(\tfrac{\theta(E)}{2}\psi(t,x,E))\,|E|\sigma(y,E)dE = \\ \qquad\qquad \displaystyle\int_{\mathbb{R}} h(t,x,E)\partial_t(\tfrac{\theta(E)}{2}\psi(t,x,-E))\,|E|\sigma(y,E)dE. \end{array} \tag{2.54}$$

Comme de plus, sur $\{(y,E),E^2>2u(y)\}$, $d(y,E)|E|\sigma(y,E)=E$, (2.52) devient

$$\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\int_{\mathbb{Q}\,\times Y} h(t,x,E)\,\partial_t\psi(t,x,E)\,|E|\sigma(y,E)d\mathbb{Q}\,dy \\ \displaystyle\qquad +\int_{\mathbb{Q}\,\times Y}(1-\theta(E))\,\mathcal{X}(E^2-2u(y))\,h(t,x,E)\,\partial_x\psi(t,x,E)\,Ed\mathbb{Q}\,dy \\ \displaystyle = -\int_{\mathbb{O}\,\times Y} f_0(x,y,d(y,\xi))\,\Big\{\,(1-\theta(E))\psi(0,x,E) \\ \qquad\qquad +\frac{\theta(E)}{2}(\psi(0,x,E)+\psi(0,x,-E))\,\Big\}\,|E|\sigma(y,E)d\mathbb{O}\,dy. \end{array}\right. \tag{2.55}$$

En remarquant de plus que

$$(1-\theta(E))\mathcal{X}(E^2-2u(y)) = (1-\theta(E)), \tag{2.56}$$

et en intégrant (2.55) par rapport à y, nous obtenons

$$\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\int_{\mathbb{Q}} h(t,x,E)\,\partial_t\psi(t,x,E)\,|E|\sigma(E)d\mathbb{Q} \\ \displaystyle\qquad + \int_{\mathbb{Q}} \frac{(1-\theta(E))}{\sigma(E)} h(t,x,E)\,\partial_x\psi(t,x,E)\,E\sigma(E)d\mathbb{Q} \\ \displaystyle = -\int_{\mathbb{O}} \psi(0,x,E)\left\{\frac{(1-\theta(E))}{\sigma(E)}\,\langle f_0(x,d(\cdot,E))\sigma(\cdot,E)\rangle\right. \\ \displaystyle\qquad \left. + \frac{\theta(E)}{2\sigma(E)}\,\langle (f_0(x,\cdot,d(\cdot,E)) + f_0(x,\cdot,d(\cdot,-E)))\sigma(\cdot,E)\rangle\right\}|E|\sigma(E)d\mathbb{O}\,, \end{array}\right. \tag{2.57}$$

Nous reconnaissons en (2.57) la formulation faible de (2.48).

Pour achever la preuve du théorème, il n'y a plus qu'à montrer l'existence et l'unicité de (2.48). A ce sujet, nous remarquons que pour tout E, $|E| < \infty$, la fonction $|\xi^{\#}(E)| < \infty$. En effet, d'après la propriété 2.6, la fonction $\sigma(E) > 0$.
De plus, vu les hypothèses faites sur la donnée initiale f_0, nous déduisons que pour presque tout E, $h_0(\cdot,E) \in L^2(\mathbb{R}_x)$ et $h_0(\cdot,E) \geq 0$.
Ainsi, l'existence l'unicité de la solution de (2.48) découle de la théorie classique des équations de transport.
La preuve du théorème est donc terminée. ■

Comme conséquence de l'unicité de la solution de (2.48), nous avons le

Corollaire 2.13 *Toute la suite f^ε, et non pas seulement une sous-suite, converge vers f.*

En effet, soit $f^{\varepsilon'}$ une sous-suite extraite de f^ε. En appliquant le résultat de N'Guetseng, nous déduisons que pour une sous-suite extraite $f^{\varepsilon''}$ de $f^{\varepsilon'}$, il existe un profil $F(t,x,y,\xi) = h(t,x,\mathcal{E}(y,\xi))$. Pour toutes les sous-suites $f^{\varepsilon'}$, la fonction h est identique et $f^{\varepsilon''} \to \int_y h(t,x,\mathcal{E}(y,\xi))\,dy$. La limite f de $f^{\varepsilon''}$ est donc identique pour toutes les sous-suites $f^{\varepsilon'}$.
Donc toute la suite f^ε converge vers f. ■

Remarque 2.14 Lorsque $u'(-1) = 0$ ou $u'(1) = 0$, la fonction $\sigma(E)$ tend vers l'infini quand E tend vers $\pm\sqrt{2u_m}$. Dans ce cas, la fonction $\xi^{\#}$ est continue.
En revanche, lorsque $u'(-1) \neq 0$ et $u'(1) \neq 0$, la fonction $\sigma < \infty$. Le coefficient $\xi^{\#}$ est alors discontinu en $\pm\sqrt{2u_m}$.

2.3 $2^{ème}$ étape : Homogénéisation non locale

Sachant que h et la limite faible f de f^ε sont liées par

$$f(t,x,\xi) = \frac{1}{|Y|}\int_Y h(t,x,\mathcal{E}(y,\xi))dy = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} h(t,x,\mathcal{E}(y,\xi))dy, \tag{2.58}$$

nous allons maintenant utiliser une méthode d'homogénéisation non locale pour intégrer l'équation (2.48) afin de déduire l'équation effective.
C'est à ce niveau que nous avons besoin de l'hypothèse (2.4). La donnée initiale h_0 devient alors,

$$\left\{\begin{array}{l} h_0(x,E) = f_1(x)a^{\#}(E) \text{ où} \\ a^{\#}(E) = \dfrac{1-\theta(E)}{\sigma(E)}\left\langle a(\cdot,d(\cdot,E))\,\sigma(\cdot,E)\right\rangle \\ \qquad\qquad +\dfrac{\theta(E)}{2\sigma(E)}\left\langle (a(\cdot,d(\cdot,E))+a(\cdot,d(\cdot,-E)))\,\sigma(\cdot,E)\right\rangle \end{array}\right. \tag{2.59}$$

Remarque 2.15 Il est aisé de voir que l'hypothèse (2.4) implique $a^{\#}(\cdot) \in (L^2 \cap L^\infty)(\mathbb{R})$ et $a^{\#}(\cdot) \geq 0$. Ainsi, nous pouvons appliquer la méthode qui suit. ■

Nous appliquons à l'équation (2.48) la transformation de Laplace en t, et celle de Fourier en x. Après avoir remplacé E par $\mathcal{E}(y,\xi)$, en notant pour simplifier, $a^{\#}(y,\xi) = a^{\#}(\mathcal{E}(y,\xi))$ et $\xi^{\#}(y,\xi) = \xi^{\#}(\mathcal{E}(y,\xi))$, nous obtenons

$$\mathcal{LF}(h) \;=\; \mathcal{F}(f_1)a^{\#}(y,\xi)\left(p + 2i\pi k\xi^{\#}(y,\xi)\right)^{-1}, \tag{2.60}$$

$p, \mathrm{Re}(p) > 0$ étant la variable duale de t et k celle de x.
Pour calculer la moyenne de $\mathcal{LF}(h)$ par rapport à y, nous introduisons la fonction ϕ suivante,

$$\phi(y,\xi,z) = a^{\#}(y,\xi)\left(z + \xi^{\#}(y,\xi)\right)^{-1} \tag{2.61}$$

définie pour $(y,\xi,z) \in Y \times \mathbb{R} \times (\mathbb{C} \setminus \Lambda_\xi)$, où

$$\Lambda_\xi = \left[-|\xi^{\#}(\cdot,\xi)|_\infty,\, |\xi^{\#}(\cdot,\xi)|_\infty\right] \tag{2.62}$$

et holomorphe en $z \in (\mathbb{C} \setminus \Lambda_\xi)$ pour tout ξ.
$\mathcal{LF}(F)$ s'exprime alors en fonction de ϕ

$$\mathcal{LF}(h) = \mathcal{F}(f_1)\frac{1}{2i\pi k}\,\phi\left(y,\xi,\frac{p}{2i\pi k}\right). \tag{2.63}$$

Grâce à un résultat de Y.Amirat, K.Hamdache & A.Ziani [7], ϕ est une fonction holomorphe du type Nevanlinna-Pick, et il existe donc une famille de mesures paramétrées ν_ξ ayant leur support dans Λ_ξ telles que

$$\langle\phi(\cdot,\xi,z)\rangle = \left\langle a^{\#}(\cdot,\xi)\right\rangle\left\{z + D(\xi) - \int (z-\lambda)^{-1}\, d\nu_\xi(\lambda)\right\}^{-1}, \tag{2.64}$$

pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, $z \in (\mathbb{C} \setminus \Lambda)$ fixés. La fonction $D(\cdot)$ est définie par

$$D(\xi) = \left\langle a^{\#}(\cdot,\xi)\xi^{\#}(\cdot,\xi)\right\rangle \left\langle a^{\#}(\cdot,\xi)\right\rangle^{-1}. \tag{2.65}$$

De plus, les moments de ν_ξ s'expriment explicitement en fonction de $\left\langle \left(\xi^{\#}(\cdot,\xi)\right)^k\right\rangle$ pour $k \in \mathbb{N}$, par exemple

$$\int_\Lambda d\sigma_\xi(\lambda) = \frac{\left\langle a^{\#}(\cdot,\xi)\left(\xi^{\#}(\cdot,\xi)\right)^2\right\rangle}{\left\langle a^{\#}(\cdot,\xi)\right\rangle} - \frac{\left\langle a^{\#}(\cdot,\xi)\xi^{\#}(y,\xi)\right\rangle^2}{\left\langle a^{\#}(\cdot,\xi)\right\rangle^2} > 0. \tag{2.66}$$

Nous pouvons ainsi calculer la moyenne de (2.63),

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{LF}(h)(\mathcal{E}(\cdot,\xi))\rangle \quad &= \quad \mathcal{F}(f_1)\left\langle a^{\#}(\cdot,\xi)\right\rangle \Big\{ p + 2i\pi k D(\xi) \\ &\qquad -(2i\pi k)^2 \int (p+2i\pi k\lambda)^{-1} d\nu_\xi(\lambda)\Big\}^{-1},\end{aligned} \tag{2.67}$$

Puis en effectuant les transformations de Fourier et de Laplace inverses, nous obtenons le théorème 2.1. ■

Remarque 2.16 Pour la preuve de l'existence et de l'unicité du problème (2.5) nous renvoyons à Y.Amirat, K.Hamdache & A.Ziani [6]. ■

2.4 Comportement effectif de la densité de masse

Il est intéressant de noter que (2.48) permet de déduire une équation sur la densité de masse lorsque f_0 est à support compact (en x et ξ). En effet, dans ce cas, $\forall t \leq T$, $\exists R_t < \infty$ tel que $\operatorname{supp}(f^\varepsilon) \subset B(0,R_t)$, $\forall \varepsilon$. En notant $R = \sup_{t\in[0,T]} R_t$, nous obtenons que $\forall t \leq T$, $\operatorname{supp}(f^\varepsilon) \subset B(0,R)$ $\forall \varepsilon$. Ainsi, $\operatorname{supp}(f) \subset B(0,R)$ et $\operatorname{supp}(F) \subset B(0,R)\times Y$. Dans ce cas, la densité de masse est donnée par

$$\rho(t,x) = \int_{|\xi|<R} f(t,x,\xi)\, d\xi. \tag{2.68}$$

Nous allons montrer que $\rho(\cdot,\cdot)$ vérifie une équation de transport à mémoire.
En utilisant la relation entre f et h, nous obtenons

$$\rho(t,x) = \int_{|E|<r} v(t,x,E)dE, \quad \text{où } v(t,x,E) := \sigma(E)|E|h(t,x,E), \tag{2.69}$$

pour tout $r > \sqrt{R^2 + 2u_m}$, h étant la solution (2.48).
En effet, en remplaçant f par son expression en fonction de h dans (2.68) nous obtenons

$$\rho(t,x) = \frac{1}{|Y|}\int_{|\xi|<R}\int_Y h(t,x,\mathcal{E}(y,\xi))\, dyd\xi, \tag{2.70}$$

qui en effectuant le changement de variables (2.29) donne

$$\int_{E^2<R^2+2u(y)} h(t,x,E)|E|\sigma(E)\,dE. \tag{2.71}$$

Or, l'hypothèse de support compact sur la donnée initiale permet d'affirmer que la fonction $h(t,x,E)=0$ lorsque $E^2 > R^2+2u(y)$, donc (2.69) est prouvée.

Soit $C(E)$ la fonction définie sur $[-r,r]$ par $C(E)=\frac{E}{|E|}\frac{1-\theta(E)}{\sigma(E)}$, l'équation vérifiée par ρ_r est alors donnée par le

Théorème 2.17 *Soit $r>\sqrt{2u_m}$ fixé, il existe une mesure positive Σ à support dans $[-|C(\cdot)|_\infty, |C(\cdot)|_\infty]$ telle que ρ soit solution de*

$$\left\{\begin{array}{l} \partial_t\rho + c\partial_x\rho - \displaystyle\int_0^t ds \int d\Sigma(\lambda)\partial_x^2\rho(s,x+\lambda(t-s)), \\ \rho_{|t=0} = af_1, \end{array}\right. \tag{2.72}$$

où a et c sont des constantes positives définies par

$$\begin{aligned} a &= \int_{|E|<r} a^{\#}(E)|E|\sigma(E)dE \\ ca &= \int_{|E|<r} (1-\theta(E))a^{\#}(E)EdE \end{aligned} \tag{2.73}$$

Démonstration - Les idées sont les mêmes que pour la démonstration du théorème 2.1. Nous effectuons la transformation de Laplace en t et celle de Fourier en x de l'équation (2.48). Nous avons alors

$$\mathcal{LF}(v) = |E|\sigma(E)a^{\#}(E)f_1(x)\,(p+2i\pi kC(E))^{-1} \tag{2.74}$$

En utilisant le résultat de Y.Amirat, K.Hadache & A.Ziani [7], nous déduisons qu'il exite une mesure Σ telle que

$$\int_{|E|<r} \mathcal{LF}(v) = a\left\{p+2i\pi kc - (2i\pi k)^2\int d\Sigma(\lambda)(p+2i\pi k\lambda)^{-1}\right\}^{-1}, \tag{2.75}$$

avec a et c données par (2.73). En appliquant les transformations inverses, nous obtenons (2.72). Le théorème est ainsi prouvé. ■

Remarque 2.18 Ce théorème illustre la perte de régularité en moyenne de la suite f^ε. ■

2.5 Homogénéisation avec donnée initiale constante en vitesse

Le but de cette sous-section est de montrer comment homogénéiser l'équation (2.1) lorsque f_0 est indépendante de ξ, i.e. lorsque la donnée initiale est

$$f^\varepsilon_{|t=0} = f_1(x), \text{ avec } f_1 \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}_x). \tag{2.76}$$

Dans ce cas, l'équation (2.1) devient

$$\begin{cases} \partial_t f^\varepsilon + \xi \cdot \partial_x f^\varepsilon - \dfrac{1}{\varepsilon} u'\left(\dfrac{x}{\varepsilon}\right) \cdot \partial_\xi f^\varepsilon = 0, \\ f_{|t=0} = f_1(x). \end{cases} \tag{2.77}$$

Nous commençons par montrer comment appliquer le résultat général à ce problème. Puis, nous donnons sous cette hypothèse, des résultats plus simples et plus explicites que précédemment.

Notre but est de nous ramener à un problème du type étudié dans les sous-sections précédentes. Pour ce faire, considérons une fonction régulière strictement positive et bornée $a(y,\xi) \in \mathbb{K}$ (il est par exemple possible de choisir la maxwellienne $M_-(y,\xi) = \exp(-(\xi^2 + 2u(y)))$. Il existe alors $\alpha(E) > 0$ telle que $a(y,\xi) = \alpha(\mathcal{E}(y,\xi))$.
Définissons alors la fonction $g^\varepsilon = a^\varepsilon f^\varepsilon$ où $a^\varepsilon(x,\xi) = a(\frac{x}{\varepsilon},\xi)$. Cette fonction vérifie l'equation recherchée

$$\begin{cases} \partial_t g^\varepsilon + \xi \partial_x g^\varepsilon - \dfrac{1}{\varepsilon} u'\left(\dfrac{x}{\varepsilon}\right) \partial_\xi g^\varepsilon = 0, \\ g_{|t=0} = f_1(x) a\left(\dfrac{x}{\varepsilon},\xi\right). \end{cases} \tag{2.78}$$

En effet,

$$\begin{aligned} &\partial_t g^\varepsilon + \xi \partial_x g^\varepsilon - \frac{1}{\varepsilon} u'\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \partial_\xi g^\varepsilon = \\ &a^\varepsilon \left[\partial_t f^\varepsilon + \xi \partial_x f^\varepsilon - \frac{1}{\varepsilon} u'\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \partial_\xi f^\varepsilon\right] + \frac{1}{\varepsilon} f^\varepsilon \left(\xi \partial_x - u'\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\partial_\xi\right) a\left(\frac{x}{\varepsilon},\xi\right) = 0. \end{aligned} \tag{2.79}$$

Remarque 2.19 Remarquons ici que l'existence et l'unicité de la solution de (2.78) donne l'existence et l'unicité de la solution de (2.77). En effet, la définition de $f^\varepsilon = g^\varepsilon / a^\varepsilon$ est indépendante du choix de $a(y,\xi) \in \mathbb{K}$ et régulière.

Pour montrer cela, choisissons deux fonctions $a(y,\xi)$ et $b(y,\xi)$ régulières et appartenant à $\mathbb{K}$, et considérons les solutions g^ε_a et g^ε_b de (2.78) avec les données initiales $f_1 a^\varepsilon$ et $f_1 b^\varepsilon$ respectivement. Nous devons alors montrer que $f^\varepsilon_a = (a^\varepsilon)^{-1} g^\varepsilon_a$ et $f^\varepsilon_b = (b^\varepsilon)^{-1} g^\varepsilon_b$ sont identiques.
Pour cela, nous remarquons que la fonction $\sqrt{a^\varepsilon b^\varepsilon}(f^\varepsilon_a - f^\varepsilon_b)$ vérifie l'équation (2.78) avec la donnée initiale $\sqrt{a^\varepsilon b^\varepsilon}((a^\varepsilon)^{-1} g^\varepsilon_{a|t=0} - (b^\varepsilon)^{-1} g^\varepsilon_{b|t=0}) = f_1(x)(\sqrt{a^\varepsilon b^\varepsilon} - \sqrt{a^\varepsilon b^\varepsilon}) = 0$. Donc, $\sqrt{a^\varepsilon b^\varepsilon}(f^\varepsilon_a - f^\varepsilon_b) = 0$ et donc les deux fonctions f^ε_a et f^ε_b sont identiques.
Ceci prouve que la définition de f^ε ne dépend pas de la fonction a choisie. ■

Nous appliquons le processus d'homogénéisation précédemment exposé sur l'équation (2.78) et nous trouvons que le profil $G(t,x,y,\xi)$ associé à g^ε s'écrit $G(t,x,y,\xi) = k(t,x,\mathcal{E}(y,\xi))$ où $k(t,x,E) \in L^\infty(0,T;L^2(\mathbb{O}\,,|E|\sigma(E)dxdE))$ est solution de

$$\begin{cases} \partial_t k + \xi^\#(E)\partial_x k = 0 \\ k_{|t=0} = k_0 := f_1(x)\alpha(E), \end{cases} \tag{2.80}$$

car, $a^\#(E) = \alpha(E)$. En effet, $a \in \mathbb{K}$ implique que $a(y,d(y,E)) = \alpha(E)$ et que $\alpha(E)$ est paire pour $E^2 \leq 2u_m$. Il suffit alors d'utiliser ces deux informations dans (2.59) pour déduire ce résultat.

Pour ensuite obtenir le résultat concernant l'homogénéisation de l'équation (2.77) nous définissons $h(t,x,E) = (\alpha(E))^{-1}k(t,x,E)$. Nous avons alors

$$f(t,x,\xi) = \langle h(t,x,\mathcal{E}(\cdot,E))\rangle\,, \tag{2.81}$$

où f est la limite faible$-*$ de f^ε dans $L^\infty((0,T)\times\mathbb{R}_\xi;L^2(\mathbb{R}_x))$.
En effet, appelons F le profil associé à f^ε. La fonction a étant régulière, pour toute fonction test $\varphi(t,x,y,\xi)$ régulière, nous avons d'une part

$$\int_{\mathbb{Q}} f^\varepsilon a^\varepsilon \varphi^\varepsilon \, d\mathbb{Q} \to \int_{\mathbb{Q}\,\times Y} F a \varphi \, d\mathbb{Q}\, dy \tag{2.82}$$

et, d'autre part

$$\int_{\mathbb{Q}} (f^\varepsilon a^\varepsilon)\varphi^\varepsilon \, d\mathbb{Q} \to \int_{\mathbb{Q}\,\times Y} G\varphi \, d\mathbb{Q}\, dy, \tag{2.83}$$

d'où nous déduisons

$$G = aF, \tag{2.84}$$

Ainsi, la fonction h associée à F par $F(t,x,y,\xi) = h(t,x,\mathcal{E}(y,\xi))$ est la fonction $h = \alpha^{-1}(E)k(t,x,E)$. En appliquant ensuite la formule reliant f et F, $f = \langle F\rangle$, nous obtenons (2.81).

Il est alors aisé de voir que la fonction h vérifie l'équation

$$\begin{cases} \partial_t h + \xi^\#(E)\partial_x h = 0 \\ h_{|t=0} = f_1(x), \end{cases} \tag{2.85}$$

Donc, si nous appliquons la méthode d'homogénéisation non locale précédente à (2.85), l'interaction avec la donnée initiale disparait. En d'autres termes,

$$\mathcal{LF}(h) = \mathcal{F}(f_1)\left(p + 2i\pi k\xi^\#(y,\xi)\right)^{-1} = \mathcal{F}(f_1)\frac{1}{2i\pi k}\phi\left(y,\xi,\frac{1}{2i\pi k}\right) \tag{2.86}$$

où, ici, la fonction $\phi(y,\xi,z) = (z+\xi^\#(y,\xi))^{-1}$. En appliquant un résultat de Y.Amirat, K.Hamdache & A.Ziani [4], nous obtenons que ϕ est une fonction du type Nevanlinna-Pick et donc il existe une famille de mesures paramétrées ν_ξ à support dans l'intervalle Λ_ξ, défini par $\Lambda_\xi = [-|\xi^\#(\cdot,\xi)|_\infty, |\xi^\#(\cdot,\xi)|_\infty]$, telle que

$$\langle\phi(\cdot,\xi,z)\rangle = \left\{z + D(\xi) - \int (z-\lambda)^{-1}d\nu_\xi(\lambda)\right\} \tag{2.87}$$

avec

$$D(\xi) = \langle \xi^{\#}(\cdot, \xi) \rangle. \tag{2.88}$$

Ainsi, en appliquant les transformations de Fourier et Laplace inverses, nous obtenons le

Théorème 2.20 *Lorsque la donnée initiale est donnée par (2.76) et sous l'hypothèse (2.3), la limite faible f de f^ε est solution de*

$$\begin{cases} \partial_t f + D(\xi)\partial_x f - \displaystyle\int_0^t ds \int d\nu_\xi(\lambda)\, \partial_x^2 f(s, x + \lambda(t-s), \xi), \\ f_{t=0} = f_1. \end{cases} \tag{2.89}$$

$D(\cdot)$ est donnée par (2.88) et la mesure ν_ξ est celle introduite dans (2.87).

Il est intéressant de noter que, dans ce cas, il existe une relation plus précise entre les mesures ν_ξ et les mesures de Young μ_ξ associées aux suites $\xi^{\#}(x/\varepsilon\,, \xi)$. Nous avons en effet (cf [6])

$$\langle d\nu_\xi(\lambda); (z-\lambda)^{-1} \rangle = \langle d\mu_\xi(\lambda); z - \lambda \rangle - \{\langle d\mu_\xi(\lambda); (z-\lambda)^{-1} \rangle\}^{-1}. \tag{2.90}$$

Cette relation permet de calculer $\langle d\nu_\xi(\lambda); \beta(\lambda) \rangle$, $\forall \beta$ holomorphe. En effet, grâce à la formule de Cauchy

$$\beta(\lambda) = \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma \frac{\beta}{z - \lambda} dz, \tag{2.91}$$

où Γ est une courbe fermée entourant Λ_ξ, nous avons

$$\langle d\nu_\xi(\lambda); \beta(\lambda) \rangle = \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma \beta(z) \left[\langle d\mu_\xi(\lambda); z - \lambda \rangle - \{\langle d\mu_\xi(\lambda); (z-\lambda)^{-1} \rangle\}^{-1} \right] dz \tag{2.92}$$

2.6 Exemple

Nous nous plaçons ici dans le cadre de la sous-section 2.5, à savoir que nous considérons le problème avec donnée initiale indépendante de ξ.
Nous considérons donc l'équation (2.77) avec le potentiel $u \in C_p^0(Y) \cap C^2([-1, 1]))$ défini de la manière suivante

$$u(y) = \frac{1}{2} y^2 \text{ sur } Y = [-1, 1]. \tag{2.93}$$

D'après ce que nous venons de voir, le profil associé à la suite de solutions de (2.77) s'écrit $F(t, x, y, \xi) = h(t, x, \mathcal{E}(y, \xi))$ où h est solution de (2.85) et l'équation satisfaite par la limite faible f de f^ε est donnée par le théorème 2.20.

Nous donnons maintenant explicitement les fonctions $\sigma(\cdot)$ et $\xi^{\#}(\cdot)$ ainsi que la mesure de Young μ_ξ et l'expression de $D(\cdot)$.

Nous avons tout d'abord,

$$\left\{\begin{array}{l}\sigma(y,E)=\mathcal{X}(E^2-y^2)\,(E^2-y^2)^{-1/2}\\ \text{et}\\ \sigma(E)=\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\pi}{2}\ \text{si}\ |E|\le 1,\\ \arcsin(\frac{1}{|E|})\ \text{si}\ |E|>1.\end{array}\right.\end{array}\right. \tag{2.94}$$

En effet, en utilisant la formule (2.19), lorsque $E^2>1$, $y_\pm(E)=\pm 1$, et donc $\sigma(E)=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(E^2-y^2)^{-1/2}dy=\arcsin\left(|E|^{-1}\right)$. En revanche, quand $E^2\le 1$, $y_\pm(E)=\pm|E|$. Alors, $\sigma(E)=\frac{1}{2}\int_{-|E|}^{|E|}(E^2-y^2)^{-1/2}dy=\frac{1}{2}(\arcsin(1)-\arcsin(-1))=\frac{\pi}{2}$.

En utilisant cette expression de σ, nous obtenons $\xi^\#$,

$$\xi^\#(y,\xi)=\left(\arcsin\left(\frac{\xi}{|\xi|}(\xi^2+y^2)^{-1/2}\right)\right)^{-1}\kappa_1(y,\xi), \tag{2.95}$$

où $\kappa_1(y,\xi)$ est la fonction caractéristique de $\left\{(y,\xi)\in(Y\times\mathbb{R}),y^2+\xi^2>1\right\}$.

En effet, en remarquant que $1-\theta(E)=0$ lorsque $|E|\le 1$, nous avons

$$\xi^\#(E)=\frac{E}{|E|}\frac{1-\theta(E)}{\arcsin\left(|E|^{-1}\right)}, \tag{2.96}$$

dont le graphe est tracé sur la figure 5.

figure=dessins/xidiese.eps,height=55mm

FIGURE 5 – Coefficient $\xi^\#(E)$ pour $u(y)$ donné par (2.93)

En remplaçant ensuite E par $\mathcal{E}(y,\xi)$ nous obtenons (2.95).
Nous donnons alors, en utilisant (2.88), l'expression de $D(\cdot)$

$$D(\xi)=\frac{1}{2}\int_{\Upsilon_\xi}\left(\arcsin\left(\frac{1}{\frac{\xi}{|\xi|}\sqrt{\xi^2+y^2}}\right)\right)^{-1}dy \tag{2.97}$$

où $\Upsilon_\xi=\{y\in Y,\xi^2+y^2>1\}$

De même, la mesure de Young μ_ξ associée à $\xi^\#(x/\varepsilon,\xi)$ est donnée par

$$d\mu_\xi=\gamma(\xi)\delta_{\lambda=0}+\Theta_\xi(\lambda)\eta_\xi(\lambda)\,d\lambda, \tag{2.98}$$

où, $\gamma(\xi)=2\sqrt{1-\xi^2}$ si $\xi^2<1,\ 0$ sinon, Θ_ξ est la fonction caractéristique de l'intervalle $[\frac{2}{\pi},(\arcsin(\frac{1}{|\xi|}))^{-1}]$ si $\xi>0$ et de l'intervalle $[-(\arcsin(\frac{1}{|\xi|}))^{-1},\frac{2}{\pi}]$ si $\xi<0$, et enfin $\eta_\xi(\lambda)=\left(\sin^{-2}(1/\lambda)-\xi^2\right)^{-1/2}\sin^{-3}(1/\lambda)\,\cos(1/\lambda)\lambda^{-2}$.

En effet, considérons une fonction régulière Ψ, la limite faible de $\Psi(\xi^{\#}(\frac{x}{\varepsilon},\xi))$ est donnée par

$$\left\{\begin{aligned}&\int_Y \Psi\left(1-\theta\left(\frac{\xi}{|\xi|}\sqrt{\xi^2+y^2}\Big(\left(\arcsin\left((\frac{\xi}{|\xi|}\frac{1}{\sqrt{\xi^2+y^2}}\right)\right)^{-1}\right)dy\\&=\text{mes}\{y,\ \xi^2+y^2<1\}\Psi(0)+\int_{\{y,\ \xi^2+y^2>1\}}\Psi\left(\left(\arcsin\left((\frac{\xi}{|\xi|}\frac{1}{\sqrt{\xi^2+y^2}}\right)\right)^{-1}\right)dy.\end{aligned}\right. \tag{2.99}$$

D'une part, en effectuant le changement de variables $\lambda=\left(\arcsin\left((\frac{\xi}{|\xi|}\frac{1}{\sqrt{\xi^2+y^2}}\right)\right)^{-1}$ le deuxième terme de (2.99) devient $\int\Theta_\xi(\lambda)\Psi(\lambda)\eta_\xi(\lambda)\,d\lambda$. D'autre part, il est aisé de voir $\text{mes}\{y\in Y,\ \xi^2+y^2<1\}=\gamma(\xi)$, (2.98) est donc prouvée.

3 Quelques perturbations du champ de force

La méthode que nous venons de développer permet de déduire l'équation du profil pour certains problèmes voisins. Le premier problème que nous traitons dans cette partie est l'ajout d'un terme constant au champ dérivant du potentiel oscillant. Le second est le cas où le champ de force est la somme d'un terme dérivant d'un potentiel u^ε s'écrivant $u^\varepsilon(x) = u(x, \frac{x}{\varepsilon})$, et d'un terme oscillant.
Dans chacun de ces cas, nous obtenons que le profil vérifie un problème à deux phases. Dans l'un des domaines il n'y a pas d'évolution de la position, et même, dans certains cas pas d'évolution du tout. Dans l'autre, le profil vérifie une équation de transport. La frontière entre les deux domaines étant transverse au champ intervenant dans l'équation de transport, nous établissons les conditions aux limites indispensables pour que le problème soit bien posé.

3.1 Cas d'une perturbation constante

La première perturbation que nous envisageons est le cas où le champ de force est la somme d'un terme dérivant d'un potentiel oscillant et d'un terme constant positif

$$P^\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} u'\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big) + A. \tag{3.1}$$

Le portrait de phase associé à un tel champ de force est représenté sur la figure 3.1.

Nous nous intéressons à ce problème car sous l'effet de la composante constante les particules sont accélérées de cellule en cellule (elles sont alors, réellement des particules emballées ou "runaway particles".)
L'effet de cet emballement se retrouve dans l'équation du profil et génère la différence suivante avec le cas traité précédemment. La variable d'énergie E n'est plus un simple paramètre de l'équation, mais il y a évolution par rapport à celle-ci.
Plus précisément nous obtenons un problème à deux phases. Pour les petites énergies ($E^2 < 2u_m$), il n'y a toujours aucune évolution du système. En revanche, pour les grandes énergies ($E^2 > 2u_m$) il y a soit ralentissement (lorsque $E < -\sqrt{2u_m}$), soit accélération (lorsque $E > \sqrt{2u_m}$), avec une condition de transmission entre ces deux régions. Cette condition de transmission entre deux régions qui n'ont pas de frontière commune peut sembler étrange. Pourtant, une étude du portrait de phase de la figure 3.1 permet de bien comprendre sa raison d'être.
Premièrement, nous remarquons qu'il existe toujours une énergie critique sous laquelle une particule reste piégée.
Considérons ensuite une particule voyageant vers les x négatifs avec une énergie supérieure (en module) à l'énergie critique. Celle-ci, sous l'action du champ de force constant, voit le module de sa vitesse (moyenne sur une cellule) diminuer (de cellule en cellule). Lorsqu'elle atteint l'énergie critique, l'action du potentiel oscillant la fait changer de direction. Elle repart alors vers les x positifs avec l'énergie critique, puis est réaccélérée.

Ce changement de direction s'effectuant au sein d'une cellule (i.e. dans une région dont la dimension est celle de l'échelle microscopique), ceci se traduit (à l'échelle macroscopique) par un saut de l'énergie $-\sqrt{2u_m}$ à l'energie critique $\sqrt{2u_m}$, d'où ces conditions aux limites.

Nous considérons donc l'équation suivante

$$\begin{cases} \partial_t f^\varepsilon + \xi \cdot \partial_x f^\varepsilon + \left[A - \frac{1}{\varepsilon} u' \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \right] \cdot \partial_\xi f^\varepsilon = 0, \\ f^\varepsilon_{|t=0} = f^\varepsilon_0, \end{cases} \tag{3.2}$$

avec toujours les mêmes hypothèses (2.2) et (2.3), et nous supposons de plus, que

$$u'(-1) \neq 0 \text{ et } u'(1) \neq 0. \tag{3.3}$$

Avec cette hypothèse supplémentaire, la fonction $\sigma(E) < \infty$ pour tout $E \neq 0$.
La composante A est un champ de force constant. Nous la supposons positive, mais cette hypothèse n'est pas restrictive au sens où, si A était négative nous pourrions appliquer la même méthode et trouver des résultats analogues.

Pour ce problème, il existe toujours un profil F associé à f^ε et une limite faible f. (Les résultats que nous obtenons permettent de conclure à leur unicité.)
En suivant le même cheminement que précédemment, nous obtenons l'équation de contrainte sur F

$$\xi \partial_y F - u'(y) \partial_\xi F = 0. \tag{3.4}$$

En effet, la formulation faible (pour des fonctions test oscillantes) associée à (3.2) étant

$$\begin{aligned} &\int_{\mathcal{Q}} f^\varepsilon \left(\partial_t \psi^\varepsilon + \xi \partial_x \psi^\varepsilon + A \partial_\xi \psi^\varepsilon \right) d\mathcal{Q} \\ + &\frac{1}{\varepsilon} \int_{\mathcal{Q}} f^\varepsilon \left(\xi \partial_y \psi^\varepsilon - u' \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \partial_\xi \psi^\varepsilon \right) d\mathcal{Q} = - \int_{\mathcal{O}} f^\varepsilon_0 \psi^\varepsilon(0) \, d\mathcal{O}, \end{aligned} \tag{3.5}$$

en choisissant des fonctions test $\psi^\varepsilon = \varepsilon \psi(t, x, \frac{x}{\varepsilon}, \xi)$ avec ψ régulière et $Y-$ périodique en y, et en faisant tendre $\varepsilon \to 0$ nous obtenons aisément (3.4).

Ainsi, de (3.4), en appliquant le lemme 2.4 et son Corollaire 2.10, nous obtenons qu'il existe $h \in L^\infty(0, T; L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, |E|\sigma(E) dx dE))$, $h(E) = h(-E)$ pour $E^2 < 2u_m$, telle que

$$F(t, x, y, \xi) = h(t, x, \mathcal{E}(y, \xi)). \tag{3.6}$$

L'évolution de la fonction h est alors donnée par le

Théorème 3.1 *Sous les hypothèses (2.2) (2.3) et (3.3), la fonction h est l'unique solution de*

$$\begin{cases} \partial_t h = 0 \textit{ pour } E^2 < 2u_m, \\ \partial_t h + \frac{E}{|E|\sigma(E)} \partial_x h + \frac{A}{|E|\sigma(E)} \partial_E h = 0 \textit{ pour } E^2 > 2u_m, \end{cases} \tag{3.7}$$

avec la condition de transmission

$$h(t,x,\sqrt{2u_m}) = h(t,x,-\sqrt{2u_m}),\,, \tag{3.8}$$

et la donnée initiale

$$h_{|t=0} = h_0, \tag{3.9}$$

où h_0 est définie comme précédemment :

$$\left\{ \begin{array}{l} h_0(x,E) = \dfrac{1-\theta(E)}{\sigma(E)} \langle f_0(x,\cdot,d(\cdot,E))\sigma(\cdot,E)\rangle \\ \quad +\dfrac{\theta(E)}{2\sigma(E)} \langle \{f_0(x,\cdot,d(\cdot,E)) + f_0(x,\cdot,d(\cdot,-E))\}\,\sigma(\cdot,E)\rangle\,. \end{array} \right. \tag{3.10}$$

Avant de prouver ce résultat, nous faisons la

Remarque 3.2 Au sein de cette remarque, nous précisons le sens que nous donnons au problème (3.7), (3.8), (3.9), puis nous montrons qu'il est bien posé.
Introduisons trois régions : $R_1 = \{(x,E) \in \mathbb{O}\,, |E| < \sqrt{2u_m}\}$, $R_2 = \{(x,E) \in \mathbb{O}\,, E < -\sqrt{2u_m}\}$ et $R_3 = \{(x,E) \in \mathbb{O}\,, E > \sqrt{2u_m}\}$, et découplons le problème ci-dessus en trois sous-problèmes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t h = 0, \\ h_{|t=0} = h_{0\,|R_1}, \end{array} \right. \tag{3.11}$$

dans R_1,

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t h + \dfrac{E}{|E|\sigma(E)}\partial_x h + \dfrac{A}{|E|\sigma(E)}\partial_E h = 0, \\ h_{|t=0} = h_{0\,|R_2}, \end{array} \right. \tag{3.12}$$

dans R_2, et enfin dans R_3

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t h + \dfrac{E}{|E|\sigma(E)}\partial_x h + \dfrac{A}{|E|\sigma(E)}\partial_E h = 0, \\ h(t,x,\sqrt{2u_m}) = h_{|R_2}(t,x,-\sqrt{2u_m}), \\ h_{|t=0} = h_{0\,|R_3}. \end{array} \right. \tag{3.13}$$

Pour préciser le sens que nous donnons à chacun de ces problèmes, nous donnons leur formulation faible.
Nous dirons que h est solution de (3.11) si et seulement si elle vérifie

$$\int_{\mathbb{Q}} h\partial_t\psi\,|E|\sigma(E)d\mathbb{Q} = -\int_{\mathbb{O}} h_0\psi(0)\,|E|\sigma(E)d\mathbb{O}\,, \tag{3.14}$$

$\forall \psi \in C_0^1([0,T) \times R_1)$.
Cette formulation faible est clairement bien posée et (3.11) possède une unique solution.
De même, nous dirons que h est solution de (3.12), (3.13) si et seulement si

$$\int_{(0,T)\times(R_2\cup R_3)} h\left(|E|\sigma(E)\partial_t\psi + E\partial_x\psi + A\partial_E\psi\right)d\mathbb{Q} = -\int_{(R_2\cup R_3)} h_0\,|E|\sigma(E)d\mathbb{O}\,, \tag{3.15}$$

pour toute fonction $\psi \in C_0^1([0,T) \times \{(x,E), E^2 > 2u_m\})$, et si

$$h_{|R_3}(t,x,\sqrt{2u_m}) = h_{|R_2}(t,x,-\sqrt{2u_m}), \tag{3.16}$$

au sens des théorèmes de traces, qui s'appliquent ici car $|E|\sigma(E)$ est borné sur $\overline{R_2 \cup R_3}$.
Il est aisé de déduire l'estimation a priori suivante pour la solution de (3.15) :

$$||h||_{L^2(R_2 \cup R_3,\, |E|\sigma(E)dxdE)} \leq C||h_{0\,|R_2 \cup R_3}||_{L^2(R_2 \cup R_3,\, |E|\sigma(E)dxdE)}, \quad \forall t \leq T. \tag{3.17}$$

Cette dernière permet de conclure à l'existence (par des arguments de régularisation parce que $(|E|\sigma(E))^{-1}$ étant continue et non nulle sur $\overline{R_2 \cup R_3}$ le problème régularisé possède une solution), et à l'unicité du problème (3.12), (3.13).
Ainsi nous concluons que, au sens que nous lui avons donné, l'équation (3.7), (3.8), (3.9) possède une unique solution. ■

Démonstration du théorème 3.1 - Celle-ci consiste à introduire de judicieuses fonctions test permettant de déduire les formulations faibles (3.14) et (3.15).

Nous commençons par déduire la formulation faible (3.14). La méthode que nous utilisons est sans surprise par rapport à celle utilisée dans la section précédente.
Soit $\psi \in C_0^1([0,T) \times R_1)$, nous définissons dans le même esprit que précédemment

$$\varphi(t,x,E) = \frac{1}{2}\left(\psi(t,x,E) + \psi(t,x,-E)\right). \tag{3.18}$$

Nous avons aisément $\varphi(t,x,\mathcal{E}(y,\xi)) \in C_0^1([0,T) \times R_1)$ et qu'elle appartient à $\mathbb{K}$ pour tout x et t. Ainsi, en choisissant comme fonctions test $\varphi(t,x,\mathcal{E}(\frac{x}{\varepsilon},\xi))$, nous obtenons l'équation suivante sur le profil

$$\int_{\mathcal{Q}\times Y} F\left(\partial_t\varphi + \xi\partial_x\varphi + A\partial_\xi\varphi\right) d\mathcal{Q}dy = -\int_{\mathcal{O}\times Y} f_0\varphi(0)\, d\mathcal{O}dy. \tag{3.19}$$

En remplaçant F et φ par leur expression, nous avons

$$\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\int_{\mathcal{Q}\times Y} h(t,x,\mathcal{E}(y,\xi))(\partial_t + \xi\partial_x + A\partial_\xi)\left[\tfrac{1}{2}\left\{\psi(t,x,\mathcal{E}(y,\xi)) + \psi(t,x,\mathcal{E}(y,-\xi))\right\}\right] d\mathcal{Q}dy \\ \displaystyle = -\int_{\mathcal{O}\times Y} f_0(x,y,\xi)\left[\tfrac{1}{2}\left\{\psi(0,x,\mathcal{E}(y,\xi)) + \psi(0,x,\mathcal{E}(y,-\xi))\right\}\right] d\mathcal{O}dy, \end{array}\right. \tag{3.20}$$

En remarquant que $\partial_\xi(\psi(t,x,\mathcal{E}(y,\xi))) = \xi(\mathcal{E}(y,\xi))^{-1}\partial_E(\psi(t,x,\mathcal{E}(y,\xi))$ et en effectuant le changement de variables (2.29) qui transforme $\xi(\mathcal{E}(y,\xi))^{-1}$ en $|E|^{-1}\sqrt{E^2 - 2u(y)} = \frac{E}{|E|}d(y,E)$, (3.20) donne alors

$$\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\int_{\mathbb{Q}\times Y} h(t,x,E)(\partial_t + d(y,E)\partial_x + A\frac{d(y,E)}{E}\partial_E)\left[\tfrac{1}{2}\left\{\psi(t,x,E) + \psi(t,x,-E)\right\}\right] \\ \hfill |E|\sigma(y,E)d\mathbb{Q}\,dy \\ \displaystyle = -\int_{\mathbb{O}\times Y} f_0(x,y,d(y,E))\left[\tfrac{1}{2}\left\{\psi(0,x,E) + \psi(0,x,-E)\right\}\right]|E|\sigma(y,E)d\mathbb{O}\,dy. \end{array}\right. \tag{3.21}$$

Les formules (2.53) et (2.54) sont encore valables et de plus nous avons, grâce aux propriétés de parité de la fonction h et des autres fonctions,

$$\int_{\mathbb{O}\times Y} h(t,x,E)\frac{d(y,E)}{E}\,\partial_E\left[\frac{1}{2}\left\{\psi(t,x,E)+\psi(t,x,-E)\right\}\right]|E|\sigma(y,E)d\mathbb{Q}\,dy = 0. \quad (3.22)$$

Donc, en intégrant par rapport à y, (3.21) devient

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{\mathbb{Q}} h(t,x,E)\,\partial_t\psi(t,x,E)\,|E|\sigma(E)d\mathbb{Q} \\ \displaystyle= -\int_{\mathbb{O}} \psi(0,x,E)\frac{1}{2\sigma(E)}\left\langle (f_0(x,\cdot,d(\cdot,E))+f_0(x,\cdot,d(\cdot,-E)))\sigma(\cdot,E)\right\rangle |E|\sigma(E)d\mathbb{O}\,, \end{cases} \quad (3.23)$$

c'est à dire (3.14).

Cherchons maintenant à obtenir (3.15). Soient les fonctions $\psi\in C_0^1([0,T)\times\{(x,E),E^2>2u_m\})$ que nous prolongeons à R_1 par $\psi(t,x,E)=0$, $\forall(x,E)\in R_1$.
Les fonctions φ définies pour chaque ψ par $\varphi(t,x,y,\xi)=\psi(t,x,\mathcal{E}(y,\xi))$ appartiennent à $C_0^1([0,T);C_0^1(\mathcal{O};C_p^1(Y))\cap\mathbb{K}$. Ainsi, en utilisant dans la formulation faible (3.5) les fonctions oscillantes $\varphi(t,x,\frac{x}{\varepsilon},\xi)$, le terme contenant la contrainte disparait. Puis, en faisant tendre ε vers 0, nous obtenons comme précédemment

$$\int_{\mathcal{Q}\times Y} F\left(\partial_t\varphi+\xi\partial_x\varphi+A\partial_\xi\varphi\right)d\mathcal{Q}dy = -\int_{\mathcal{O}\times Y} f_0\varphi(0)\,d\mathcal{O}dy. \quad (3.24)$$

En effectuant ensuite le changement de variables (2.29), (3.24) donne

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{\mathbb{Q}\times Y} h(t,x,E)\,\left(\partial_t+d(y,E)\partial_x+A\frac{d(y,E)}{E}\partial_E\right)\psi(t,x,E)\,|E|\sigma(y,E)d\mathbb{Q}\,dy \\ \displaystyle= -\int_{\mathbb{O}\times Y} f_0(x,y,d(y,E))\psi(0,x,E)|E|\sigma(y,E)d\mathbb{O}\,dy. \end{cases} \quad (3.25)$$

Vu que dans la région R_1, $\psi\equiv 0$, l'intégration sur $(0,T)\times R_1\times Y$ donne 0. L'équation (3.25) devient donc

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{(0,T)\times(R_2\cup R_3)\times Y} h(t,x,E)\,\left(\partial_t+d(y,E)\partial_x+A\frac{d(y,E)}{E}\partial_E\right)\psi(t,x,E)\,|E|\sigma(y,E)d\mathbb{Q}\,dy \\ \displaystyle= -\int_{(R_2\cup R_3)\times Y} f_0(x,y,d(y,E))\psi(0,x,E)\,|E|\sigma(y,E)d\mathbb{O}\,dy. \end{cases} \quad (3.26)$$

Sachant que sur le domaine d'intégration, $d(y,E)\sigma(y,E)=E/|E|$, en intégrant (3.26) par rapport à y nous obtenons

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{(0,T)\times(R_2\cup R_3)} h(t,x,E)\left(|E|\sigma(E)\partial_t+E\partial_x+A\partial_E\right)\psi(t,x,E)\,d\mathbb{Q} \\ \displaystyle= -\int_{(R_2\cup R_3)} \frac{1}{\sigma(E)}\langle f_0(x,\cdot,d(\cdot,E))\sigma(\cdot,E)\rangle\psi(0,x,E)\,|E|\sigma(E)d\mathbb{O}\,, \end{cases} \quad (3.27)$$

qui est la formulation faible (3.15).

Pour achever la démonstration du théorème, il n'y a plus qu'à établir la condition de transmission (3.16). Pour cela, nous construisons des fonctions test comme suit. Pour toute fonction $\psi(t,x,E) \in C_0^1([0,T);\mathbb{O}\,)$ nous définissons

$$\tilde{\psi}^\delta(t,x,E) = \frac{\theta^\delta(E)}{2}\left(\psi(t,x,E)+\psi(t,x,-E)\right) + (1-\theta^\delta(E))\psi(t,x,E), \tag{3.28}$$

où $\theta^\delta(E)$ est une fonction continuement dérivable vérifiant $\theta^\delta(E)=1$ si $E^2 \le 2u_m$, et $\theta^\delta(E)=0$ si $E^2 \ge 2u_m+\delta$. Pour tout $\delta>0$, la fonction $\tilde{\psi}^\delta(t,x,E) \in C_0^1([0,T);\mathbb{O}\,)\cap \mathbb{K}$. En définissant ensuite $\varphi(t,x,y,\xi) = \tilde{\psi}^\delta(t,x,\mathcal{E}(y,\xi))$ et en utilisant comme fonction test dans la formulation faible (3.5) les fonctions oscillantes $\varphi(t,x,\frac{x}{\varepsilon},\xi)$, le terme contenant la contrainte disparait, et lorsque ε tend vers 0 nous obtenons

$$\int_{\mathcal{Q}\times Y} F\left(\partial_t\varphi + \xi\partial_x\varphi + A\partial_\xi\varphi\right) d\mathcal{Q}dy = -\int_{\mathcal{O}\times Y} f_0\varphi(0)\, d\mathcal{O}dy. \tag{3.29}$$

Nous remplaçons F et φ par leur expression et nous effectuons le changement de variables (2.29). L'équation (3.29) devient alors

$$\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\int_{\mathbb{Q}\,\times Y} h(t,x,E)(\partial_t + d(y,E)\partial_x + A\frac{d(y,E)}{E}\partial_E)\tilde{\psi}^\delta(t,x,E)\,|E|\sigma(y,E)d\mathbb{Q}\,dy \\ \displaystyle = -\int_{\mathbb{O}\,\times Y} f_0(x,y,d(y,E))\tilde{\psi}^\delta(0,x,E)|E|\sigma(y,E)d\mathbb{O}\,dy. \end{array}\right. \tag{3.30}$$

Sachant que dans la région R_1, $\partial_t h = 0$ et $d(y,E)$ est impaire en E, l'intégration sur $(0,T)\times R_1\times Y$ donne 0, et les intégrales de (3.30) se ramènent à des intégrales sur $(0,T)\times R_2\cup R_3\times Y$ et sur $R_2\cup R_3\times Y$. Donc en intégrant par rapport à y, nous obtenons

$$\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\int_{(0,T)\times(R_2\cup R_3)} h(t,x,E)\left(|E|\sigma(E)\partial_t + E\partial_x + A\partial_E\right)\tilde{\psi}^\delta(t,x,E)\,d\mathbb{Q} \\ \displaystyle = -\int_{(R_2\cup R_3)} \frac{1}{\sigma(E)}\langle f_0(x,\cdot,d(\cdot,E))\sigma(\cdot,E)\rangle\tilde{\psi}^\delta(0,x,E)\,|E|\sigma(E)d\mathbb{O}\,, \end{array}\right. \tag{3.31}$$

Nous calculons maintenant les dérivées par rapport à E de $\tilde{\psi}^\delta$ intervenant dans l'équation ci-dessus. Nous avons

$$\begin{aligned} \partial_E\tilde{\psi}^\delta &= \partial_E\left[\frac{\theta^\delta(E)}{2}\left(\psi(t,x,E)+\psi(t,x,-E)\right) + (1-\theta^\delta(E))\psi(t,x,E)\right] \\ &= \partial_E(\theta^\delta(E))\,\frac{1}{2}\left(\psi(t,x,E)+\psi(t,x,-E)\right) + \partial_E(1-\theta^\delta(E))\,\psi(t,x,E) \\ &\quad + \frac{\theta^\delta(E)}{2}\,\partial_E\left(\psi(t,x,E)+\psi(t,x,-E)\right) + (1-\theta^\delta(E))\,\partial_E\psi(t,x,E). \end{aligned} \tag{3.32}$$

Ainsi, lorsque le paramètre $\delta \to 0$, nous obtenons

$$\begin{aligned}
&(\theta^\delta(E)/2)\,\partial_E\left(\psi(t,x,E)+\psi(t,x,-E)\right)\to 0,\\
&(1-\theta^\delta(E))\,\partial_E\psi(t,x,E)\to\partial_E\psi(t,x,E),\\
&\partial_E\theta^\delta(E)\to\delta^D_{-\sqrt{2u_m}}-\delta^D_{\sqrt{2u_m}},\\
&\partial_E(1-\theta^\delta(E))\to-\delta^D_{-\sqrt{2u_m}}+\delta^D_{\sqrt{2u_m}},
\end{aligned}\tag{3.33}$$

où δ^D désigne la mesure de Dirac.

En appliquant les théorèmes de trace donnant un sens à $\int \delta^D_{E=\pm\sqrt{2u_m}} h(t,x,E)\,dx$, nous utilisons les formules (3.33) pour passer à la limite, lorsque $\delta \to 0$, dans l'équation (3.31). Nous avons alors

$$\left\{\begin{aligned}
&\int_{(0,T)\times\mathbb{R}}\frac{1}{2}h_{|R_2}(t,x,-\sqrt{2u_m})\left(\psi(t,x,\sqrt{2u_m})+\psi(t,x,-\sqrt{2u_m})\right)A dxdt\\
&\quad-\int_{(0,T)\times\mathbb{R}}h_{|R_2}(t,x,-\sqrt{2u_m})\psi(t,x,-\sqrt{2u_m})\,A dxdt\\
&\quad-\int_{(0,T)\times\mathbb{R}}\frac{1}{2}h_{|R_3}(t,x,\sqrt{2u_m})\left(\psi(t,x,\sqrt{2u_m})+\psi(t,x,-\sqrt{2u_m})\right)A dxdt\\
&\quad+\int_{(0,T)\times\mathbb{R}}h_{|R_3}(t,x,\sqrt{2u_m})\psi(t,x,\sqrt{2u_m})\,A dxdt\\
&\quad+\int_{(0,T)\times(R_2\cup R_3)}h(t,x,E)\left(|E|\sigma(E)\partial_t+E\partial_x+A\partial_E\right)\psi(t,x,E)\,d\mathbb{Q}\\
&=-\int_{(R_2\cup R_3)}\frac{1}{\sigma(E)}\langle f_0(x,\cdot,d(\cdot,E))\sigma(\cdot,E)\rangle\psi(0,x,E)\,|E|\sigma(E)d\mathbb{O}\,,
\end{aligned}\right.\tag{3.34}$$

Nous intégrons ensuite par parties la dernière intégrale du terme de gauche de l'équation (3.34). Vu l'équation satisfaite par h dans la région $R_2 \cup R_3$, il ne reste alors que les termes de bord, i.e.

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_{(0,T)\times\mathbb{R}}h_{|R_2}(t,x,-\sqrt{2u_m})\left(\psi(t,x,\sqrt{2u_m})+\psi(t,x,-\sqrt{2u_m})\right)A dxdt\\
&\quad-\int_{(0,T)\times\mathbb{R}}h_{|R_2}(t,x,-\sqrt{2u_m})\psi(t,x,-\sqrt{2u_m})\,A dxdt\\
&\quad-\frac{1}{2}\int_{(0,T)\times\mathbb{R}}h_{|R_3}(t,x,\sqrt{2u_m})\left(\psi(t,x,\sqrt{2u_m})+\psi(t,x,-\sqrt{2u_m})\right)A dxdt\\
&\quad+\int_{(0,T)\times\mathbb{R}}h_{|R_3}(t,x,\sqrt{2u_m})\psi(t,x,\sqrt{2u_m})\,A dxdt\\
&\quad+\int_{(0,T)\times\mathbb{R}}h_{|R_2}(t,x,-\sqrt{2u_m})\psi(t,x,-\sqrt{2u_m})\,A dxdt\\
&\quad-\int_{(0,T)\times\mathbb{R}}h_{|R_3}(t,x,\sqrt{2u_m})\psi(t,x,\sqrt{2u_m})\,A dxdt=0.
\end{aligned}\right.\tag{3.35}$$

La deuxième intégrale se simplifiant avec la cinquième et la troisième avec la sixième, de cette dernière équation nous déduisons

$$\int_{(0,T)\times\mathbb{R}} \left(h_{|R_3}(t,x,-\sqrt{2u_m}) - h_{|R_2}(t,x,-\sqrt{2u_m})\right) \left(\psi(t,x,\sqrt{2u_m}) + \psi(t,x,-\sqrt{2u_m})\right) dxdt = 0, \tag{3.36}$$

pour toute fonction $\psi \in C_0^1([0,T);\mathbb{O})$. Nous notons alors que pour toute fonction $\beta(t,x) \in C_0^1([0,T);\mathbb{R})$, il existe $\psi \in C_0^1([0,T);\mathbb{O})$ telle que $\beta(t,x) = \psi(t,x,-\sqrt{2u_m}) + \psi(t,x,\sqrt{2u_m})$. Ainsi, de (3.36) nous déduisons

$$\int \left(h_{|R_3}(t,x,\sqrt{2u_m}) - h_{|R_2}(t,x,-\sqrt{2u_m})\right) \beta(t,x)\, dtdx = 0, \tag{3.37}$$

$\forall \beta(t,x) \in C_0^1([0,T);\mathbb{R})$, prouvant la condition de transmission (3.16).
Le théorème est ainsi prouvé. ■

3.2 Cas d'une perturbation oscillante à action moyenne nulle sur les particules piégées

Le cas que nous étudions maintenant est une généralisation de l'étude effectuée dans la sous-section précédente. Nous supposons ici que le champ de force auquel les particules sont soumises, est la somme d'un champ dérivant d'un potentiel périodique généralisé $u^\varepsilon(x) = u(x, \frac{x}{\varepsilon})$ avec $u(x,y)$ $Y-$périodique en y, et d'un champ oscillant $B(x, \frac{x}{\varepsilon}, \xi)$. Comme précédemment, l'équation satisfaite par le profil est à deux phases avec des conditions de transmission.

Le problème que nous envisageons est le suivant :

$$\begin{cases} \partial_t f^\varepsilon + \xi \partial_x f^\varepsilon - \left(\partial_x u\left(x, \dfrac{x}{\varepsilon}\right) + \dfrac{1}{\varepsilon}\partial_y u\left(x, \dfrac{x}{\varepsilon}\right) - B\left(x, \dfrac{x}{\varepsilon}, \xi\right)\right) \partial_\xi f^\varepsilon = 0, \\ f^\varepsilon_{|t=0} = f^\varepsilon_0, \end{cases} \tag{3.38}$$

où la donnée initiale vérifie encore l'hypothèse (2.2). Nous supposons que le potentiel $u \in C^2(\mathbb{R}; (C^0_p(Y) \cap C^2([-1,1]))$ et qu'il vérifie une condition analogue à (2.3) :

$$0 \le u(x,\cdot) \le u_m^x < \infty,\ u(x,0) = 0,\ u(x,\pm 1) = u_m^x, \tag{3.39}$$

qui permet de déterminer les solutions de l'équation de contrainte.
Nous supposons de plus que

$$\partial_y u(x,-1) \neq 0 \text{ et } \partial_y u(x,1) \neq 0. \tag{3.40}$$

Nous supposons que le champ de force $B(x,y,\xi) \in C^1(\mathcal{O}; C^1_p(Y))$ et vérifie pour $E^2 \le 2u_m^x$

$$\begin{array}{l} B(x,y,d(x,y,E)) \text{ est pair,} \\ \text{ou } \langle B(x,\cdot,d(x,\cdot,E)\mathcal{X}(E^2 - 2u(\cdot)))\rangle = 0, \end{array} \tag{3.41}$$

avec $d(x,y,\xi)$ définie dans la suite. Cette hypothèse assure que l'influence moyenne du champ B sur les particules piégées est nulle.
Nous supposons également que $\langle B(x,\cdot,d(x,\cdot,E))\rangle$ est continuement dérivable pour $E \geq 2u_m^x$.

Nous déduisons en premier lieu l'équation de contrainte. La formulation faible de (3.38) étant

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{Q}} f^\varepsilon \left(\partial_t\psi^\varepsilon + \xi\partial_x\psi^\varepsilon - \partial_x u\left(x,\frac{x}{\varepsilon}\right)\partial_\xi\psi^\varepsilon + \partial_\xi\left[B\left(x,\frac{x}{\varepsilon},\xi\right)\psi^\varepsilon\right]\right) d\mathcal{Q} \\ +\frac{1}{\varepsilon}\int_{\mathcal{Q}} f^\varepsilon\left(\xi\partial_y\psi^\varepsilon - \partial_y u\left(x,\frac{x}{\varepsilon}\right)\partial_\xi\psi^\varepsilon\right) d\mathcal{Q} = -\int_{\mathcal{O}} f_0^\varepsilon\psi^\varepsilon(o)\, d\mathcal{O},\end{aligned} \tag{3.42}$$

pour toute fonction test oscillante $\psi^\varepsilon \equiv \psi(t,x,\frac{x}{\varepsilon},\xi)$ régulière et $Y-$périodique en y, nous obtenons comme précédemment que l'équation de contrainte sur le profil est

$$\xi\partial_y F - \partial_y u(x,y)\partial_\xi F = 0. \tag{3.43}$$

La différence (importante) avec les équations de contrainte que nous avions déduites des problèmes ci-dessus, est qu'elle est ici paramétrée par x.
Ainsi, en définissant

$$\sigma(x,y,E) = (E^2 - 2u(x,y))^{-1/2} \text{ pour } E^2 > 2u(x,y),\ 0 \text{ ailleurs}, \tag{3.44}$$

et

$$\sigma(x,E) = \langle\sigma(x,\cdot,E)\rangle, \tag{3.45}$$

nous déduisons du lemme 2.4 et de son corollaire 2.10 le

Théorème 3.3 *Sous les hypothèses (2.2) et (3.39), il existe une fonction $h(t,x,E)$ $\in L^\infty(0,T;L^2(I\!R\times I\!R,|E|\sigma(x,E)dxdE))$, $h(t,x,E) = h(t,x,-E)$ pour $E^2 < 2u_m^x$ telle que*

$$F(t,x,y,\xi) = h(t,x,\mathcal{E}(x,y,\xi)). \tag{3.46}$$

Nous avons utilisé ici une nouvelle fonction $\mathcal{E}$, adaptée au cadre actuel, définie par

$$\mathcal{E}(x,y,\xi) := \frac{\xi}{|\xi|}\sqrt{\xi^2 + 2u(x,y)}. \tag{3.47}$$

Pour obtenir ce résultat, il suffit de reprendre la démonstration du lemme 2.4 en considérant x comme un paramètre.

Ce résultat établi, nous nous intéressons au comportement de h. Pour déduire l'équation satisfaite par h, nous allons construire (en nous inspirant de la section 1) des fonctions test appartenant à $\mathbb{K}_x$, où $\mathbb{K}_x$ est ici paramétré par x et défini par

$$\mathbb{K}_x = \{v \in L^2(\mathbb{R};L_p^2(Y)),\ \xi\partial_y v - \partial_y u(x,y)\partial_\xi v = 0 \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}\times\mathbb{R})\}. \tag{3.48}$$

Tirant les enseignements de l'étude effectuée dans la sous-section précédente, nous nous attendons à obtenir un problème à deux phases. Nous partitionnons alors au préalable le domaine d'étude et nous utilisons des fonctions test permettant de déduire les conditions de transmission.

Trois régions de l'ensemble $\mathbb{O}$ interviennent dans la suite,

$$\begin{cases} R_1 = \{(x,E) \in \mathbb{O}\,, |E| < \sqrt{2u_m^x}\} \\ R_2 = \{(x,E) \in \mathbb{O}\,, E < -\sqrt{2u_m^x}\} \\ R_3 = \{(x,E) \in \mathbb{O}\,, E > \sqrt{2u_m^x}\} \end{cases} \tag{3.49}$$

Nous commençons par tirer l'équation satisfaite par h dans la région R_1. Pour cela, définissons à partir de toute fonction $\psi(t,x,E) \in C_0^1([0,T) \times R_1)$,

$$\varphi(t,x,E) = \frac{1}{2}\left(\psi(t,x,E) + \psi(t,x,-E)\right). \tag{3.50}$$

Pour tout x fixé, la fonction $\varphi(t,x,\mathcal{E}(x,y,\xi)) \in \mathbb{K}_x$. Ainsi, en utilisant dans la formulation faible la fonction $\varphi(t,x,\mathcal{E}(x,\frac{x}{\varepsilon},\xi))$, nous obtenons l'équation suivante sur F,

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{Q}\times Y} F\left(\partial_t\varphi + \xi\partial_x\varphi - \partial_x u(x,y)\partial_\xi\varphi + \partial_\xi[B(x,y,\xi)\varphi]\right) d\mathcal{Q}dy \\ = \int_{\mathcal{O}\times Y} f_0\varphi(0)\, d\mathcal{O}dy. \end{aligned} \tag{3.51}$$

Remplaçons alors F et φ par leur expression, (3.51) devient

$$\left\{ \begin{aligned} &\int_{\mathcal{Q}\times Y} h(t,x,\mathcal{E}(y,\xi))(\partial_t + \xi\partial_x - \partial_x u\,\partial_\xi)\left[\tfrac{1}{2}\left\{\psi(t,x,\mathcal{E}(y,\xi)) + \psi(t,x,\mathcal{E}(y,-\xi))\right\}\right] d\mathcal{Q}dy \\ &\quad + \int_{\mathcal{Q}\times Y} h(t,x,\mathcal{E}(y,\xi))\partial_\xi\left[B(x,y,\xi)\tfrac{1}{2}\left\{\psi(t,x,\mathcal{E}(y,\xi)) + \psi(t,x,\mathcal{E}(y,-\xi))\right\}\right] d\mathcal{Q}dy \\ &\qquad = -\int_{\mathcal{O}\times Y} f_0(x,y,\xi)\left[\tfrac{1}{2}\left\{\psi(0,x,\mathcal{E}(y,\xi)) + \psi(0,x,\mathcal{E}(y,-\xi))\right\}\right] d\mathcal{O}dy. \end{aligned} \right. \tag{3.52}$$

Sachant que

$$\begin{aligned} &\partial_x\left\{\psi(t,x,\mathcal{E}(x,y,\xi)) + \psi(t,x,\mathcal{E}(x,y,-\xi))\right\} \\ &\quad = \frac{\partial_x u(x,y)}{\frac{\xi}{|\xi|}\sqrt{\xi^2 + 2u(x,y)}}\left\{\partial_E\psi(t,x,\mathcal{E}(x,y,\xi)) + \partial_E\psi(t,x,\mathcal{E}(x,y,-\xi))\right\} \\ &\qquad + \left\{\partial_x\psi(t,x,\mathcal{E}(x,y,\xi)) + \partial_x\psi(t,x,\mathcal{E}(x,y,-\xi))\right\} \end{aligned} \tag{3.53}$$

et

$$\begin{aligned} &\partial_\xi\left\{(\psi(t,x,\mathcal{E}(x,y,\xi) + \psi(t,x,\mathcal{E}(x,y,-\xi)))\right\} = \\ &\frac{\xi}{\frac{\xi}{|\xi|}\sqrt{\xi^2 + 2u(x,y)}}\left\{\partial_E\psi(t,x,\mathcal{E}(x,y,\xi) + \partial_E\psi(t,x,\mathcal{E}(x,y,-\xi))\right\}, \end{aligned} \tag{3.54}$$

nous considérons le changement de variables $(x,y,\xi)\in\mathcal{O}\times Y\to\{(x,y,E)\in\mathbb{O}\times Y,$ $E^2-2u(x,y)\geq 0\}$ défini par $E=\mathcal{E}(x,y,\xi)$ dont l'inverse est donné par

$$\xi = d(x,y,E) = \frac{E}{|E|}\sqrt{E^2-2u(x,y)}. \tag{3.55}$$

Nous avons

$$\begin{array}{rcl} dxdyd\xi & = & |E|\mathcal{X}(E^2-2u(x,y))\,(E^2-2u(x,y))^{-1/2}\,dxdydE, \\ & & |E|\sigma(x,y,E)\,dxdydE. \end{array} \tag{3.56}$$

En effectuant ce changement de variables, $\partial_x u\,\frac{\xi}{|\xi|}\,(\xi^2+2u(x,y))^{-1/2}$ devient $\partial_x u/E$ et $\xi\frac{\xi}{|\xi|}\,(\xi^2+2u(x,y))^{-1/2}$ devient $d(x,y,E)/E$. Ainsi de (3.52) nous obtenons

$$\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\int_{\mathbb{Q}\times Y} h(t,x,E)\left(\partial_t + d(y,E)\partial_x + \frac{d(x,y,E)}{E}\partial_x u\partial_E - \frac{d(x,y,E)}{E}\partial_x u\partial_E\right) \\ \hfill \displaystyle\left[\frac{1}{2}\left\{\psi(t,x,E)+\psi(t,x,-E)\right\}\right]|E|\sigma(x,y,E)d\mathbb{Q}\,dy \\ \displaystyle +\int_{\mathbb{Q}\times Y} h(t,x,E)\frac{d(x,y,E)}{E}\partial_E\left[B(x,y,d(x,y,E))\frac{1}{2}\left\{\psi(t,x,E)+\psi(t,x,-E)\right\}\right] \\ \hfill |E|\sigma(x,y,E)d\mathbb{Q}\,dy \\ \displaystyle = -\int_{\mathbb{O}\times Y} f_0(x,y,d(x,y,E))\left[\frac{1}{2}\left\{\psi(0,x,E)+\psi(0,x,-E)\right\}\right]|E|\sigma(x,y,E)d\mathbb{O}\,dy. \end{array}\right. \tag{3.57}$$

Dans la première intégrale, les termes de dérivation en E s'annulent. De plus, vu la parité de B, l'intégrande de la deuxième intégrale est une fonction impaire de E. Cette intégrale est donc nulle. Ainsi, en appliquant les formules (2.53) et (2.54) et en intégrant par rapport à y, nous obtenons

$$\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\int_{\mathbb{Q}} h(t,x,E)\,\partial_t\psi(t,x,E)\,|E|\sigma(x,E)d\mathbb{Q} \\ \displaystyle = -\frac{1}{2}\int_{\mathbb{O}} \psi(0,x,E)\frac{1}{\sigma(x,E)}\left\langle (f_0(x,\cdot,d(x,\cdot,E)) + f_0(x,\cdot,d(x,\cdot,-E)))\sigma(x,\cdot,E)\right\rangle \\ \hfill \sigma(x,E)|E|d\mathbb{O}\,, \end{array}\right. \tag{3.58}$$

$\forall\psi$ régulière à support compact dans $[0,T)\times R_1$. Nous déduisons alors que h vérifie dans R_1

$$\left\{\begin{array}{l} \partial_t h = 0 \\ \displaystyle h_{|t=0} = h_{01} := \frac{1}{2\sigma(x,E)}\left\langle\{f_0(x,\cdot,d(x,\cdot,E)) + f_0(x,\cdot,d(x,\cdot,E))\}\sigma(x,\cdot,E)\right\rangle. \end{array}\right. \tag{3.59}$$

Nous allons maintenant chercher l'équation satisfaite par h dans la région $R_2\cup R_3$. Considérons pour cela les fonctions $\psi(t,x,E)\in C_0^1([0,T)\times R_2\cup R_3)$ que nous prolongeons à R_1 par $\psi(t,x,E)=0$ pour tout $|E|<|E_0|$.

Ainsi, la fonction ψ est continuement dérivable et à support compact. De plus, elle appartient à $\mathbb{K}_x$ pour tout x. En utilisant alors $\psi(t, x, \mathcal{E}(x, \frac{x}{\varepsilon}, \xi))$ comme fonction test dans (3.42), en faisant tendre $\varepsilon \to 0$, puis en effectuant le changement de variables ci-dessus, nous obtenons

$$\left\{\begin{aligned} &\int_{\mathbb{Q}\times Y} h(t,x,E)(\partial_t + d(x,y,E)\partial_x)\psi(t,x,E)\,|E|\sigma(x,y,E)d\mathbb{Q}\,dy \\ &+\int_{\mathbb{Q}\times Y} h(t,x,E)\frac{d(x,y,E)}{E}\partial_E[B(x,y,d(x,y,E))\psi(t,x,E)]\,|E|\sigma(x,y,E)d\mathbb{Q}\,dy \\ &\qquad\qquad = -\int_{\mathbb{O}\times Y} f_0(x,y,d(x,y,E))\psi(0,x,E)\,|E|\sigma(x,y,E)d\mathbb{O}\,dy. \end{aligned}\right. \tag{3.60}$$

Sachant que dans R_1, la fonction $\psi \equiv 0$, les intégrales de (3.60) se ramènent à des intégrales sur $(0,T)\times$ $(R_2 \cup R_3)\times$ Y.
Ainsi, en intégrant (3.60) par rapport à y, sachant que $d(x,y,E)|E|\sigma(x,y,E) = E$ sur le domaine d'intégration, nous obtenons

$$\left\{\begin{aligned} &\int_{(0,T)\times(R_2\cup R_3)} h(t,x,E)\partial_t\psi(t,x,E)|E|\sigma(x,E)d\mathbb{Q} \\ &\qquad +\int_{(0,T)\times(R_2\cup R_3)} h(t,x,E)\partial_x\psi(t,x,E)E d\mathbb{Q} \\ &\qquad +\int_{(0,T)\times(R_2\cup R_3)} h(t,x,E)\partial_E\left[\langle B(x,\cdot,d(x,\cdot,E))\rangle\psi(t,x,E)\right]d\mathbb{Q} \\ &= -\int_{(R_2\cup R_3)} \frac{1}{\sigma(x,E)}\left\langle f_0(x,\cdot,d(x,\cdot,E))\sigma(x,\cdot,E)\right\rangle \psi(0,x,E)|E|\sigma(x,E)d\mathbb{O}\,. \end{aligned}\right. \tag{3.61}$$

Nous reconnaissons alors une formulation faible du problème suivant

$$\left\{\begin{aligned} &\partial_t h + \frac{E}{|E|\sigma(x,E)}\partial_x h + \frac{\langle B(x,\cdot,d(x,\cdot,E))\rangle}{|E|\sigma(x,E)}\partial_E h = 0 \text{ sur } R_2\cup R_3, \\ &h_{|t=0} = h_{023} := \frac{1}{\sigma(x,E)}\left\langle f_0(x,\cdot,d(x,\cdot,E))\sigma(x,\cdot,E)\right\rangle. \end{aligned}\right. \tag{3.62}$$

Nous établissons maintenant les conditions de transmission à ajouter à (3.62) pour que ce problème devienne bien posé. Pour cela nous construisons des fonctions test $\tilde{\psi}^\delta$ de la manière suivante. Considérons $\theta^\delta(x,E)$ une suite de fonctions continuement dérivables et vérifiant $\theta^\delta(x,E) = 1$ si $E^2 \leq 2u_m^x$, et $\theta^\delta(x,E) = 0$ si $E^2 \geq 2u_m^x + \delta$. Puis, pour toute fonction $\psi(t,x,E) \in C_0^1([0,T);\mathbb{O})$ définissons

$$\tilde{\psi}^\delta(t,x,E) = \frac{\theta^\delta(x,E)}{2}\left(\psi(t,x,E) + \psi(t,x,-E)\right) + (1-\theta^\delta(x,E))\psi(t,x,E). \tag{3.63}$$

Les fonction $\tilde{\psi}^\delta \in C_0^1([0,T);\mathbb{O}) \cap \mathbb{K}_x$. Nous utilisons alors $\tilde{\psi}^\delta(t,x,\mathcal{E}(x,\frac{x}{\varepsilon},\xi))$ comme fonction test, et comme précédemment, nous obtenons

$$\left\{\begin{aligned} &\int_{\mathbb{Q}\times Y} h(t,x,E)(\partial_t + d(x,y,E)\partial_x)\tilde{\psi}^\delta(t,x,E)\,|E|\sigma(x,y,E)d\mathbb{Q}\,dy \\ &+\int_{\mathbb{Q}\times Y} h(t,x,E)\frac{d(x,y,E)}{E}\partial_E[B(x,y,d(x,y,E))\tilde{\psi}^\delta(t,x,E)]\,|E|\sigma(x,y,E)d\mathbb{Q}\,dy \\ &\qquad\qquad = -\int_{\mathbb{O}\times Y} f_0(x,y,d(x,y,E))\tilde{\psi}^\delta(0,x,E)\,|E|\sigma(x,y,E)d\mathbb{O}\,dy. \end{aligned}\right. \tag{3.64}$$

Sachant que sur R_1, $\partial_t h = 0$, que $d(x,y,E)$ est impaire en E, et vu la parité de B, les intégrales de (3.60) se ramènent à des intégrales sur $(0,T)\times$ $(R_2\cup R_3)\times$ Y. En intégrant alors (3.60) par rapport à y, sachant que $d(x,y,E)|E|\sigma(x,y,E) = E$ sur le domaine d'intégration, nous obtenons

$$\left\{\begin{aligned} &\int_{(0,T)\times(R_2\cup R_3)} h(t,x,E)\partial_t\tilde{\psi}^\delta(t,x,E)\,|E|\sigma(x,E)d\mathbb{Q} \\ &\qquad+\int_{(0,T)\times(R_2\cup R_3)} h(t,x,E)\partial_x\tilde{\psi}^\delta(t,x,E)\,Ed\mathbb{Q} \\ &\qquad+\int_{(0,T)\times(R_2\cup R_3)} h(t,x,E)\,\partial_E\Big[\langle B(x,\cdot,d(x,\cdot,E))\rangle\tilde{\psi}^\delta(t,x,E)\Big]\,d\mathbb{Q} \\ &= -\int_{(R_2\cup R_3)} \frac{1}{\sigma(x,E)}\,\langle f_0(x,\cdot,d(x,\cdot,E))\sigma(x,\cdot,E)\rangle\,\tilde{\psi}^\delta(0,x,E)\,|E|\sigma(x,E)d\mathbb{O}\,. \end{aligned}\right. \tag{3.65}$$

Nous remplaçons maintenant $\tilde{\psi}^\delta$ par son expression en fonction de ψ. L'équation (3.65) devient alors

$$\left\{\begin{aligned} &\int_{(0,T)\times(R_2\cup R_3)} \big[E\partial_x(\theta^\delta(x,E)) + \langle B(x,\cdot,d(x,\cdot,E))\rangle\partial_E(\theta^\delta(x,E))\big] \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \frac{1}{2}\,(\psi(t,x,E)+\psi(t,x,-E))\,h(t,x,E)\,d\mathbb{Q} \\ &\quad+\int_{(0,T)\times(R_2\cup R_3)} \big[E\partial_x(1-\theta^\delta(x,E)) + \langle B(x,\cdot,d(x,\cdot,E))\rangle\partial_E(1-\theta^\delta(x,E))\big] \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \psi(t,x,E)h(t,x,E)\,d\mathbb{Q} \\ &\quad+\int_{(0,T)\times(R_2\cup R_3)} h(t,x,E)(1-\theta^\delta(x,E))\partial_t\psi(t,x,E)\,|E|\sigma(x,E)d\mathbb{Q} \\ &\quad+\int_{(0,T)\times(R_2\cup R_3)} h(t,x,E)(1-\theta^\delta(x,E))\partial_x\psi(t,x,E)\,Ed\mathbb{Q} \\ &\quad+\int_{(0,T)\times(R_2\cup R_3)} h(t,x,E)(1-\theta^\delta(x,E))\,\partial_E[\langle B(x,\cdot,d(x,\cdot,E))\rangle\psi(t,x,E)]\,d\mathbb{Q} \\ &\quad+\int_{(0,T)\times(R_2\cup R_3)} (\theta^\delta(x,E))h(t,x,E)\,\tfrac{1}{2}\Big[(\sigma(x,E)\partial_t + \tfrac{E}{|E|}\partial_x)(\psi(t,x,E)+\psi(t,x,-E)) \\ &\qquad\qquad\qquad +\partial_E\left[\langle B(x,\cdot,d(x,\cdot,E))\rangle(\psi(t,x,E)+\psi(t,x,-E))\right]\Big]\,|E|d\mathbb{Q} \\ &= -\int_{(R_2\cup R_3)} \frac{\theta^\delta(x,E)}{\sigma(x,E)}\,\langle f_0(x,\cdot,d(x,\cdot,E))\sigma(x,\cdot,E)\rangle\,\psi(0,x,E)\,|E|\sigma(x,E)d\mathbb{O}\,. \end{aligned}\right. \tag{3.66}$$

Nous faisons maintenant tendre δ vers 0. Sachant que $\theta^\delta \to 0$, il est aisé d'obtenir la limite des troisième, quatrième, cinquième et sixième intégrales ainsi que celle du membre de droite. Pour obtenir la limite des deux premières intégrales, nous utilisons le théorème de trace qui est valide, car grâce à l'hypothèse (3.40), le coefficient $\sigma(x,E) < \infty$. Nous obtenons ainsi,

$$\left\{\begin{aligned}&\int_{(0,T)\times\partial_{R_2\cup R_3}} \frac{1}{2}\left(\psi(t,x,E)+\psi(t,x,-E)\right) h_{|R_2\cup R_3}(t,x,E)\, S(x,E)ds \\ &\qquad -\int_{(0,T)\times\partial_{R_2\cup R_3}} \psi(t,x,E) h_{|R_2\cup R_3}(t,x,E)\, S(x,E)ds \\ &\qquad +\int_{(0,T)\times(R_2\cup R_3)} h(t,x,E)\partial_t\psi(t,x,E)|E|\sigma(x,E)d\mathbb{Q} \\ &\qquad +\int_{(0,T)\times(R_2\cup R_3)} h(t,x,E)\partial_x\psi(t,x,E)E d\mathbb{Q} \\ &\qquad +\int_{(0,T)\times(R_2\cup R_3)} h(t,x,E)\partial_E\left[\langle B(x,\cdot,d(x,\cdot,E))\rangle\psi(t,x,E)\right]d\mathbb{Q} \\ &= -\int_{(R_2\cup R_3)} \frac{1}{\sigma(x,E)}\left\langle f_0(x,\cdot,d(x,\cdot,E))\sigma(x,\cdot,E)\right\rangle \psi(0,x,E)|E|\sigma(x,E)d\mathbb{O}\,,\end{aligned}\right. \tag{3.67}$$

où $S(x,E) = (E, \langle B(x,\cdot,d(x,\cdot,E))\rangle)\cdot n(x,E)$ avec $n(x,E)$ la normale extérieure à $R_2\cup R_3$ et où ds désigne la mesure induite sur $\partial_{R_2\cup R_3}$.
Nous intégrons alors par partie les trois dernières intégrales du membre de gauche de (3.67). Vu l'équation satisfaite par h dans $R_2\cup R_3$ les termes autres que les termes de bord sont nuls. De plus, les termes de bord s'annulent avec la seconde intégrale de (3.67). Nous déduisons alors

$$\int_{(0,T)\times\partial_{R_2\cup R_3}} \frac{1}{2}\left(\psi(t,x,E)+\psi(t,x,-E)\right) h_{|R_2\cup R_3}(t,x,E)\, S(x,E)ds = 0. \tag{3.68}$$

Or, vu les hypothèses effectuées sur le champ B, le terme $S(x,-E) = -S(x,E)$ pour tout $(x,E)\in\partial_{R_2\cup R_3}$ et ainsi, de l'équation (3.68) nous déduisons

$$\begin{aligned}&\int_{(0,T)\times\partial_{R_2\cup R_3}} \psi(t,x,E)h_{|R_2\cup R_3}(t,x,E)\, S(x,E)ds = \\ &\qquad\qquad \int_{(0,T)\times\partial_{R_2\cup R_3}} \psi(t,x,E)h_{|R_2\cup R_3}(t,x,-E)\, S(x,E)ds\end{aligned} \tag{3.69}$$

prouvant la condition de transmission

$$S(x,E)h_{|R_2\cup R_3}(t,x,E) = S(x,E)h_{|R_2\cup R_3}(t,x,-E) \text{ sur } \partial_{R_2\cup R_3}. \tag{3.70}$$

Ainsi, sur $R_2\cup R_3$ la fonction h vérifie

$$\left\{\begin{aligned}&\partial_t h + \frac{E}{|E|\sigma(x,E)}\partial_x h + \frac{\langle B(x,\cdot,d(x,\cdot,E))\rangle}{|E|\sigma(x,E)}\partial_E h = 0 \text{ sur } R_2\cup R_3, \\ &S(x,E)h(t,x,E) = S(x,E)h(t,x,-E) \text{ sur } \partial_{R_2\cup R_3}, \\ &h_{|t=0} = h_{023} := \frac{1}{\sigma(x,E)}\left\langle f_0(x,\cdot,d(x,\cdot,E))\sigma(x,\cdot,E)\right\rangle.\end{aligned}\right. \tag{3.71}$$

Nous venons donc de prouver le théorème suivant

Théorème 3.4 *Sous les hypothèses (2.2), (3.39), (3.40) et (3.41), le profil F associé à f^ε s'écrit $F(t,x,y,\xi) = h(t,x,\mathcal{E}(x,y,\xi))$ où la fonction h est l'unique solution du problème suivant*

$$\begin{cases} \partial_t h = 0, \\ h_{|t=0} = h_{01}, \end{cases} \tag{3.72}$$

dans R_1,

$$\begin{cases} \partial_t h + \dfrac{E}{|E|\sigma(E)}\partial_x h + \dfrac{\overline{B}(x,E)}{|E|\sigma(E)}\partial_E h = 0, \\ S(x,E)h(t,x,E) = S(x,E)h(t,x,-E) \text{ sur } \partial_{R_2\cup R_3}, \\ h_{|t=0} = h_{023} \end{cases} \tag{3.73}$$

dans $R_2 \cup R_3$, où $\overline{B}(x,E) = \langle B(x,\cdot,d(x,\cdot,E))\rangle$ et où $S(x,E) = (E,\overline{B}(x,E))\cdot n(x,E)$, avec $n(x,E)$ la normale extérieure à $R_2\cup R_3$ en $(x,E)\in\partial_{R_2\cup R_3}$.

Interprétons maintenant ce résultat.
Considérons une particule en un point x_0 avec une énergie E_0 donnée. Si $|E_0|$ est trop petite (inférieure à une certaine énergie critique), elle oscille autour de sa position d'origine. Vu les hypothèses effectuées sur B pour les énergies petites, son action moyenne sur une particule au cours d'une oscillation est nulle. Donc, l'énergie de la particule ne peut augmenter sous son effet, et cette dernière oscille alors indéfiniment. Ce mouvement (dont l'échelle typique est l'échelle microscopique) ne se voit plus à l'échelle macroscopique, ce qui explique (3.72).
Notons ici que l'énergie critique au dessous de laquelle une particule oscille dépend de la position x.
Si en revanche, une particule est en x_0 avec une énergie supérieure à l'énergie critique elle peut se déplacer et son mouvement est influencé par la valeur moyenne du champ B (c.f (3.73.a)). S'il se trouve sur sa trajectoire un point x_1 où l'énergie critique est supérieure à son énergie, l'effet du champ oscillant lui fait faire demi-tour. Cet effet se traduit par la condition de transmission (3.73.b).

3.3 Cas d'une perturbation oscillante à action moyenne non nulle sur les particules piégées

Nous étudions maintenant le cas complémentaire du précédent. C'est à dire que nous remplaçons l'hypothèse (3.41) par

$$\begin{array}{l} B(x,y,d(x,y,E)) \text{ n'est pas pair en } E, \\ \text{et } \langle B(x,\cdot,d(x,\cdot,E)\mathcal{X}(\mathcal{E}^{\in} - \in\sqcap(\cdot))\rangle \neq \prime, \end{array} \tag{3.74}$$

lorsque $E^2 \leq 2u_m$.
Dans ce cas, l'effet moyen du champ

$$B_I = \frac{1}{2}\left(B(x,y,d(x,y,E)) - B(x,y,d(x,y,-E))\right) \tag{3.75}$$

fait varier l'énergie des particules piégées. Celle ci peuvent alors être réémises. De plus, si une particule atteint l'énergie critique, elle peut être piégée.
Ainsi, nous avons le

Théorème 3.5 *Sous les hypothèses (2.2), (3.39) et (3.74) la fonction h est solution du problème suivant*

$$\begin{cases} \partial_t h + \dfrac{\overline{B}_I(x,E)}{|E|\sigma(x,E)}\partial_E h = 0, \\ h_{|t=0} = h_{01}, \end{cases} \tag{3.76}$$

dans R_1, avec $\overline{B}_I(x,E) = \langle B_I(x,\cdot,d(x,\cdot,E))\mathcal{X}(\mathcal{E}^{\in} - \in\sqcap(\cdot))\rangle$, et

$$\begin{cases} \partial_t h + \dfrac{E}{|E|\sigma(x,E)}\partial_x h + \dfrac{\overline{B}(x,E)}{|E|\sigma(x,E)}\partial_E h = 0, \\ h_{|t=0} = h_{023} \end{cases} \tag{3.77}$$

dans R_2 et R_3, où $\overline{B}(x,E) = \langle B(x,\cdot,d(x,\cdot,E))\rangle$, avec la condition de transmission

$$\begin{aligned} S(x,E)h_{|R_2\cup R_3}(t,x,E) + S(x,-E)h_{|R_2\cup R_3}(t,x,-E) \\ -2\overline{B}_I(x,E)n_E(x,E)h_{|R_1}(t,x,E) = 0, \end{aligned} \tag{3.78}$$

$\forall (x,E) \in \partial_{R_1} = \partial_{R_2\cup R_3}$, où $S(x,E) = (E,\overline{B}(x,E))\cdot n(x,E)$, $n(x,E)$ désignant la normale extérieure à $R_2\cup R_3$ en $\partial_{R_2\cup R_3}$ et où $n_E(x,E)$ désigne la composante du vecteur $n(x,E)$ dans la direction E.

Démonstration - Nous commençons par tirer l'équation satisfaite par h dans la région R_1. Pour cela, nous définissons à partir de toute fonction $\psi(t,x,E) \in C_0^1([0,T)\times R_1)$,

$$\varphi(t,x,E) = \frac{1}{2}\left(\psi(t,x,E) + \psi(t,x,-E)\right). \tag{3.79}$$

Pour tout x fixé, la fonction $\varphi(t,x,\mathcal{E}(x,y,E)) \in \mathbb{K}_x$. Ainsi, en utilisant dans la formulation faible la fonction $\varphi(t,x,\mathcal{E}(x,\frac{x}{\varepsilon},E))$, nous obtenons l'équation suivante sur F,

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{Q}\times Y} F\left(\partial_t\varphi + \xi\partial_x\varphi - \partial_x u(x,y)\partial_\xi\varphi + \partial_\xi[B(x,y,\xi)\varphi]\right) d\mathcal{Q}dy \\ = \int_{\mathcal{O}\times Y} f_0\varphi(0)\, d\mathcal{O}dy. \end{aligned} \tag{3.80}$$

En procédant de la même manière que précédemment, cette dernière équation devient

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{\mathbb{Q}\times Y} h(t,x,E)\left(\partial_t + d(x,y,E)\partial_x\right)\left[\frac{1}{2}\left\{\psi(t,x,E) + \psi(t,x,-E)\right\}\right]|E|\sigma(x,y,E)d\mathbb{Q}\,dy \\ \displaystyle+\int_{\mathbb{Q}\times Y} h(t,x,E)\frac{d(x,y,E)}{E}\partial_E\left[B(x,y,d(x,y,E))\frac{1}{2}\left\{\psi(t,x,E) + \psi(t,x,-E)\right\}\right] \\ \qquad\qquad |E|\sigma(x,y,E)d\mathbb{Q}\,dy \\ \displaystyle= -\int_{\mathbb{O}\times Y} f_0(x,y,d(x,y,E))\left[\frac{1}{2}\left\{\psi(0,x,E) + \psi(0,x,-E)\right\}\right]|E|\sigma(x,y,E)d\mathbb{O}\,dy. \end{cases} \tag{3.81}$$

Dans le cas présent, le champ B vérifiant l'hypothèse (3.74) la deuxième intégrale n'est plus nulle, mais nous avons

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{Q}\times Y} h(t,x,E)\frac{d(x,y,E)}{E}\partial_E\Big[B(t,x,d(x,y,E))\frac{1}{2}\left\{\psi(t,x,E)+\psi(t,x,-E)\right\}\Big]\\ |E|\sigma(x,y,E)d\mathbb{Q}\,dy\\ =\int_{\mathbb{Q}\times Y} h(t,x,E)\frac{d(x,y,E)}{E}\partial_E[B_I(t,x,d(x,y,E))\psi(t,x,E)]\\ |E|\sigma(x,y,E)d\mathbb{Q}\,dy.\end{aligned} \tag{3.82}$$

Puis, en appliquant les formules (2.53) et (2.54) et en intégrant par rapport à y, nous obtenons

$$\left\{\begin{aligned}&\int_{\mathbb{Q}} h(t,x,E)\left(|E|\sigma(x,E)\partial_t\psi(t,x,E)+\partial_E\big[\overline{B}_I(x,E)\psi(t,x,E)\big]\right)d\mathbb{Q}\\ &=-\int_{\mathbb{O}}\psi(0,x,E)\frac{1}{2\sigma(x,E)}\left\langle(f_0(x,\cdot,d(x,\cdot,E))+f_0(x,\cdot,d(x,\cdot,-E)))\sigma(x,\cdot,E)\right\rangle\\ &\qquad\sigma(x,E)|E|d\mathbb{O}\,,\end{aligned}\right. \tag{3.83}$$

pour toute fonction ψ régulière à support compact dans $[0,T)\times R_1$. Nous avons donc obtenu une formulation faible de l'équation (3.76)

Nous allons maintenant chercher l'équation satisfaite par h dans la région $R_2\cup R_3$. Considérons pour cela les fonctions $\psi(t,x,E)\in C_0^1([0,T)\times R_2\cup R_3)$, que nous prolongeons par 0 à R_1. En utilisant alors $\psi(t,x,\mathcal{E}(x,\frac{x}{\varepsilon},\xi))$ comme fonction test dans (3.42), en faisant tendre $\varepsilon\to 0$, puis en effectuant le changement de variables ci-dessus, nous obtenons

$$\left\{\begin{aligned}&\int_{\mathbb{Q}\times Y} h(t,x,E)(\partial_t+d(x,y,E)\partial_x)\psi(t,x,E)\,|E|\sigma(x,y,E)d\mathbb{Q}\,dy\\ &\int_{\mathbb{Q}\times Y} h(t,x,E)\frac{d(x,y,E)}{E}\,\partial_E[B(x,y,E)\psi(t,x,E)]\,|E|\sigma(x,y,E)d\mathbb{Q}\,dy\\ &\qquad=-\int_{\mathbb{O}\times Y} f_0(x,y,d(x,y,E))\psi(0,x,E)\,|E|\sigma(x,y,E)d\mathbb{O}\,dy.\end{aligned}\right. \tag{3.84}$$

Sachant que dans R_1, la fonction ψ est identiquement nulle, les intégrales de (3.84) se ramènent à des intégrales sur $(0,T)\times$ $(R_2\cup R_3)\times$ Y.
En remplaçant ensuite ψ par son expression, et en intégrant (3.84) par rapport à y,

sachant que $d(x,y,E)|E|\sigma(x,y,E) = E$ sur le domaine d'intégration, nous obtenons

$$\left\{\begin{aligned} &\int_{(0,T)\times(R_2\cup R_3)} h(t,x,E)\partial_t\psi(t,x,E)\,|E|\sigma(x,E)d\mathbb{Q} \\ &\qquad + \int_{(0,T)\times(R_2\cup R_3)} h(t,x,E)\partial_x\psi(t,x,E)\,Ed\mathbb{Q} \\ &\qquad + \int_{(0,T)\times(R_2\cup R_3)} h(t,x,E)\partial_E\big[\overline{B}(x,E)\psi(t,x,E)\big]\,d\mathbb{Q} \\ &= -\int_{(R_2\cup R_3)} \frac{1}{\sigma(x,E)}\,\langle f_0(x,\cdot,d(x,\cdot,E))\sigma(x,y,E)\rangle\,\psi(0,x,E)\,\sigma(x,E)|E|d\mathbb{O}\,, \end{aligned}\right. \tag{3.85}$$

qui est une formulation faible de l'équation (3.77).

Nous établissons maintenant la condition de transmission (3.78). Pour cela nous construisons des fonctions test $\tilde{\psi}^\delta$ de la manière suivante. Considérons $\theta^\delta(x,E)$ une suite de fonctions continuement dérivables et vérifiant $\theta^\delta(x,E) = 1$ si $E^2 \leq 2u^x_m$, et $\theta^\delta(x,E) = 0$ si $E^2 \geq 2u^x_m + \delta$. Puis, pour toute fonction $\psi(t,x,E) \in C^1_0([0,T);\mathbb{O}\,)$ définissons

$$\tilde{\psi}^\delta(t,x,E) = \frac{\theta^\delta(x,E)}{2}\,(\psi(t,x,E)+\psi(t,x,-E)) + (1-\theta^\delta(x,E))\psi(t,x,E). \tag{3.86}$$

Les fonction $\tilde{\psi}^\delta \in C^1_0([0,T);\mathbb{O}\,)\cap \mathbb{K}_x$. Nous utilisons alors $\tilde{\psi}^\delta(t,x,\mathcal{E}(x,\frac{x}{\varepsilon},\xi))$ comme fonction test, et comme précédemment, nous obtenons

$$\left\{\begin{aligned} &\int_{\mathbb{Q}\,\times Y} h(t,x,E)\partial_t\tilde{\psi}^\delta(t,x,E)\,|E|\sigma(x,y,E)d\mathbb{Q}\,dy \\ &\quad + \int_{\mathbb{Q}\,\times Y} h(t,x,E)\frac{d(x,y,E)}{E}\partial_E[B(x,y,d(x,y,E))\tilde{\psi}^\delta(t,x,E)]\,|E|\sigma(x,y,E)d\mathbb{Q}\,dy \\ &\quad + \int_{\mathbb{Q}\,\times Y} h(t,x,E)d(x,y,E)\partial_x\tilde{\psi}^\delta(t,x,E)\,|E|\sigma(x,y,E)d\mathbb{Q}\,dy \\ &\qquad\qquad\qquad = -\int_{\mathbb{O}\,\times Y} f_0(x,y,d(x,y,E))\tilde{\psi}^\delta(0,x,E)\,|E|\sigma(x,y,E)d\mathbb{O}\,dy. \end{aligned}\right. \tag{3.87}$$

Pour des raisons liées à la parité de l'intégrande, la troisième intégrale de (3.87) se ramène à une intégrale sur $(0,T)\times R_2\cup R_3\times Y$. Ainsi, en intégrant par rapport à y, l'équation ci-dessus devient

$$\left\{\begin{aligned} &\int_{\mathbb{Q}} h(t,x,E)\partial_t\tilde{\psi}^\delta(t,x,E)\,|E|\sigma(x,E)d\mathbb{Q} \\ &\qquad + \int_{\mathbb{Q}} h(t,x,E)\partial_E[\overline{B}(x,E)\tilde{\psi}^\delta(t,x,E)]\,d\mathbb{Q} \\ &\qquad + \int_{(0,T)\times R_2\cup R_3} h(t,x,E)\partial_x\tilde{\psi}^\delta(t,x,E)\,Ed\mathbb{Q} \\ &= -\int_{\mathbb{O}} \langle f_0(x,\cdot,d(x,\cdot,E))\sigma(x,\cdot,E)\rangle\tilde{\psi}^\delta(0,x,E)\,|E|d\mathbb{O}\,. \end{aligned}\right. \tag{3.88}$$

Ensuite, nous intégrons par parties les deux premières intégrales sur R_1. Au vu de (3.76), il ne reste que les termes de bord. Nous obtenons alors

$$\left\{\begin{aligned} &-\int_{(0,T)\times\partial_{R_1}} h(t,x,E)\tilde{\psi}^\delta(t,x,E)\,\overline{B}_I(x,E)n_E(x,E)ds \\ &\qquad+\int_{(0,T)\times R_2\cup R_3} h(t,x,E)\partial_t\tilde{\psi}^\delta(t,x,E)\,|E|\sigma(x,E)d\mathbb{Q} \\ &\qquad+\int_{(0,T)\times R_2\cup R_3} h(t,x,E)\partial_E[\overline{B}(x,E)\tilde{\psi}^\delta(t,x,E)]\,d\mathbb{Q} \\ &\qquad+\int_{(0,T)\times R_2\cup R_3} h(t,x,E)\partial_x\tilde{\psi}^\delta(t,x,E)\,Ed\mathbb{Q} \\ &= -\int_{R_2\cup R_3} \langle f_0(x,\cdot,d(x,\cdot,E))\sigma(x,\cdot,E)\rangle\tilde{\psi}^\delta(0,x,E)\,|E|d\mathbb{O}\,, \end{aligned}\right. \tag{3.89}$$

Nous utilisons maintenant l'expression de $\tilde{\psi}^\delta$ et nous faisons tendre $\delta\to 0$. Nous obtenons alors

$$\left\{\begin{aligned} &-\int_{(0,T)\times\partial_{R_1}} \frac{1}{2}\left(\psi(t,x,E)+\psi(t,x,-E)\right)h_{|R_1}(t,x,E)\,\overline{B}_I(x,E)n_E(x,E)ds \\ &+\int_{(0,T)\times\partial_{R_2\cup R_3}} \frac{1}{2}\left(\psi(t,x,E)+\psi(t,x,-E)\right)h_{|R_2\cup R_3}(t,x,E)\,S(x,E)ds \\ &\qquad-\int_{(0,T)\times\partial_{R_2\cup R_3}} \psi(t,x,E)h_{|R_2\cup R_3}(t,x,E)\,S(x,E)ds \\ &\qquad+\int_{(0,T)\times(R_2\cup R_3)} h(t,x,E)\partial_t\psi(t,x,E)\,|E|\sigma(x,E)d\mathbb{Q} \\ &\qquad+\int_{(0,T)\times(R_2\cup R_3)} h(t,x,E)\partial_x\psi(t,x,E)\,Ed\mathbb{Q} \\ &\qquad+\int_{(0,T)\times(R_2\cup R_3)} h(t,x,E)\partial_E\left[\langle B(x,\cdot,d(x,\cdot,E))\rangle\psi(t,x,E)\right]d\mathbb{Q} \\ &= -\int_{(R_2\cup R_3)} \frac{1}{\sigma(x,E)}\left\langle f_0(x,\cdot,d(x,\cdot,E))\sigma(x,\cdot,E)\right\rangle\psi(0,x,E)\,|E|\sigma(x,E)d\mathbb{O}\,, \end{aligned}\right. \tag{3.90}$$

Nous intégrons alors par partie les trois dernières intégrales du membre de gauche de (3.90). Vu l'équation satisfaite par h dans $R_2\cup R_3$ les termes autres que les termes de bord sont nuls. De plus, les termes de bord s'annulent avec la troisième intégrale de (3.90). Nous déduisons alors

$$\left\{\begin{aligned} &\int_{(0,T)\times\partial_{R_1}} \frac{1}{2}\left(\psi(t,x,E)+\psi(t,x,-E)\right) \\ &\qquad\big(S(x,E)h_{|R_2\cup R_3}(t,x,E)-\overline{B}_I(x,E)n_E(x,E)h_{|R_1}(t,x,E)\big)\,ds=0, \end{aligned}\right. \tag{3.91}$$

i.e.

$$\left\{ \begin{aligned} &\int_{(0,T)\times\partial_{R_1}} \frac{1}{2}\big(S(x,E)h_{|R_2\cup R_3}(t,x,E) + S(x,-E)h_{|R_2\cup R_3}(t,x,-E) \\ &\qquad -\overline{B}_I(x,E)n_E(x,E)h_{|R_1}(t,x,E) - \overline{B}_I(x,-E)n_E(x,-E)h_{|R_1}(t,x,-E)\big) \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \psi(t,x,E)ds = 0. \end{aligned} \right. \tag{3.92}$$

En utilisant ensuite les différentes propriétés de parité dans la région R_1, ($\overline{B}_I(x,-E) = -\overline{B}_I(x,E)$, $n_E(x,-E) = -n_E(x,E)$ et $h_{|R_1}(t,x,-E) = h_{|R_1}(t,x,E)$), nous obtenons

$$\left\{ \begin{aligned} &\int_{(0,T)\times\partial_{R_1}} \frac{1}{2}\big(S(x,E)h_{|R_2\cup R_3}(t,x,E) + S(x,-E)h_{|R_2\cup R_3}(t,x,-E) \\ &\qquad\qquad\qquad -2\overline{B}_I(x,E)n_E(x,E)h_{|R_1}(t,x,E)\big)\,\psi(t,x,E)ds = 0. \end{aligned} \right. \tag{3.93}$$

Prouvant la condition de transmission (3.78). ■

4 Le cas bidimensionnel du potentiel radial oscillant

Dans cette section, nous considérons un problème bidimensionnel avec un potentiel radial oscillant. Plus précisément, nous étudions le problème (1.1) avec $u(y) = v(|y|)$ où $v \in C_p^0(\Upsilon) \cap C^2([0,2])$, avec $\Upsilon = [0,2]$ et vérifie

$$v(1) = 0,\ 0 \leq v(y) \leq u_m,\ v(0) = v(2) = u_m, \tag{4.1}$$

1 étant le seul extremum sur Υ. Nous supposons de plus

$$v'(0) \neq 0 \text{ et } v'(2) \neq 0. \tag{4.2}$$

Nous attirons l'attention du lecteur sur le fait que dans le cas présent, le potentiel u n'est pas périodique sur $\mathbb{R}^2$. Cette étude ne s'insère donc pas dans le cadre présenté en introduction. Néanmoins, en nous inspirant des études effectuées dans la section précédente, nous déduisons l'équation du profil.

Sous les hypothèses ci-dessus, l'équation (1.1) devient

$$\begin{cases} \partial_t f^\varepsilon + \xi \cdot \nabla_x f^\varepsilon - \dfrac{1}{\varepsilon} v'\left(\dfrac{|x|}{\varepsilon}\right) \dfrac{x}{|x|} \cdot \nabla_\xi f^\varepsilon = 0, \\ f^\varepsilon_{|t=0} = f_0^\varepsilon, \end{cases} \tag{4.3}$$

où la condition initiale vérifie

$$\begin{cases} f_0^\varepsilon(x,\xi) = f_0(x, \dfrac{|x|}{\varepsilon}, \xi), \\ f_0 \in L^2(\mathcal{O}, C_p(\Upsilon)), \quad f_0 \geq 0. \end{cases} \tag{4.4}$$

Nous nous ramenons au cas unidimensionnel, pour cela, nous réécrivons (4.3) dans un système de coordonnées polaires. Plus précisément, nous considérons en premier lieu le changement de variables $x \to (r,\theta)$ défini par

$$x = r\omega,\ \ \omega = (\cos\theta, \sin\theta). \tag{4.5}$$

Nous projetons ensuite la variable vitesse ξ sur la base $(\omega, \omega^\perp)$ où $\omega^\perp = (-\sin\theta, \cos\theta)$, i.e. $\xi \to (\eta_1, \eta_2)$ avec

$$\eta_1 = \xi \cdot \omega,\ \ \eta_2 = \xi \cdot \omega^\perp. \tag{4.6}$$

Dans ce nouveau système de coordonnées, nous définissons la fonction g^ε par

$$g^\varepsilon(t,r,\theta,\eta) = f^\varepsilon(t, r\omega, \eta_1\omega + \eta_2\omega^\perp). \tag{4.7}$$

Celle-ci vérifie l'équation

$$\begin{cases} \partial_t g^\varepsilon + \eta_1 \partial_r g^\varepsilon + \dfrac{\eta_2}{r}\left(\partial_\theta g^\varepsilon - \eta \times \nabla_\eta g^\varepsilon\right) - \dfrac{1}{\varepsilon} v'\left(\dfrac{r}{\varepsilon}\right) \partial_{\eta_1} g^\varepsilon = 0, \\ g^\varepsilon_{|t=0}(r,\theta,\eta) = g_0(r, \dfrac{r}{\varepsilon}, \theta, \eta) := f_0(r\omega, \dfrac{r}{\varepsilon}, \eta_1\omega + \eta_2\omega^\perp), \end{cases} \tag{4.8}$$

où nous avons noté $\eta \times \nabla_\eta = \eta_1 \partial_{\eta_2} - \eta_2 \partial_{\eta_1}$.

En effet, pour trouver (4.8) nous commençons par effectuer le changement de variables (4.5). La fonction $\tilde{f}^\varepsilon$ définie par $\tilde{f}^\varepsilon(t, r, \theta, \xi) = f^\varepsilon(t, r\omega, \xi)$ vérifie

$$\partial_t \tilde{f}^\varepsilon + \xi \cdot \omega \partial_r \tilde{f}^\varepsilon + \frac{1}{r} \xi \cdot \omega^\perp \partial_\theta \tilde{f}^\varepsilon - \frac{1}{\varepsilon} v' \left(\frac{r}{\varepsilon}\right) \omega \cdot \nabla_\xi \tilde{f}^\varepsilon = 0. \tag{4.9}$$

Utilisons maintenant le second changement de variables (4.6). Les fonctions g^ε et $\tilde{f}^\varepsilon$ sont alors reliées par

$$\begin{aligned} g^\varepsilon(t, r, \theta, \eta) &= \tilde{f}^\varepsilon(t, r, \theta, \eta_1 \omega + \eta_2 \omega^\perp) \\ \tilde{f}^\varepsilon(t, r, \theta, \xi) &= g^\varepsilon(t, r, \theta, \xi \cdot \omega, \xi \cdot \omega^\perp). \end{aligned} \tag{4.10}$$

Nous obtenons alors très facilement les dérivées partielles de $\tilde{f}^\varepsilon$ en fonction de celles de g^ε :

$$\begin{aligned} &\partial_\theta \tilde{f}^\varepsilon = \partial_\theta g^\varepsilon + \xi \cdot \omega^\perp \partial_{\eta_1} g^\varepsilon - \xi \cdot \omega \partial_{\eta_2} g^\varepsilon, \\ &\nabla_\xi \tilde{f}^\varepsilon = \omega \partial_{\eta_1} g^\varepsilon + \omega^\perp \partial_{\eta_2} g^\varepsilon. \end{aligned} \tag{4.11}$$

En utilisant ces relations dans l'équation (4.9) satisfaite par $\tilde{f}^\varepsilon$ nous obtenons que g^ε vérifie (4.8). ∎

L'équation (4.8) que nous avons obtenue est alors essentiellement unidimensionnelle du point de vue de l'homogénéisation. En effet la variable d'oscillation (r) est de dimension 1 ainsi que la direction de propagation (η_1). Nous déduisons donc l'équation du profil en nous inspirant des méthodes suivies précédemment.

Introduisons les notations suivantes $O = [0, \infty) \times (0, 2\pi) \times \mathbb{R}^2$ et $Q = (0, T) \times O$.
Les hypothèses que nous avons faites sur f_0 impliquent que g_0^ε est bornée dans $L^2(O, rdO)$ et donc que g^ε l'est dans $L^\infty(0, T; L^2(O, rdO))$.
Ainsi, il existe un profil G et une limite faible g associés à la suite g^ε (l'unicité de G et de g se déduit des résultats à venir).

Nous commençons par déduire l'équation de contrainte du profil. Considérons alors les fonctions test oscillantes $\varepsilon\psi^\varepsilon \equiv \varepsilon\psi(t, r, \frac{r}{\varepsilon}, \theta, \eta)$ définies pour toute fonction $\psi \in C_0^1([0, T) \times O; C_p^1(\Upsilon))$.
En les utilisant dans la formulation faible de l'équation (4.8), sachant que la mesure de Lebesgue en coordonnées polaires est $rdrd\theta$, nous obtenons

$$\begin{aligned} \varepsilon \int_Q g^\varepsilon \left[\partial_t(r\psi^\varepsilon) + \eta_1 \partial_r(r\psi^\varepsilon) + \frac{\eta_2}{r} \partial_\theta(r\psi^\varepsilon) - \frac{\eta_1}{r} \partial_{\eta_2}(r\eta_2\psi^\varepsilon) + \frac{{\eta_2}^2}{r} \partial_{\eta_1}(r\psi^\varepsilon) \right] dQ \\ + \int_Q g^\varepsilon \left[\eta_1 \partial_y(r\psi^\varepsilon) - v'\left(\frac{r}{\varepsilon}\right) \partial_{\eta_1}(r\psi^\varepsilon) \right] dQ \\ = -\varepsilon \int_O g_0^\varepsilon \psi^\varepsilon(0)\, rdO. \end{aligned} \tag{4.12}$$

En faisant ensuite tendre $\varepsilon \to 0$, nous obtenons l'équation de contrainte

$$\eta_1 \partial_y G - v'(y) \partial_{\eta_1} G = 0. \tag{4.13}$$

En adaptant le lemme 2.4 au cadre actuel, nous pouvons déduire la forme du profil G. Pour cela, définissons sur $\Upsilon \times \mathbb{R}$, les fonctions $\sigma(y, E)$ et $\sigma(E)$ par

$$\begin{cases} \sigma(y,E) = \left(E^2 - 2u(y)\right)^{-1/2} \text{ pour } E^2 > 2u(y), \text{ 0 ailleurs,} \\ \sigma(E) = \langle \sigma(\cdot, E) \rangle \,, \end{cases} \tag{4.14}$$

où $\langle\,\rangle$ désigne la valeur moyenne sur Υ.
Grâce à l'hypothèse (4.2), la fonction $\sigma(E) < \infty$, $\forall E \neq 0$.
Nous déduisons alors de (4.13) le

Théorème 4.1 *Sous l'hypothèse (4.1), il existe une fonction* $h \in L^\infty(0,T; L^2(O, r|E|\,\sigma(E) dr d\theta dE d\eta_2))$, *avec* $h(E) = h(-E)$ *pour* $E^2 \leq 2u_m$, *telle que*

$$G(t,r,\theta,\eta) = h(t,r,\theta,\mathcal{E}(y,\eta_1),\eta_2), \tag{4.15}$$

où

$$\mathcal{E}(y,\eta_1) = \frac{\eta_1}{|\eta_1|}\sqrt{{\eta_1}^2 + 2v(y)}. \tag{4.16}$$

Ce résultat établi, nous désirons connaître le comportement de h. A ce propos, nous avons le

Théorème 4.2 *Sous les hypothèses (4.1), (4.2) et (4.4) la fonction* h *est l'unique solution du problème suivant*

$$\begin{cases} \partial_t h + \dfrac{\eta_2}{r} \partial_\theta h = 0, \\ h_{t=0} = \dfrac{1}{2\sigma(E)} \left\langle \{ g_0(r,\cdot,\theta,d(\cdot,E),\eta_2) + g_0(r,\cdot,\theta,d(\cdot,-E),\eta_2) \} \, \sigma(\cdot,E) \right\rangle \end{cases} \tag{4.17}$$

lorsque $E^2 < 2u_m$, *et*

$$\begin{cases} \partial_t h + \dfrac{\eta_2}{r}\partial_\theta h + \dfrac{E}{|E|\sigma(E)}\partial_r h + \dfrac{{\eta_2}^2}{r|E|\sigma(E)}\partial_E h - \dfrac{E\eta_2}{r|E|\sigma(E)}\partial_{\eta_2} h = 0, \\ h_{|E=\sqrt{2u_m}} = h_{|E=-\sqrt{2u_m}}\,, \\ h_{|t=0} = \dfrac{1}{\sigma(E)} \langle g_0(r,\cdot,\theta,d(\cdot,E),\eta_2)\sigma(\cdot,E)\rangle \end{cases} \tag{4.18}$$

lorsque $E^2 \geq 2u_m$.

Démonstration - Le problème satisfait par le profil est à deux phases. Notre but est d'obtenir des formulations faibles des différentes équations.

Commençons par (4.17). Pour cela, nous considérons pour toute fonction $\psi(t, r, \theta, E, \eta_2)$ régulière et à support compact dans $[0, T) \times [0, \infty) \times (0, 2\pi) \times (-\sqrt{2u_m}, \sqrt{2u_m}) \times \mathbb{R}$, nous définissons

$$\varphi(t, r, \theta, E, \eta_2) = \frac{1}{2}\left[\psi(t, r, \theta, E, \eta_2) + \psi(t, r, \theta, -E, \eta_2)\right]. \tag{4.19}$$

Nous utilisons alors $\varphi^\varepsilon \equiv \psi(t, r, \theta, \mathcal{E}(\frac{r}{\varepsilon}, \eta_1), \eta_2)$ dans la formulation faible de (4.11). Le terme contenant la contrainte disparaissant, nous avons

$$\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\int_Q g^\varepsilon \left\{\left[\partial_t + \eta_1\partial_r + \frac{\eta_2}{r}\partial_\theta + \frac{{\eta_2}^2}{r}\partial_{\eta_1}\right](r\varphi^\varepsilon) - \frac{\eta_1}{r}\partial_{\eta_2}(r\eta_2\varphi^\varepsilon)\right\} dQ \\ \displaystyle = -\int_O g_0^\varepsilon\varphi^\varepsilon(0)\, rdO. \end{array}\right. \tag{4.20}$$

En faisant tendre $\varepsilon \to 0$ nous obtenons que G vérifie

$$\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\int_{Q\times\Upsilon} G \left\{\left[\partial_t + \eta_1\partial_r + \frac{\eta_2}{r}\partial_\theta + \frac{{\eta_2}^2}{r}\partial_{\eta_1}\right](r\varphi) - \frac{\eta_1}{r}\partial_{\eta_2}(r\eta_2\varphi)\right\} dQdy \\ \displaystyle = -\int_{O\times\Upsilon} g_0\varphi(0)\, rdOdy, \end{array}\right. \tag{4.21}$$

où φ est prise au point $E = \mathcal{E}(y, \eta_1)$.

Nous effectuons maintenant le changement de variables $(y, \eta_1) \in \Upsilon \times \mathbb{R} \to (y, E) \in \{(y, E),\ E^2 \geq v(y)\}$ défini par

$$E = \mathcal{E}(y, \eta_1) = \frac{\eta_1}{|\eta_1|}\sqrt{{\eta_1}^2 + v(y)}, \tag{4.22}$$

dont l'inverse est donné par

$$\eta_1 = d(y, E) := \frac{E}{|E|}\sqrt{E^2 - v(y)}. \tag{4.23}$$

(4.21) devient alors

$$\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\int_{\mathbb{Q}\times\Upsilon} h\left[\partial_t + d(y, E)\partial_r + \frac{\eta_2}{r}\partial_\theta + \frac{{\eta_2}^2 d(y, E)}{rE}\partial_E\right](r\varphi)\,|E|\sigma(y, E)d\mathbb{Q}\,dy \\ \displaystyle\qquad\qquad - \int_{\mathbb{Q}\times\Upsilon} h\frac{d(y, E)}{r}\partial_{\eta_2}(r\eta_2\varphi)\,|E|\sigma(y, E)d\mathbb{Q}\,dy \\ \displaystyle = -\int_{\mathbb{O}\times\Upsilon} g_0\varphi(0)\, rd\mathbb{O}\,dy, \end{array}\right. \tag{4.24}$$

où $\mathbb{O} = [0, \infty) \times (0, 2\pi) \times \{(y, E),\ E^2 \geq 2v(y)\}$ et $\mathbb{Q} = (0, T) \times \mathbb{O}$.
En utilisant la définition de φ et les différentes propriétés de parité, nous obtenons

$$\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\int_{\mathbb{Q}\times\Upsilon} h\left[\partial_t + \frac{\eta_2}{r}\partial_\theta\right](r\psi)\,|E|\sigma(y, E)d\mathbb{Q}\,dy \\ \displaystyle = -\int_{\mathbb{O}\times\Upsilon} (g_0(r, y, \theta, d(y, E), \eta_2) + g_0(r, y, \theta, d(y, -E), \eta_2))\,\psi\,|E|\sigma(y, E)d\mathbb{O}\,dy. \end{array}\right. \tag{4.25}$$

En intégrant (4.25) par rapport à y nous obtenons

$$\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\int_{\mathbb{Q}} h\left[\partial_t + \frac{\eta_2}{r}\partial_\theta\right](r\psi)\,|E|\sigma(E)d\mathbb{Q} \\ \displaystyle -\int_{\mathbb{O}} \frac{1}{\sigma(E)}\Big\langle g_0(r,\cdot,\theta,d(\cdot,E),\eta_2) + g_0(r,\cdot,\theta,d(\cdot,-E),\eta_2)\sigma(\cdot,E)\Big\rangle\,\psi\,|E|\sigma(E)d\mathbb{O}\,. \end{array}\right. \tag{4.26}$$

qui est la formulation faible de (4.17).

Nous cherchons maintenant à obtenir la formulation faible de (4.18). Soit ψ une fonction régulière à support compact dans $[0,T)\times[0,\infty)\times[0,2\pi)\times\{E,\,E^2>2u_m\}\times\mathbb{R}$, que nous prolongeons par $\psi(t,r,\theta,E,\,\eta_2)=0$ pour tout E tel que $E^2<2u_m$.
Une telle fonction vérifie l'équation de contrainte. Ainsi, en utilisant toutes les fonctions de cette forme, avec E remplacé par $\mathcal{E}(y,\eta_1)$, dans la formulation faible de (4.8), en faisant tendre ε vers 0 et en effectuant le changement de variables (4.22), nous obtenons

$$\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\int_{\mathbb{Q}\times\Upsilon} h\left[\partial_t + d(y,E)\partial_r + \frac{\eta_2}{r}\partial_\theta + \frac{{\eta_2}^2 d(y,E)}{rE}\partial_E\right](r\psi)\,|E|\sigma(y,E)d\mathbb{Q}\,dy \\ \displaystyle\qquad\qquad\qquad - \int_{\mathbb{Q}\times\Upsilon} h\frac{d(y,E)}{r}\partial_{\eta_2}(r\eta_2\psi)\,|E|\sigma(y,E)d\mathbb{Q}\,dy \\ \displaystyle = -\int_{\mathbb{O}\times\Upsilon} g_0\psi(0)\,rd\mathbb{O}\,dy, \end{array}\right. \tag{4.27}$$

Sachant que sur $\{E,\,E^2\le 2u_m\}$, nous avons $\psi\equiv 0$, les intégrales de (4.27) se restreignent au domaine tel que $E^2\ge 2u_m$. Ainsi, en appelant $D=[0,\infty)\times(0,2\pi)\times\{E,\,E^2\ge 2u_m\}\times\mathbb{R}$ et $B=(0,T)\times D$, en remarquant que $d(y,E)|E|\sigma(y,E)=E$, et en intégrant (4.27) en $y\in\Upsilon$, nous obtenons

$$\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\int_B h\left[\partial_t + \frac{\eta_2}{r}\partial_\theta\right](r\psi)\,|E|\sigma(E)d\mathbb{Q} \\ \displaystyle\qquad\qquad + \int_B h\left\{\left[E\partial_r + \frac{{\eta_2}^2}{r}\partial_E\right](r\psi) - \frac{E}{r}\partial_{\eta_2}(r\eta_2\psi)\right\}d\mathbb{Q} \\ \displaystyle\qquad = -\int_D \frac{1}{\sigma(E)}\psi(0)\,\langle g_0(r,\cdot,\theta,d(\cdot,E),\eta_2)\sigma(\cdot,E)\rangle\, r|E|\sigma(E)d\mathbb{O}\,, \end{array}\right. \tag{4.28}$$

pour toute fonction régulière et à support compact dans $[0,T)\times[0,\infty)\times[0,2\pi)\times\{E,\,E^2>2u_m\}\times\mathbb{R}$. Nous avons donc obtenu une formulation faible de (4.18.a).

Nous déduisons maintenant la condition de transmission (4.18.b). Pour cela, nous définissons, à partir de toute fonction $\psi(t,r,\theta,E,\,\eta_2)$ la fonction

$$\tilde{\psi}^\delta(t,r,\theta,E,\eta_2) = \frac{\theta^\delta(E)}{2}\left(\psi(t,r,\theta,E,\eta_2)+\psi(t,r,\theta,-E,\eta_2)\right)+(1-\theta^\delta(E))\psi(t,r,\theta,E,\eta_2), \tag{4.29}$$

où $\theta^\delta(E)$ est une fonction continuement dérivable vérifiant $\theta^\delta(E)=1$ si $E^2\le 2u_m$, et $\theta^\delta(E)=0$ si $E^2\ge 2u_m+\delta$. les fonctions $\tilde{\psi}^\delta$ sont régulières et vérifient l'équation de contrainte. Ainsi, en utilisant comme fonction test $\tilde{\psi}^\delta$ avec E remplacer par $\mathcal{E}(y,\eta_1)$ le terme contenant la contrainte disparait. Puis nous faisons tendre ε vers 0, nous intégrons par rapport à y et, en utilisant les propriétés de parité de h et de $\tilde{\psi}^\delta$ lorsque $E^2 \le 2u_m$, nous obtenons

$$\left\{\begin{aligned} &\int_B h\left[\partial_t + \frac{\eta_2}{r}\partial_\theta\right](r\tilde{\psi}^\delta)\,|E|\sigma(E)d\mathbb{Q} \\ &\qquad\qquad + \int_B h\left\{\left[E\partial_r + \frac{{\eta_2}^2}{r}\partial_E\right](r\tilde{\psi}^\delta) - \frac{E}{r}\partial_{\eta_2}(r\eta_2\tilde{\psi}^\delta)\right\}d\mathbb{Q} \\ &\qquad\qquad = -\int_D \frac{1}{\sigma(E)}\tilde{\psi}^\delta(0)\left\langle g_0(r,\cdot,\theta,d(\cdot,E),\eta_2)\sigma(\cdot,E)\right\rangle r|E|\sigma(E)d\mathbb{O}\,. \end{aligned}\right. \tag{4.30}$$

Nous utilisons alors l'expression de la dérivée de $\tilde{\psi}^\delta$ par rapport à E et les théorèmes de trace qui sont valides car $\sigma(E) < \infty$, pour passer à la limite en δ dans (4.30). Nous obtenons

$$\left\{\begin{aligned} &\int_C \frac{1}{2}h_{|D_2}(t,r,\theta,-\sqrt{2u_m},\eta_2)\left(\psi(t,r,\theta,\sqrt{2u_m},\eta_2)+\psi(t,r,\theta,-\sqrt{2u_m},\eta_2)\right){\eta_2}^2dC \\ &\quad -\int_C h_{|D_2}(t,r,\theta,-\sqrt{2u_m},\eta_2)\psi(t,r,\theta,-\sqrt{2u_m},\eta_2)\,{\eta_2}^2dC \\ &\quad -\int_C \frac{1}{2}h_{|D_3}(t,r,\theta,\sqrt{2u_m},\eta_2)\left(\psi(t,r,\theta,\sqrt{2u_m},\eta_2)+\psi(t,r,\theta,-\sqrt{2u_m},\eta_2)\right){\eta_2}^2dC \\ &\quad +\int_C h_{|D_3}(t,r,\theta,\sqrt{2u_m},\eta_2)\psi(t,r,\theta,\sqrt{2u_m},\eta_2)\,{\eta_2}^2dC \\ &\quad \int_B h\left[\partial_t + \frac{\eta_2}{r}\partial_\theta\right](r\psi)\,|E|\sigma(E)d\mathbb{Q} \\ &\quad +\int_B h\left\{\left[E\partial_r + \frac{{\eta_2}^2}{r}\partial_E\right](r\psi) - \frac{E}{r}\partial_{\eta_2}(r\eta_2\psi)\right\}d\mathbb{Q} \\ &\qquad\qquad\qquad = -\int_D \frac{1}{\sigma(E)}\left\langle g_0(r,\cdot,\theta,d(\cdot,E),\eta_2)\sigma(\cdot,E)\right\rangle r|E|\sigma(E)d\mathbb{O}\,, \end{aligned}\right. \tag{4.31}$$

où nous avons noté $D_2 = [0,\infty)\times(0,2\pi)\times\{E,\,E < -\sqrt{2u_m}\}\times\mathbb{R}$, $D_1 = [0,\infty)\times(0,2\pi)\times\{E,\,E > \sqrt{2u_m}\}\times\mathbb{R}$, et $C = [0,\infty)\times(0,2\pi)\times\mathbb{R}$.
En intégrant ensuite par parties les deux dernières intégrales du membre de gauche, et vu l'équation satisfaite par h dans la région D, nous déduisons

$$\begin{aligned} \int_C &\left(h_{|D_3}(t,r,\theta,-\sqrt{2u_m},\eta_2) - h_{|D_2}(t,r,\theta,-\sqrt{2u_m},\eta_2)\right) \\ &\qquad\qquad \left(\psi(t,r,\theta,\sqrt{2u_m},\eta_2)+\psi(t,r,\theta,-\sqrt{2u_m},\eta_2)\right){\eta_2}^2dC = 0. \end{aligned} \tag{4.32}$$

Cette dernière équation étant valide pour toute les fonction ψ régulières, la condition de transmission (4.18.b) est démontrée.
Le théorème est alors prouvé. ■

5 Introduction à l'homogénéisation en dimension quelconque

Dorénavant, nous étudions l'homogénéisation de l'équation (1.1) pour $n > 1$. Nous identifions Y à $[-1,1]^n$, et nous supposons que $u \in C_p^0(Y) \cap C^2((-1,1)^n)$. Sous ces hypothèses, il existe un profil F et une limite faible f associée à f^ε.

Comme en dimension un, la première étape du processus consiste à trouver les équations satisfaites par le profil.
En premier lieu, l'équation de contrainte s'obtient comme précédemment. Il suffit en effet d'utiliser dans la formulation faible :

$$\begin{aligned} &\int_{\mathcal{Q}} f^\varepsilon \left(\partial_t \psi^\varepsilon + \xi \cdot \nabla_x \psi^\varepsilon\right) d\mathcal{Q} \\ +\frac{1}{\varepsilon} &\int_{\mathcal{Q}} f^\varepsilon \left(\xi \cdot \nabla_y \psi^\varepsilon - \nabla_y u(\frac{x}{\varepsilon}) \cdot \nabla_\xi \psi^\varepsilon\right) d\mathcal{Q} = -\int_{\mathcal{O}} f_0 \psi^\varepsilon(0)\, d\mathcal{O}, \end{aligned} \tag{5.1}$$

des fonctions test $\varphi^\varepsilon(t,x,\xi) = \varepsilon\psi(t,x,\frac{x}{\varepsilon},\xi)$, $\psi \in C_0^1([0,T) \times \mathcal{O}; C_p^1(Y))$ pour déduire, en faisant tendre $\varepsilon \to 0$,

$$TF := \xi \cdot \nabla_y F - \nabla_y u(y) \cdot \nabla_\xi F = 0. \tag{5.2}$$

Il faut ensuite déterminer l'ensemble $\mathbb{K}$ des solutions de (5.2), pour obtenir enfin une équation bien posée pour le profil.
L'équation de contrainte (5.2) à toujours la même signification : F est intégrale première du système hamiltonien

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{Y} = \Xi, \\ \dot{\Xi} = -\nabla_y u(Y). \end{array} \right. \tag{5.3}$$

Si déterminer les intégrales premières d'un système à un degré de liberté est chose aisée, cela devient un problème délicat dès lors que $n \geq 2$. Nous étudions alors différents potentiels pour lesquels l'espace $\mathbb{K}$ est caractérisable.

Le premier d'entre eux est $u(y) = v(y_1)$ (u n'est fonction que de la première composante), où v est $[-1,1]-$périodique. Nous pouvons alors appliquer une méthode très voisine de celle développée dans le cas de la dimension un. Nous obtenons l'équation du profil ainsi que l'équation cinétique à mémoire satisfaite par la limite faible.
Il est intéressant d'étudier ce cas car une classe importante de potentiels peut se ramener à ce type de potentiel via un changement de variables. c'est le cas, par exemple, en dimension 2 lorsque $u(y) = v(y_1 - y_2)$.

Nous étudions ensuite le cas multidimensionnel où le potentiel u s'écrit $u_1(y_1) + ... + u_n(y_n)$. Dans ce cas, le système (5.3) est intégrable et l'espace $\mathbb{K}$ est caractérisable.

Enfin, dans le cas général, nous donnons un résultat en considérant formellement la projection $\mathbb{P}$ de $L^2(\mathbb{R}^n; L_p^2(Y))$ vers $\mathbb{K}$. Nous étudions les propriétés de $\mathbb{P}$ et nous obtenons une équation sur le profil où les coefficients ne sont pas explicites. Cependant,

le résultat obtenu nous permet de déduire la forme de l'équation du profil pour tout potentiel.
Ensuite, en utilisant une méthode d'homogénéisation non locale multidimensionnelle inspirée de Y.Amirat, K.Hamdache & A.Ziani [5], nous déduisons que f est membre d'un couple (f, w) solution d'un système d'équation cinétique à mémoire.
Pour ce faire, nous appliquons à l'équation du profil la transformation de Radon. Nous obtenons alors une famille de problèmes unidimensionnels paramétrée par la fréquence ω. En appliquant alors la méthode précédente, nous obtenons une famille de problèmes homogénéisés, qui en appliquant la transformation de Radon inverse donne le système annoncé.

6 Cas d'un potentiel ne dépendant que de la première coordonnée $u(y) = v(y_1)$

Dans cette sous-section nous caractérisons l'ensemble $\mathbb{K}$ et nous effectuons l'homogénéisation de (1.1) lorsque le potentiel s'écrit $u(y) = v(y_1)$, où y_1 est la première composante de $y \in Y$, et où la fonction v est $C^0_p([-1,1]) \cap C^2([-1,1])$ vérifiant

$$0 \leq v(y_1) \leq v_m, \;\; v(0) = 0, \;\; v(\pm 1) = v_m, \tag{6.1}$$

0 étant le seul extrémum dans $]-1,1[$.

Avec un tel potentiel, l'équation (1.1) devient

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t f^\varepsilon + \xi \cdot \nabla_x f^\varepsilon - \dfrac{1}{\varepsilon} v'\left(\dfrac{x_1}{\varepsilon}\right) \partial_{\xi_1} f^\varepsilon = 0 \\ f^\varepsilon_{|t=0} = f^\varepsilon_0. \end{array} \right. \tag{6.2}$$

La nature de ce problème étant unidimensionnelle, les techniques développées dans la section 1 s'appliquent.

L'homogénéisation de cette équation se déroule alors en deux étapes. Pour la première nous supposons que la donnée initiale oscille comme le potentiel, i.e.

$$f^\varepsilon_0(x,\xi) = f_0(x, \frac{x_1}{\varepsilon}, \xi), \tag{6.3}$$

avec $f_0 \in L^2(\mathcal{O}; C_p([-1,1]))$ et $f_0 \geq 0$. Puis pour la seconde où nous suivons une méthode d'homogénéisation non locale, nous supposons de plus que

$$f_0(x,y,\xi) = f_1(x) a(y,\xi), \tag{6.4}$$

avec $f_1 \in L^2(\mathbb{R}^n)$, $f_1 \geq 0$, $a \in L^\infty \cap L^2(\mathbb{R}^n; C_p(Y))$, et $a \geq 0$.

Remarque 6.1 L'intérêt principal de considérer un tel potentiel est qu'il permet de traiter une classe de problèmes dont l'interaction à deux points. Considérons, en effet, en dimension deux le potentiel $u(y) = v(y_1 - y_2)$, où v est régulière et $[-1,1]-$périodique. Cette forme de potentiel suggère d'effectuer, dans l'équation (1.1), le changement de variables

$$\left\{ \begin{array}{ll} z_1 = \frac{1}{2}(x_1 - x_2), & z_2 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2), \\ \zeta_1 = \frac{1}{2}(\xi_1 - \xi_2), & \zeta_2 = \frac{1}{2}(\xi_1 + \xi_2). \end{array} \right. \tag{6.5}$$

Définissons g^ε par

$$g^\varepsilon(t,z,\zeta) = f^\varepsilon(t, z_1 - z_2, z_1 + z_2, \zeta_1 - \zeta_2, \zeta_1 + \zeta_2). \tag{6.6}$$

Celle-ci vérifie l'équation

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t g_\varepsilon + \zeta \cdot \nabla_z g^\varepsilon - \dfrac{1}{\varepsilon} v'\left(\dfrac{z_1}{\varepsilon}\right) \partial_{\zeta_1} g^\varepsilon = 0, \\ g^\varepsilon_{|t=0} = g_0 := f_0(z_1 - z_2, z_1 + z_2, \frac{z_1}{\varepsilon}, \zeta_1 - \zeta_2, \zeta_1 + \zeta_2). \end{array} \right. \tag{6.7}$$

(Nous supposons ici que la donnée initiale oscille comme le potentiel).
Nous obtenons bien une équation de la forme (6.2).

Plus généralement, considérons en dimension n un potentiel $u(y) = v(\alpha \cdot y)$, où $\alpha \in S^{n-1}$ et où v est régulier et $[-1,1]-$ périodique. Nous supposons également que la donnée initiale oscille comme le potentiel, i.e. $f_0^\varepsilon(x,\xi) = f_0(x, \frac{\alpha \cdot x}{\varepsilon}, \xi)$. L'équation (1.1) devient alors

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t f^\varepsilon + \xi \cdot \nabla_x f^\varepsilon - \dfrac{1}{\varepsilon} v' \left(\dfrac{\alpha \cdot x}{\varepsilon} \right) \alpha \cdot \nabla_\xi f^\varepsilon \\ f^\varepsilon_{|t=0} = f_0^\varepsilon. \end{array} \right. \tag{6.8}$$

En écrivant $\partial_{\beta,x}$ et $\partial_{\beta,\xi}$ la dérivée dans la direction $\beta \in \mathbb{R}^n$ en x et ξ respectivement, nous pouvons réécrire (6.8) sous une forme plus intrinsèque

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t f^\varepsilon + \partial_{\xi,x} f^\varepsilon - \dfrac{1}{\varepsilon} v' \left(\dfrac{\alpha \cdot x}{\varepsilon} \right) \partial_{\alpha,\xi} f^\varepsilon = 0 \\ f^\varepsilon_{|t=0} = f_0^\varepsilon. \end{array} \right. \tag{6.9}$$

Considérons alors une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ dont le premier élément est α. En exprimant la vitesse et la position dans cette base, (6.9) devient

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t f^\varepsilon + \zeta \cdot \nabla_z f^\varepsilon - \dfrac{1}{\varepsilon} v' \left(\dfrac{z_1}{\varepsilon} \right) \partial_{\zeta_1} f^\varepsilon = 0 \\ f^\varepsilon_{|t=0} = f_0(z, \frac{z_1}{\varepsilon}, \zeta), \end{array} \right. \tag{6.10}$$

où ζ désigne la nouvelle variable de vitesse et z la nouvelle variable de position. Nous obtenons alors une équation de la forme de (6.2). ■

En utilisant dans la formulation faible (5.1) des fonctions ψ ne dépendant que de (t,x,y_1,ξ), nous obtenons une équation de contrainte plus simple que l'équation (5.2)

$$\xi_1 \partial_{y_1} F - v'(y_1) \partial_{\xi_1} F, \tag{6.11}$$

où F ne dépend que de (t,x,y_1,ξ). Ainsi, le résultat concernant l'homogénéisation de l'équation (6.2) est donné par les deux théorèmes suivants.

Théorème 6.2 *Sous les hypothèses (6.1) et (6.3), il existe une fonction $h(t,x,E,\xi') \in L^\infty(0,T; L^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}, |E|\sigma(E)dxdEd\xi'))$, vérifiant $h(E) = h(-E)$ pour $E^2 \leq 2v_m$ telle que*

$$F(t,x,y,\xi) = h\left(t, x, \frac{\xi_1}{|\xi_1|} \sqrt{\xi_1^2 + 2v(y_1)}, \xi' \right), \tag{6.12}$$

où $\xi = (\xi_1, \xi')$ et où $\sigma(E)$ est définie par (2.16).
En définissant

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi^\#(E) = \left(\dfrac{E}{|E|} \dfrac{1-\theta(E)}{\sigma(E)} \right) \\ h_0(x,E,\xi') = \dfrac{1-\theta(E)}{\sigma(E)} \left\langle f_0(x,\cdot,d(\cdot,E),\xi')\sigma(\cdot,E) \right\rangle \\ \quad + \dfrac{\theta(E)}{2\sigma(E)} \left\langle \left\{ f_0(x,\cdot,d(\cdot,E),\xi') + f_0(x,\cdot,d(\cdot,-E),\xi') \right\} \sigma(\cdot,E) \right\rangle, \end{array} \right. \tag{6.13}$$

où $\theta(E) = 1$ si $E^2 \leq 2v_m$, 0 sinon, la fonction h est l'unique solution (pour presque tout (E,ξ')) de

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t h + \begin{pmatrix} \xi^{\#}(E) \\ \xi' \end{pmatrix} \cdot \nabla_x h = 0, \\ h_{|t=0} = h_0. \end{array} \right. \tag{6.14}$$

Remarque 6.3 Remarquons que, ici, $\langle \, \rangle$ désigne la moyenne par rapport à $y_1 \in [-1,1]$. ■

En suivant ensuite une méthode d'homogénéisation non locale nous obtenons le

Théorème 6.4 *Sous les hypothèses (6.1), (6.3) et (6.4), il existe une fonction $D(\xi)$ et une famille de mesures paramétrées positives ν_ξ, ayant leur support dans un intervalle borné $\Lambda_{\xi_1} \subset I\!R$ telle que, f^ε converge faiblement vers f solution de*

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t f + \begin{pmatrix} D(\xi) \\ \xi' \end{pmatrix} \cdot \nabla_x f - \displaystyle\int_0^t ds \int d\nu_\xi(\lambda)\, \partial_{x_1}^2 f(s, x_1 + \lambda(t-s), x' + \xi'(t-s), \xi), \\ f_{t=0} = f_1 \left\langle a^{\#}(\cdot,\xi) \right\rangle, \end{array} \right. \tag{6.15}$$

où $x = (x_1, x')$ et où $D(\xi)$, $a^{\#}(y,\xi)$ et Λ_{ξ_1} sont donnés par

$$\left\{ \begin{array}{l} \Lambda_{\xi_1} = \left[-|\xi^{\#}(\cdot,\xi_1)|_\infty, \, |\xi^{\#}(\cdot,\xi_1)|_\infty \right], \ \text{où} \\ \quad \xi^{\#}(y,\xi_1) = \xi^{\#}(\mathcal{E}(y,\xi_1)) \\ a^{\#}(y,\xi) = a^{\#}(\mathcal{E}(y_1,\xi_1),\xi') \ \text{où} \\ \quad a^{\#}(E,\xi') = \dfrac{1-\theta(E)}{\sigma(E)} \left\langle a(\cdot, d(\cdot,E), \xi')\, \sigma(\cdot,E) \right\rangle \\ \qquad\qquad + \dfrac{\theta(E)}{2\sigma(E)} \left\langle (a(\cdot, d(\cdot,E),\xi') + a(\cdot, d(\cdot,-E),\xi'))\, \sigma(\cdot,E) \right\rangle \\ D(\xi) = \left\langle a^{\#}(\cdot,\xi) \xi^{\#}(\cdot,\xi_1) \right\rangle \left\langle a^{\#}(\cdot,\xi) \right\rangle^{-1} \end{array} \right. \tag{6.16}$$

Démonstration du théorème 6.2 - L'égalité (6.12) est une application triviale du lemme 2.4.
La démonstration de (6.14) se déroule de manière analogue au cas unidimensionel. Nous la résumons ici.
Pour toute fonction régulière $\psi(t,x,E,\xi')$, nous définissons la fonction $\varphi(t,x,E,\xi') = \frac{\theta(E)}{2}\left(\psi(t,x,E,\xi') + \psi(t,x,-E,\xi')\right) + (1-\theta(E))\psi(t,x,E,\xi')$. La fonction φ, prise au point $E = \mathcal{E}(y,\xi_1)$ (définie par (2.29)), vérifie l'équation de contrainte. En conséquence, nous utilisons comme fonctions test les φ prises en $E = \mathcal{E}(\frac{x}{\varepsilon},\xi_1)$. Le terme de contrainte disparait de la formulation faible. En faisant ensuite tendre ε vers 0, nous avons

$$\int_{\mathcal{Q}\times[-1,1]} F\left(\partial_t \varphi + \xi \nabla_x \varphi\right) d\mathcal{Q} dy = -\int_{\mathcal{O}\times[-1,1]} f_0 \varphi(0)\, d\mathcal{O} dy \tag{6.17}$$

Nous remplaçons ensuite F et φ par leur expression et nous effectuons le changement de variables $(y_1, \xi_1) \to (y_1, E)$ avec $E = \mathcal{E}(y_1, \xi_1)$, nous obtenons

$$\left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\int_{\mathbb{Q}\times[-1,1]} h\, \partial_t \left(\tfrac{\theta(E)}{2}(\psi(E) + \psi(-E)) + (1-\theta(E))\psi(E) \right) |E| \sigma(y_1, E) d\mathbb{Q}\, dy \\ \displaystyle + \int_{\mathbb{Q}\times[-1,1]} h \begin{pmatrix} \tfrac{E}{|E|}\sqrt{E^2 - 2v(y_1)} \\ \xi' \end{pmatrix} \cdot \nabla_x \left(\tfrac{\theta(E)}{2}(\psi(E) + \psi(-E)) + (1-\theta(E))\psi(E) \right) \\ \hfill |E| \sigma(y_1, E) d\mathbb{Q}\, dy \\ \displaystyle = -\int_{\mathbb{O}\times[-1,1]} f_0 \left(\tfrac{\theta(E)}{2}(\psi(E) + \psi(-E)) + (1-\theta(E))\psi(E) \right) |E| \sigma(y_1, E) d\mathbb{O}\, dy \end{array} \right. \tag{6.18}$$

En utilisant les propriétés de parité et en intégrant par rapport à $y_1 \in [-1, 1]$, nous obtenons une formulation faible de (6.14). Le théorème 6.2 est ainsi prouvé. ■

Démonstration du théorème 6.4 - En appliquant la transformation de Laplace en temps et celle de Fourier en position à l'équation (6.14), nous obtenons

$$\mathcal{LF}(h) = \mathcal{F}(f_1) a^{\#}(y, \xi_1) \left(p + 2i\pi k' \cdot \xi' + 2i\pi k_1 \xi^{\#}(y, \xi) \right)^{-1}, \tag{6.19}$$

où p et $k = (k_1, k')$ sont respectivement les variables duales de t et x, et où $a^{\#}(y, \xi_1) = a^{\#}(\mathcal{E}(y, \xi_1))$ et $\xi^{\#}(y, \xi_1) = \xi^{\#}(\mathcal{E}(y, \xi_1))$. En utilisant la fonction ϕ introduite en (2.63), nous avons

$$\mathcal{LF}(h) = \mathcal{F}(f_1) \frac{1}{2i\pi k_1} \phi \left(y, \xi_1, \frac{p + 2i\pi k' \cdot \xi'}{2i\pi k_1} \right). \tag{6.20}$$

La moyenne de ϕ par rapport à y étant donnée par (2.64) nous avons

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{LF}(h)(\mathcal{E}(\cdot, \xi)) \rangle \;=\; & \mathcal{F}(f_1) \left\langle a^{\#}(\cdot, \xi_1) \right\rangle \Big\{ p + 2i\pi k' \cdot \xi' + 2i\pi k_1 D(\xi) \\ & -(2i\pi k_1)^2 \int (p + 2i\pi k' \cdot \xi' + 2i\pi k_1 \lambda)^{-1} d\nu_\xi(\lambda) \Big\}^{-1}, \end{aligned} \tag{6.21}$$

En appliquant alors les transformations de Fourier et Laplace inverses, nous obtenons le théorème 6.4. ■

7 Un exemple donnant un système hamiltonien intégrable

7.1 Introduction, résultats

Cette section est vouée à la caractérisation du noyau $\mathbb{K}$ de l'opérateur de contrainte et à l'homogénéisation de l'équation (1.1) lorsque le potentiel $u(y)$ est donné par

$$u(y) = \sum_{i=1}^{n} u_i(y_i), \tag{7.1}$$

où y_i désigne la $i^{ième}$ composante de $y \in Y = [-1,1]^n$. Chaque fonction $u_i(y_i) \in C_p^0(Y_i) \cap C^2([-1,1])$ et vérifie une hypothèse similaire à celle effectuée pour les potentiels des sections précédentes.

$$0 \leq u_i(y_i) \leq u^i_{Max},\ u_i(0) = 0,\ u_i(\pm 1) = u^i_{Max}, \tag{7.2}$$

0 étant le seul extrémum dans $Y_i = [-1,1]$.

Dans ces conditions l'équation à homogénéiser (1.1) devient

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t f^\varepsilon + \xi \cdot \nabla_x f^\varepsilon - \dfrac{1}{\varepsilon} \begin{pmatrix} u_1'(\frac{x_1}{\varepsilon}) \\ \vdots \\ u_n'(\frac{x_n}{\varepsilon}) \end{pmatrix} \cdot \nabla_\xi f^\varepsilon = 0, \\ f^\varepsilon_{|t=0} = f^\varepsilon_0. \end{array} \right. \tag{7.3}$$

Pour simplifier les notations, nous écrirons

$$U'(y) = \begin{pmatrix} u_1'(y_1) \\ \vdots \\ u_n'(y_n) \end{pmatrix}. \tag{7.4}$$

Comme dans les cas précédents, l'homogénéisation se déroule en deux étapes. Au cours de la première, où nous déterminons l'équation du profil, nous supposons que

$$f_0^\varepsilon(x,\xi) = f_0(x, \frac{x}{\varepsilon}, \xi),\ f_0 \in L^2(\mathcal{O}; C_p(Y)),\ f_0 \geq 0. \tag{7.5}$$

Puis pour la seconde étape où nous suivons une méthode d'homogénéisation non locale, nous supposons que

$$\begin{array}{l} f_0(x,y,\xi) = f_1(x) a(y,\xi) \\ \text{avec } f_1 \in L^2(\mathbb{R}^n),\ f_1 \geq 0;\ a \in (L^\infty \cap L^2)(\mathbb{R}^n; C_p(Y)) \text{ et } a \geq 0. \end{array} \tag{7.6}$$

Remarque 7.1 L'élément essentiel qui permet de caractériser le noyau $\mathbb{K}$ pour cet exemple, n'est pas le caractère tensoriel de (7.3), mais le fait que le système hamiltonien (5.3) soit intégrable.
La méthode que nous suivons pourrait être adaptée à tout exemple de potentiel générant un système intégrable. Cependant, nous n'avons pas trouvé dans la littérature d'autre exemple de potentiel périodique tel que le système (5.3) soit intégrable. ■

Remarque 7.2 L'exemple bidimensionnel du "cat eye's flow" :

$$u(y) = 2\left(\sin(\pi y_1)\cos(\pi y_2) + \delta\cos(\pi y_1)\sin(\pi y_2)\right), \tag{7.7}$$

se ramène au cas présentement étudié par un changement de variables. Nous étudierons cet exemple en fin de section. ■

Nous définissons pour chaque $i = 1, ..., n$, les fonctions $\sigma_i(y_i, E_i)$ et $\sigma_i(E_i)$ par

$$\left\{\begin{array}{l} \sigma_i(y_i, E_i) = \left(E_i^2 - 2u_i(y_i)\right)^{-1/2} \text{ pour } E_i^2 > 2u_i(y_i),\ 0 \text{ ailleurs}, \\ \sigma_i(E_i) = \langle\sigma_i(\cdot, E_i)\rangle = \dfrac{1}{|Y_i|}\displaystyle\int_{Y_i} \sigma_i(y_i, E_i)\, dy_i\ . \end{array}\right. \tag{7.8}$$

Remarque 7.3 Les propriétés 2.5, 2.6 et 2.7, établies dans le cas de la dimension un, sont ici vérifiées pour chaque i. ■

Nous définissons également les fonctions $\theta_i(E_i)$ par

$$\theta_i(E_i) = 1 \text{ si } E_i^2 \leq 2u^i_{Max},\ \ 0 \text{ sinon}. \tag{7.9}$$

Avec ces notations, le comportement du profil F est caractérisé par le

Théorème 7.4 *Nous définissons*

$$\xi^{\#}(E) = \begin{pmatrix} \frac{E_1}{|E_1|}\frac{1-\theta_i(E_i)}{\sigma_1(E_1)} \\ \vdots \\ \frac{E_n}{|E_n|}\frac{1-\theta_n(E_n)}{\sigma_n(E_n)} \end{pmatrix}, \tag{7.10}$$

et

$$h_0(x,E) = \frac{1}{\prod_{i=1}^{n}\sigma_i(E_i)} \left\langle \left\{ \frac{1}{2}\prod_{i=1}^{n}\theta_i(E_i)\left(f_0(x,\cdot,d(\cdot,E)+f_0(x,\cdot,d(\cdot,-E)\right)\right.\right.$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(1-\theta_j(E_j))\prod_{i\neq j}\theta_i(E_i)\left(f_0(x,\cdot,d(\cdot,E_j,E_j^c)+f_0(x,\cdot,d(\cdot,E_j,-E_j^c)\right)$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{\substack{k,j=1\\ k\neq j}}^{n}(1-\theta_j(E_j))(1-\theta_k(E_k))$$
$$\prod_{i\neq j,k}\theta_i(E_i)\left(f_0(x,\cdot,d(\cdot,E_j,E_k,E_{jk}^c)+f_0(x,\cdot,d(\cdot,E_j,E_k,-E_{jk}^c)\right)$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{\substack{l,k,j=1\\ l\neq k\neq j\\ l\neq j}}^{n}(1-\theta_j(E_j))(1-\theta_k(E_k))(1-\theta_l(E_l))$$
$$\prod_{i\neq j,k,l}\theta_i(E_i)\left(f_0(x,\cdot,d(\cdot,E_j,E_k,E_l,E_{jkl}^c)+f_0(x,\cdot,d(\cdot,E_j,E_k,E_l,-E_{jkl}^c)\right)$$
$$+\cdots\cdot\cdot$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\theta_j(E_j)\prod_{i\neq j}(1-\theta_i(E_i))\left(f_0(x,\cdot,d(\cdot,E_j,E_j^c)+f_0(x,\cdot,d(\cdot,-E_j,E_j^c)\right)$$
$$\left.\left. +\prod_{i=1}^{n}(1-\theta(E_i))f_0(x,\cdot,d(\cdot,E))\right\}\prod_{i=1}^{n}\sigma_i(\cdot,E_i)\right\rangle \quad . \tag{7.11}$$

où $E_j^c = (E_1,...,E_{j-1},E_{j+1},...,E_n)$, $E_{jk}^c = (E_1,...,E_{j-1},E_{j+1},...,E_{k-1},E_{k+1},...,E_n)$, *etc... et où* $d(\cdot,\cdot)$ *est défini dans la suite par (7.32).*
Sous les hypothèses (7.1),(7.2) et (7.5) il existe une fonction

$$h(t,x,E)\in L^\infty(0,T\,;L^2(I\!R_x^n\times I\!R_E^n,\prod_{i=1}^{n}|E_i|\sigma_i(E_i)\,dxdE)), \tag{7.12}$$

qui pour tout i, à E_i^c *fixé, vérifie* $h(t,x,E_i,E_i^c) = h(t,x,-E_i,E_i^c)$ $\forall Ei$ *tel que* $E_i^2 < 2u_{Max}^i$, *unique solution de l'équation de transport paramétrée par E,*

$$\left\{\begin{array}{l}\partial_t h+\xi^\#(E)\cdot\nabla_x h=0,\\ h_{|t=0}=h_0,\end{array}\right. \tag{7.13}$$

telle que

$$F(t,x,y,\xi)=h(t,x,\mathcal{E}(y,\xi)), \tag{7.14}$$

avec

$$\mathcal{E}(y,\xi) = \begin{pmatrix} \mathcal{E}_1(y_1,\xi_1) \\ \vdots \\ \mathcal{E}_n(y_n,\xi_n) \end{pmatrix} \tag{7.15}$$

où

$$\mathcal{E}_i(y_i,\xi_i) = \frac{\xi_i}{|\xi_i|}\sqrt{\xi_i^2 + 2u_i(y_i)} \tag{7.16}$$

Remarque 7.5 Dans un souci de clarté, nous exprimons la fonction h_0 dans le cas de la dimension 2.
Si $n = 2$ nous avons

$$\begin{aligned} h_0(x,E) = \frac{1}{\sigma_1(E_1)\sigma_2(E_2)} \Bigg\langle \Bigg\{ & \frac{1}{2}\theta_1(E_1)\theta_2(E_2)\left(f_0(x,\cdot,d(\cdot,E) + f_0(x,\cdot,d(\cdot,-E))\right) \\ & + \frac{1}{2}\theta_1(E_1)(1-\theta_2(E_2))\left(f_0(x,\cdot,d(\cdot,E_1,E_2)) + f_0(x,\cdot,d(\cdot,-E_1,E_2))\right) \\ & + \frac{1}{2}(1-\theta_1(E_1))\theta_2(E_2)\left(f_0(x,\cdot,d(\cdot,E_1,E_2)) + f_0(x,\cdot,d(\cdot,E_1,-E_2))\right) \\ & + (1-\theta_1(E_1))(1-\theta_2(E_2))f_0(x,\cdot,d(\cdot,E_1,E_2)) \Bigg\} \sigma_1(\cdot,E_1)\sigma_2(\cdot,E_2) \Bigg\rangle , \end{aligned} \tag{7.17}$$

■

Remarque 7.6 Comme dans le cas de la dimension un, la fonction $h_0 \geq 0$ car $f_0 \geq 0$ et $\xi_i^{\#}(E_i) < \infty$, $\forall E_i < \infty$. Ceci permet de déduire l'existence et l'unicité de la solution de (7.13). ■

Remarque 7.7 Le système (7.13) implique que le profil F vérifie

$$\left\{ \begin{array}{l} F \in \mathbb{K}, \\ \partial_t F + \xi^{\#}(y,\xi)\cdot\nabla_x F = 0, \\ F_{|t=0} = h_0(x,\mathcal{E}(y,\xi)), \end{array} \right. \tag{7.18}$$

avec

$$\xi^{\#}(y,\xi) = \xi^{\#}(\mathcal{E}(y,\xi)). \tag{7.19}$$

■

En intégrant ensuite l'équation (7.13), avec E remplacé par $\mathcal{E}(y,\xi)$, (ou bien, ce qui est équivalent (7.18)) par rapport à y, nous trouvons l'équation satisfaite par la limite faible f de f^ε. Pour cela, nous utilisons une méthode d'homogénéisation non locale. Nous déduisons alors le

Théorème 7.8 *Sous les hypothèses (7.1), (7.2) et (7.6), il existe une fonction* $D(\xi)$ *et une famille de mesures paramétrées positives* $\nu_\xi(\lambda,\omega)$ *à support dans* $\Lambda_\xi \times S^{n-1}$ *telle que la limite faible* f *de* f^ε *soit élément d'un couple* (f,w) *unique solution de*

$$\begin{cases} \partial_t f + D(\xi)\cdot\nabla_x f - C_n \displaystyle\int_{\Lambda_\xi\times S^{n-1}} d\nu_\xi(\lambda,\omega)\,\partial_r(-\partial_r^2)^{(n-1)/4} w_{|r=\omega\cdot x} = 0, \\ \partial_t w + \lambda\partial_r w + \partial_r(-\partial_r^2)^{(n-1)/4}\mathcal{R}(f(t,\cdot,\cdot,\xi))(r,\omega) = 0, \\ f_{|t=0} = f_1\left\langle a^\#(\cdot,\xi)\right\rangle, \\ w_{t=0} = 0, \end{cases} \tag{7.20}$$

où $\mathcal{R}$ *désigne la transformation de Radon par rapport à* x *et où* $C_n = \frac{1}{2}(2i\pi)^{n-1}$. $a^\#(y,\xi)$ *est par définition égale à* $a^\#(\mathcal{E}(y,\xi))$ *avec* $a^\#(E)$ *défini par*

$$h_0(x,E) = f_1(x)a^\#(E). \tag{7.21}$$

7.2 Démonstration du théorème 7.4

Cette preuve se décompose en deux parties. La première consiste à caractériser l'ensemble des fonctions satisfaisant l'équation de contrainte (5.2). Ensuite, dans une seconde étape, nous construisons des fonctions test satisfaisant la contrainte. En injectant celles-ci dans la formulation faible de l'équation (7.3), nous obtenons l'équation satisfaite par le profil.

Sous nos hypothèses, l'équation de contrainte (5.2) s'écrit

$$\xi\cdot\nabla_y F - U'(y)\cdot\nabla_\xi F = 0. \tag{7.22}$$

L'ensemble $\mathbb{K}$ désigne les fonctions appartenant à $L^2(\mathbb{R}^n, L^2_p(Y))$ et vérifiant (7.22). Le lemme suivant caractérise cet ensemble

Lemme 7.9 *Si les hypothèses (7.1) et (7.2) sont satisfaites, une fonction* $G(y,\xi)\in\mathbb{K}$ *si et seulement si il existe une fonction* $h \in L^2(\mathbb{R}^n_E, \prod_{i=1}^n |E_i|\sigma_i(E_i)\,dE)$ *vérifiant pour tout* E_i^c *fixé,* $h(E_i,E_i^c) = h(-E_i,E_i^c)$, $\forall E_i,\ E_i^2 < 2u^i_{Max}$, *telle que*

$$G(y,\xi) = h(\mathcal{E}(y,\xi)), \tag{7.23}$$

où $\mathcal{E}(\cdot,\cdot)$ *est défini par (7.15).*

Avant de démontrer ce lemme, nous expliquons les raisons pour lesquelles il est vrai en étudiant le comportement des trajectoires du système hamiltonien associé à l'équation de contrainte.
Une fonction $G(y,\xi)\in\mathbb{K}$ si et seulement si elle est constante le long de chaque caractéristique $(\Upsilon(t,y_0,\xi_0), \Xi(t,y_0,\xi_0))$ du système hamiltonien

$$\begin{cases} \dot\Upsilon(t) = \Xi(t),\quad \dot\Xi(t) = U'(\Upsilon(t)), \\ \Upsilon(0) = y_0,\quad \Xi(0) = \xi_0. \end{cases} \tag{7.24}$$

Nous remarquons que ce système se découple en n sous-systèmes posés dans $Y_i \times \mathbb{R}_i$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\Upsilon}_i(t) = \Xi_i(t), \;\; \dot{\Xi}_i(t) = u_i'(\Upsilon_i(t)), \\ \Upsilon_i(0) = y_{0i}, \;\; \Xi_i(0) = \xi_{0i}, \end{array} \right. \tag{7.25}$$

où Υ_i et Ξ_i désigne la $i^{ième}$ composante de Υ et de Ξ. Nous allons commencer par étudier les systèmes (7.25). A chacun d'entre eux, est associé le hamiltonien $H_i(y_i, \xi_i) = \xi_i^2 + 2u_i(y_i)$. Dans le plan $Y_i \times \mathbb{R}_i$, les courbes solutions de (7.25) vérifient $H_i(y_i, \xi_i) = E_i^2 = H_i(y_{i0}, \xi_{i0})$. Dans le cas où $E_i^2 \leq 2u_{Max}^i$, une seule courbe est associée à E_i^2. Cette courbe est fermée. En revanche, lorsque $E_i^2 > 2u_{Max}^i$, deux courbes fermées sont associées à E_i^2.
La période τ_i de parcours de la caractéristique définie par E_i^2 est une fonction de E_i^2 ayant l'allure présentée sur la figure 7 (c.f. par exemple V.I.Arnold [8], chapitre 2).

figure=dessins/figha.ps,height=55mm

FIGURE 7 – Période en fonction de l'énergie.

Nous allons maintenant utiliser ces faits pour conclure sur la géométrie des caractéristiques du système (7.24).
En premier lieu, vu que chaque (Υ_i, Ξ_i) est une courbe fermée caractérisée par la relation $H_i(y_i, \xi_i) = E_i^2$, la caractéristique (Υ, Ξ) est située sur un tore T_E défini comme le produit de ces courbes. Ce tore a pour équation $H_i(y_i, \xi_i) = E_i^2$, $i = 1, ..., n$.
Ensuite, τ_i étant une fonction continue de E_i^2 (sauf en un point) et non constante, pour presque tout $E = (E_1,...,E_n)$ les périodes $(\tau_1, ..., \tau_n)$ sont incommensurables. Nous pouvons alors déduire que pour presque tout E, les caractéristiques du système hamiltonien (7.24) situées sur le tore T_E défini par $H_1(y_1, \xi_1) = E_1^2$,..., $H_n(y_n, \xi_n) = E_n^2$, sont denses sur celui-ci.

Nous déduisons maintenant des considérations ci-dessus la forme de la fonction $G \in \mathbb{K}$.
Le fait que G soit constante le long des courbes situées sur les tores définis par $H_i(y_i, \xi_i) = E_i^2$, $i = 1, ..., n$, implique que $G(y, \xi)$ s'exprime en fonction des hamiltoniens $H_1(y_1, \xi_1), ..., H_n(y_n, \xi_n)$ et de y.
Sachant que pour $E_i^2 > 2u_{Max}^i$ deux courbes correspondent au niveau E_i^2, dès lors qu'une composante E_i de E vérifie $E_i^2 > 2u_{Max}^i$, plusieurs tores correspondent à ce niveau. Pour les distinguer, nous introduisons les fonctions signes $\dfrac{\xi_i}{|\xi_i|}$. Nous déduisons alors qu'il existe $h(y, E)$ vérifiant

$$G(y, \xi) = h(y, \mathcal{E}(y, \xi)), \tag{7.26}$$

où $\mathcal{E}$ est défini par (7.15).
Sachant de plus que lorsque $E_i^2 \leq 2u_{Max}^i$, il n'y a plus qu'une seule courbe correspondant à E_i^2 la fonction $h(y, E)$ doit vérifier

$$h(y, E_i, E_i^c) = h(y, -E_i, E_i^c) \tag{7.27}$$

pour tout E_i^c fixé et pour tout $E_i,\ E_i^2 \leq 2u^i_{Max}$.

Enfin, le fait que les caractéristiques soient denses sur un tore T_E défini par E, implique que G est constante sur ce tore.
En effet considérons un niveau d'énergie E, tel que les caractéristiques sont denses sur T_E. Nous introduisons alors sur ce tore le système de coordonnées $\phi = (\phi_1, ..., \phi_n)$, donné par le théorème de Liouville. Dans les variables (ϕ, E), le système s'écrit

$$\dot{E} = 0 \qquad \dot{\phi} = \Omega(E) = \begin{pmatrix} \omega_1(E) \\ \vdots \\ \omega_n(E) \end{pmatrix} \tag{7.28}$$

Nous considérons alors la fonction $\tilde{h}(\phi)$, expression de $h(y, E)$ dans le système $\phi = (\phi_1, ..., \phi_n)$. Le fait que $\tilde{h}(\phi)$ est constante sur les caractéristiques, s'écrit

$$\tilde{h}(\phi) = \tilde{h}(\phi + C\Omega), \text{ pour } C \in \mathbb{R}. \tag{7.29}$$

En utilisant ensuite un noyau régularisant sur T_E, $\rho^\delta(\phi)$, la fonction $\tilde{h}^\delta(\phi) = \rho^\delta(\phi) * \tilde{h}(\phi)$ est régulière et vérifie également $\tilde{h}^\delta(\phi + C\Omega) = \tilde{h}^\delta(\phi)$, pour C réel. Elle est donc constante sur les caractéristiques et donc (comme elle est régulière) sur T_E. Comme $\tilde{h}^\delta(\phi) \to \tilde{h}(\phi)$ dans $L^2(T_E)$ nous déduisons que $\tilde{h}(\phi)$ est bien constante sur ce tore.

Les caractéristiques étant denses sur T_E pour presque tout E nous déduisons que la fonction $h(y, E)$ définie par (7.26) est indépendante de y presque partout. ■

Après ces explications sur la validité du lemme, nous passons maintenant à sa démonstration.

Démonstration du lemme 7.9 - Celle-ci se décompose en trois étapes. Dans la première, nous montrons que si $G \in \mathbb{K}$, il existe une fonction $h(E)$ telle que (7.23) soit vérifiée.
Ensuite nous montrons qu'une fonction $G(y, \xi)$ définie via une fonction $h(E)$ par (7.23) ne vérifie l'équation de contrainte que si $h(E)$ satisfait $h(E_i, E_i^c) = h(-E_i, E_i^c)\ \forall E_i^c$ fixé et $\forall E_i,\ E_i^2 \leq 2u^i_{Max}$. Nous rappelons que $E_i^c = (E_1, ..., E_{i-1}, E_{i+1}, ..., E_n)$.
Enfin nous cherchons à quel espace h appartient.

Etape 1 - Nous commençons par prouver le

Lemme 7.10 *Pour toute fonction $G(y, \xi) \in \mathbb{K}$, il existe une fonction $h(E)$ telle que*

$$G(y, \xi) = h(\mathcal{E}(y, \xi)). \tag{7.30}$$

Démonstration - Introduisons en premier lieu le changement de variables défini de $(Y \times (\mathbb{R}^n_\xi \setminus \{0\}))$ à valeurs dans $\{(y, E),\ E_i^2 - 2u_i(y_i) > 0, \text{ pour } i = 1, ..., n\}$ qui à (y, ξ) associe (y, E) par

$$E_i = \mathcal{E}_i(y_i, \xi_i) = \frac{\xi_i}{|\xi_i|}\sqrt{\xi_i^2 + 2u_i(y_i)},\ i = 1, ..., n. \tag{7.31}$$

L'application inverse $\{(y,E),\ E_i^2 - 2u_i(y_i) > 0,\ i = 1,...,n\} \to (Y \times (\mathbb{R}_\xi^n \setminus \{0\}))$ est définie par

$$\xi_i = d_i(y_i, E_i) = \frac{E_i}{|E_i|}\sqrt{E_i^2 - 2u_i(y_i)},\ i = 1,...,n. \tag{7.32}$$

La formule (7.32) nous permet d'exprimer $dyd\xi$ en fonction de $dydE$:

$$\begin{aligned} dyd\xi &= \prod_{i=1}^{n} |E_i| \mathcal{X}(\mathcal{E}_\rangle^\in - \in\sqcap_\rangle(\dagger_\rangle)) \left(\mathcal{E}_\rangle^\in - \in\sqcap_\rangle(\dagger_\rangle)\right)^{-\infty/\in} \lceil\dagger\lceil\mathcal{E} \\ &= \prod_{i=1}^{n} |E_i| \sigma_i(y_i, E_i) dydE, \end{aligned} \tag{7.33}$$

$\mathcal{X}$ désignant la fonction de Heaviside.

Nous introduisons ensuite un second changement de variables. Celui-ci permet de transformer l'équation de contrainte en une équation dans laquelle E n'intervient que comme un paramètre. Nous introduisons donc la bijection $(y,E) \in \{(y,E) \in Y \times \mathbb{R}_E^n,$ $E_i^2 - 2u_i(y_i) \geq 0,\ i = 1,...,n\} \to (z,E) \in Z \times \mathbb{R}_E^n$ avec $Z = [-1,1]^n$, défini par

$$\left\{ \begin{aligned} z_i = \mathcal{Z}_i(y_i, E_i) &= \frac{1}{|E_i|\sigma_i(E_i)} \int_0^{y_i} \frac{|E_i|}{\sqrt{E_i^2 - 2u_i(\tilde{y}_i)}} d\tilde{y}_i + \gamma_i(E_i) \\ &= \frac{1}{|E_i|\sigma_i(E_i)} \int_0^{y_i} |E_i| \sigma_i(\tilde{y}_i, E_i)\, d\tilde{y}_i + \gamma_i(E_i) \end{aligned} \right. \tag{7.34}$$

où $\gamma_i(E_i)$ est telle que $Z = [-1,1]^n$. Nous exprimons alors $dzdE$ en fonction de $dydE$ et nous obtenons

$$dzdE = \prod_{i=1}^{n} \frac{|E_i|\sigma_i(y_i, E_i)}{|E_i|\sigma_i(E_i)}\, dydE \tag{7.35}$$

En comparant alors les formules (7.35) et (7.33), nous remarquons que nous avons construit un changement de variables $(y,\xi) \in Y \times \mathbb{R}_\xi^n \to (z,E) \in Z \times \mathbb{R}_E^n$ tel que

$$dyd\xi = \prod_{i=1}^{n} |E_i| \sigma_i(E_i)\, dzdE \tag{7.36}$$

Ces changements de variables introduits, nous allons les utiliser dans la formulation faible de l'équation de contrainte.

Si une fonction $G \in \mathbb{K}$, G satisfait

$$\int_{Y \times \mathbb{R}_\xi^n} G(y,\xi)\, (\xi \cdot \nabla_y \psi - U'(y) \cdot \nabla_\xi \psi)\, dyd\xi = 0, \tag{7.37}$$

pour toute fonction test dans $C^1(\mathbb{R}_\xi^n, C_p^1(Y))$. Nous allons construire des fonctions test particulières :

Pour toute fonction $\tilde{\varphi}(z,E) \in C^1_0(\mathbb{R}^n_E, C^1_0((-1,1)^n))$, nous définissons

$$\left\{ \begin{array}{ll} \varphi(y,E) = \tilde{\varphi}(\mathcal{Z}(y,E),E), & \text{et} \\ \psi(y,\xi) = \varphi(y,\mathcal{E}(y,\xi)). & \end{array} \right. \tag{7.38}$$

Sachant que $\tilde{\varphi}$ ainsi que ses dérivées premières s'annulent en $z_i = \pm 1$, les fonctions $\varphi(y,E) \in C^1_0(\{(y,E),\ E_i^2 - 2u_i(y_i) > 0\}$, ainsi les fonctions ψ définies par (7.38) vérifient $\psi \in C^1(\mathbb{R}^n_\xi, C^1_p(Y))$ et de plus, elles vérifient

$$(\xi \cdot \nabla_y \psi - U' \cdot \nabla_\xi \psi)(y,\xi) = \xi \cdot (\nabla_y \varphi)(y, \mathcal{E}(y,\xi)). \tag{7.39}$$

En effet,

$$\begin{aligned} \partial_{y_i}\psi &= \partial_{y_i}\varphi + \partial_{y_i}\mathcal{E}_i(y_i,E_i)\,\partial_{E_i}\varphi \\ &= \partial_{y_i}\varphi + \frac{u_i'(y_i)}{\frac{\xi}{|\xi|}\sqrt{\xi_i^2 + 2u_i(y_i)}}\,\partial_{E_i}\varphi, \end{aligned} \tag{7.40}$$

et

$$\begin{aligned} \partial_{\xi_i}\psi &= \partial_{\xi_i}\mathcal{E}_i(y_i,E_i)\partial_{E_i}\varphi \\ &= \frac{|\xi_i|}{\sqrt{\xi_i^2 + 2u_i(y_i)}}\partial_{E_i}\varphi, \end{aligned} \tag{7.41}$$

et donc $\displaystyle\sum_{i=1}^n \xi_i \partial_{y_i}\psi - u_i(y_i)\partial_{\xi_i}\psi = \xi \cdot \nabla_y \varphi$, ce qui prouve (7.39).

Nous utilisons alors les fonctions test définies par (7.38) dans la formulation faible (7.37) et nous obtenons

$$\int_{Y\times\mathbb{R}^n_\xi} G(y,\xi)\,\xi\cdot(\nabla_y\varphi)(y,\mathcal{E}(y,\xi))\,dyd\xi = 0. \tag{7.42}$$

En utilisant ensuite le changement de variables (7.31), l'équation ci-dessus devient

$$\int_{Y\times\mathbb{R}^n_E} G(y,d(y,E))\,d(y,E)\cdot\nabla_y\varphi(y,E)\prod_{i=1}^n |E_i|\sigma_i(y_i,E_i)\,dydE \tag{7.43}$$

Nous remarquons alors

$$\partial_{y_i}\varphi(y,E) = \frac{\sigma_i(y_i,E_i)}{\sigma_i(E_i)}\,(\partial_{z_i}\tilde{\varphi})(\mathcal{Z}(y,E),E), \tag{7.44}$$

et sachant que $d_i(y_i,E_i)\sigma_i(y_i,E_i) = E_i/|E_i|$ nous déduisons

$$\begin{aligned} &d(y,E)\cdot\nabla_y\varphi(y,E) = \mathcal{N}(E)\cdot(\nabla_z\tilde{\varphi})(\mathcal{Z}(y,E),E), \\ &\text{où } \mathcal{N}(E) = (\mathcal{N}_1(E_1),..,\mathcal{N}_n(E_n)) \text{ avec } \mathcal{N}_i(E_i) = \frac{E_i}{|E_i|\sigma_i(E_i)}\ . \end{aligned} \tag{7.45}$$

Ainsi, en effectuant le changement de variables (7.34), l'équation (7.43) devient

$$\int_{Z\times \mathbb{R}^n_E} G(\mathcal{Z}^{-1}(z,E), d(\mathcal{Z}^{-1}(z,E),E))\,\mathcal{N}(E)\cdot\nabla_z\tilde{\varphi}(z,E)\prod_{i=1}^n |E_i|\sigma_i(E_i)\,dzdE = 0, \tag{7.46}$$

où $\mathcal{Z}^{-1}(z,E)$ désigne l'application inverse de $\mathcal{Z}(y,E)$, et ce pour toute fonction $\tilde{\varphi} \in C^1_0(\mathbb{R}^n_E;\, C^1_0((-1,1)^n))$. En définissant alors

$$h(z,E) = G(\mathcal{Z}^{-1}(z,E), d(\mathcal{Z}^{-1}(z,E),E)), \tag{7.47}$$

nous obtenons que $h(z,E)$ vérifie l'équation

$$\mathcal{N}(E)\cdot\nabla_z h = 0. \tag{7.48}$$

La relation (7.48) nous permet alors de conclure que h est indépendante de z. En effet, pour presque tout E, $h(z,E) \in L^2(Z)$. Ainsi, en écrivant $h(z,E)$ sous la forme d'une série de Fourier,

$$h(z,E) = \sum_{m\in\mathbb{N}^n} H_m(E)e^{im\cdot z}, \tag{7.49}$$

nous obtenons

$$\mathcal{N}(E)\cdot\nabla_z h = i\sum_{m\in\mathbb{N}^n} H_m(E)m\cdot\mathcal{N}(E)e^{im\cdot z}. \tag{7.50}$$

Donc la relation (7.48) implique

$$H_m(E)\; m\cdot\mathcal{N}(E) = 0,\ \ \forall m\in\mathbb{N}^n, m\neq 0. \tag{7.51}$$

Vu la définition de $\sigma_i(E_i)$, nous déduisons qu'elle est strictement croissante pour $E_i < -\sqrt{2u_m}$ et pour $0 < E_i < \sqrt{2u_m}$ et strictement décroissante pour $-\sqrt{2u_m} < E_i < 0$ et pour $E_i > \sqrt{2u_m}$. De plus, elle est continue sur $\mathbb{R}\setminus\{\pm\sqrt{2u_m}\}$. Nous en déduisons alors que pour tout $m \neq 0$, pour presque tout E, $m\cdot\mathcal{N}(E)\neq 0$. (En d'autres termes, le flot associé à $\mathcal{N}(E)$ est ergodique pour presque tout E, (c.f.[1]).) Nous obtenons donc que $H_m(E) = 0$, $\forall m\in\mathbb{N}^n, m\neq 0$. Nous concluons alors que $h(z,E) = H_0(E)$ et donc que $h(z,E)$ ne dépend que de E.

Ainsi en conclusion, $\exists h(E)$ telle que

$$G(y,\xi) = h(\mathcal{E}(y,\xi)), \tag{7.52}$$

ce qui achève la preuve du lemme 7.10. ■

Deuxième étape de la preuve du lemme 7.4 - Pour déduire la parité de la fonction h, nous allons montrer le lemme suivant

Lemme 7.11 *Si une fonction* $G(y,\xi)$ *définie par*

$$G(y,\xi) = h(\mathcal{E}(y,\xi)), \tag{7.53}$$

vérifie l'équation de contrainte (7.22), alors $\forall l \in \{1,...,n\}$

$$h(E_l, E_l^c) = h(-E_l, E_l^c), \tag{7.54}$$

$\forall E_l^c$ *fixé et* $\forall E_l,\ E_l^2 \leq 2u_{Max}^l$.

Démonstration - La démonstration de ce lemme consiste également à utiliser la formulation faible de l'équation de contrainte avec des fonctions test judicieusement choisies.

Soit $\psi(y_l,\xi) = \psi_1(y_l)\psi_2(\xi)$ une fonction test ne dépendant que de y_l et ξ, continuement dérivable, Y_l-périodique en y_l et à support compact dans $Y \times \mathbb{R}^n$. Nous supposons de plus que $\psi(y_l,\xi) = 0$ lorsque $\xi_j = 0$ pour $j \neq l$.
Si $G(y,\xi)$ définie par (7.53) vérifie l'équation de contrainte, nous avons

$$\int_{Y\times\mathbb{R}_\xi^n} h(\mathcal{E}(y,\xi))\,[\xi_l\partial_{y_l}\psi + U'(y)\cdot\nabla_\xi\psi]\,dyd\xi = 0. \tag{7.55}$$

Nous effectuons alors le changement de variables (7.31) dans l'équation (7.55) et nous obtenons

$$\int_{Y\times\mathbb{R}_E^n} h(E)d(y,E)\cdot\nabla_y\varphi\prod_{i=1}^n|E_i|\sigma_i(y_i,E_i)dyd\xi = 0, \tag{7.56}$$

où la fonction φ est définie par $\varphi(y,E) = \psi(y_l, d(y,E))$.
Afin de simplifier l'écriture de (7.56) nous introduisons la notation suivante : Pour tout $i = 1,...,n$, nous notons $y_\pm^i(E_i)$ les valeurs de y_i telles que

$$u_i(y_i) = \frac{E_i^2}{2} \tag{7.57}$$

avec $y_-^i(E_i) \leq 0 \leq y_+^i(E_i)$, si elles existent. Dans le cas où (7.57) n'a pas de solution, nous posons $y_\pm^i(E_i) = \pm 1$.
Ainsi, avec ces notations, (7.56) devient

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^n \int_{Y_j^c\times\mathbb{R}^{n-1}}\prod_{i\neq j}|E_i|\sigma_i(y_i,E_i)\int_{Y_j\times\mathbb{R}} h(E)\partial_{y_j}\varphi E_j \mathcal{X}(\mathcal{E}_|^\in - \in\sqcap_|(\dagger_|))\lceil\dagger\lceil\mathcal{E}\\ = \sum_{j=1}^n \int_{Y_j^c\times\mathbb{R}^{n-1}}\prod_{i\neq j}|E_i|\sigma_i(y_i,E_i)\int_{\mathbb{R}}\int_{y_-^i(E_i)}^{y_+^i(E_i)} h(E)\partial_{y_j}\varphi\, E_j dydE = 0,\end{aligned} \tag{7.58}$$

où nous avons noté $Y_j^c = Y_1 \times ... \times Y_{j-1} \times Y_{j+1} \times ... \times Y_n$. Lorsque E_j est tel que $E_j^2 > 2u_{Max}^i$, nous avons $y_\pm^i(E_i) = \pm 1$, et donc $\int_{y_-^i(E_i)}^{y_+^i(E_i)} h(E)\partial_{y_j}\varphi\, E_j dy_j = 0$. Ainsi, l'équation (7.58) devient

$$\sum_{j=1}^{n}\int_{Y_j^c\times\mathbb{R}^{n-1}}\prod_{i\neq j}|E_i|\sigma_i(y_i,E_i)$$
$$\int_{E_j^2\leq 2u^j_{Max}} h(E)\left[\varphi(y_j^c,y_+^j(E_j),E)-\varphi(y_j^c,y_-^j(E_j),E)\right]E_j dy_j^c dE=0 \tag{7.59}$$

En utilisant la définition de φ, et parce que $d_j(y_\pm^j(E_j),E_j))=0$ lorsque $E_j^2\leq 2u^i_{Max}$, nous obtenons

$$\begin{array}{rcll}\varphi(y_j^c,y_\pm^j(E_j),E) &=& \psi(y_l,d_j^c(y_j^c,E_j^c),d_j(y_\pm^j(E_j),E_j)) & \\ &=& \psi(y_l,d_j^c(y_j^c,E_j^c),0) & \text{si } j\neq l,\\ \varphi(y_j^c,y_\pm^j(E_j),E) &=& \psi(y_\pm^l(E_l),d_l^c(y_l^c,E_l^c),d_l(y_\pm^l(E_l),E_l)) & \\ &=& \psi(y_\pm^l(E_l),d_l^c(y_l^c,E_l^c),0) & \text{si } j=l,\end{array} \tag{7.60}$$

avec $d_j^c(y_j^c,E_j^c)=(d_1(y_1,E_1),...,\ d_{j-1}(y_{j-1},E_{j-1}),d_{j+1}(y_{j+1},E_{j+1}),...,\ d_n(y_n,E_n))$. En nous rappelant alors que par hypothèse $\psi(y_l,d_j^c(y_j^c,E_j^c),0)=0$, pour $j\neq l$ nous obtenons de (7.59)

$$\int_{Y_j^c\times\mathbb{R}^{n-1}}\prod_{i\neq l}|E_i|\sigma_i(y_i,E_i)$$
$$\int_{E_l^2\leq 2u^l_{Max}} h(E)\left[\psi(y_+^l(E_l),d_l^c(y_l^c,E_l^c),0)-\psi(y_-^l(E_l),d_l^c(y_l^c,E_l^c),0)\right]E_l dy_l^c dE=0. \tag{7.61}$$

En utilisant maintenant l'hypothèse $\psi(y_l,\xi)=\psi_1(y_l)\psi_2(\xi)$, nous déduisons que (7.61) est vérifiée ssi

$$\int_{E_l^2\leq 2u^l_{Max}} h(E)\left[\psi_1(y_+^l(E_l))-\psi_1(y_-^l(E_l))\right]E_l dE_l=0, \tag{7.62}$$

ce qui implique (nous l'avons montré dans la section 2 (c.f. 2.43))

$$h(E_l,E_l^c)=h(-E_l,E_l^c) \tag{7.63}$$

$\forall E_l^c$ fixé et pour $E_l,\ E_l^2\leq 2u^l_{Max}$ et ce pour tout l. Le lemme 7.9 est donc prouvé. ■

En appliquant ces lemmes, nous obtenons que $G(y,\xi)\in\mathbb{K}$ si et seulement si $\exists h(E)$ vérifiant (7.63) telle que

$$G(y,\xi)=h(\mathcal{E}(y,\xi)). \tag{7.64}$$

Il n'y a plus, pour être complet, qu'à trouver l'espace auquel $h(E)$ appartient, compte tenu du fait que $G\in L^2(\mathbb{R}^n_\xi;L^2_p(Y))$. C'est l'objet de la troisième étape.

Etape 3 - Un calcul simple nous donne :

$$\begin{array}{rcl}\displaystyle\int_{Y\times\mathbb{R}^n_\xi}|G(y,\xi)|^2\,dyd\xi &=& \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n_E}|h(E)|^2\prod_{i=1}^n|E_i|\int_{Y_i}\sigma_i(y_i,E_i)dy\,dE\\ &=& \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n_E}|h(E)|^2\prod_{i=1}^n|E_i|\sigma_i(E_i)\,dE,\end{array} \tag{7.65}$$

d'où nous déduisons que $\sqrt{\prod_{i=1}^{n}|E_i|\sigma_i(E_i)}h(E) \in L^2(\mathbb{R}^n_E)$, ce qui achève la démonstration du lemme 7.9. ■

En appliquant alors le lemme 7.9 nous déduisons qu'il existe une fonction $h \in L^\infty(0,T;$ $L^2(\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^n_E, \prod_{i=1}^{n}|E_i|\sigma_i(E_i)dxdE))$ et vérifiant (7.63) pour tout (t,x) fixé, telle que le profil $F(t,x,y,\xi)$ s'écrit

$$F(t,x,y,\xi) = h(t,x,\mathcal{E}(y,\xi)). \tag{7.66}$$

Nous montrons maintenant que la fonction h vérifie l'équation (7.13). Pour cela, nous construisons des fonctions test appartenant à $\mathbb{K}$, que nous utilisons dans la formulation faible (5.1). Le terme contenant la contrainte disparait et nous obtenons l'équation recherchée.

Nous commençons donc par construire des fonctions test vérifiant l'équation de contrainte. Pour toute fonction $\psi(t,x,E) \in C^1_0([0,T)\times \mathbb{R}^n_x\times (\mathbb{R}^n_E \setminus \{E, \exists i,\ E_i = \pm\sqrt{2u^i_{Max}}\}))$, nous définissons la fonction

$$\begin{aligned}
\varphi(t,x,E) &= \frac{1}{2}\prod_{i=1}^{n}\theta_i(E_i)\left(\psi(t,x,E)+\psi(t,x,-E)\right)\\
&+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\left(1-\theta_j(E_j)\right)\prod_{i\neq j}\theta_i(E_i)\left(\psi(t,x,E_j,E_j^c)+\psi(t,x,E_j,-E_j^c)\right)\\
&+\frac{1}{2}\sum_{\substack{k,j=1\\ k\neq j}}^{n}(1-\theta_j(E_j))(1-\theta_k(E_k))\\
&\qquad\prod_{\substack{i\neq j\\ i\neq k}}\theta_i(E_i)\left(\psi(t,x,E_j,E_k,E_{jk}^c)+\psi(t,x,E_j,E_k-E_{jk}^c)\right)\\
&+\cdots\cdot\\
&+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(\theta_j(E_j))\prod_{i\neq j}(1-\theta_i(E_i))\left(\psi(t,x,E_j,E_j^c)+\psi(t,x,-E_j,E_j^c)\right)\\
&\qquad\qquad+\prod_{i=1}^{n}(1-\theta(E_i))\psi(t,x,E)
\end{aligned}\tag{7.67}$$

La fonction ainsi construite appartient à $C^1_0([0,T);C^1_0(\mathcal{O}))$ et vérifie : $\forall l \in \{1,...,n\}$, $\forall E^c_l$ fixé,

$$\varphi(E_l,E^c_l) = \varphi(-E_l,E^c_l) \text{ pour } E_l^2 \le 2u^l_{Max}. \tag{7.68}$$

Donc, d'après le lemme 7.11, la fonction $\varphi(t,x,\mathcal{E}(y,\xi))$ appartient à $\mathbb{K}$, pour tout (t,x). Ainsi, en utilisant dans la formulation faible (5.1), des fonctions $\varphi^\varepsilon \equiv \varphi(t,x,\mathcal{E}(\frac{x}{\varepsilon},\xi))$, le terme contenant l'équation de contrainte s'annule. En passant ensuite à la limite en ε, nous obtenons

$$\begin{aligned} &\int_{\mathcal{Q}\times Y} h(t,x,\mathcal{E}(y,\xi))\,(\partial_t\varphi+\xi\cdot\nabla_x\varphi)(t,x,\mathcal{E}(y,\xi))\,d\mathcal{Q}dy \\ &= -\int_{\mathcal{O}\times Y} f_0(x,y,\xi)\varphi(0,x,\mathcal{E}(y,\xi))d\mathcal{O}dy. \end{aligned} \tag{7.69}$$

Vu que dans l'équation (7.69), il n'y a plus de dérivation ni en y ni en ξ, par densité, (7.69) est réalisée pour toute fonction φ construite à partir de $\psi \in C_0^1([0,T)\times \mathbb{O})$ ($\mathbb{O} = \mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_E^n$). En effectuant ensuite le changement de variables (7.31), nous obtenons

$$\left\{ \begin{aligned} &\int_{\mathbb{Q}\times Y} h(t,x,E)(\partial_t\varphi+d(y,E)\cdot\nabla_x\varphi)(t,x,E)\prod_{i=1}^n |E_i|\sigma_i(y_i,E_i)\,d\mathbb{Q}\,dy \\ &\qquad = -\int_{\mathbb{O}\times Y} f_0(x,y,d(y,E))\varphi(0,x,E)\prod_{i=1}^n |E_i|\sigma_i(y_i,E_i)\,d\mathbb{Q}\,dy. \end{aligned} \right. \tag{7.70}$$

En utilisant l'expression de $d(y,E)$, nous obtenons

$$\left\{ \begin{aligned} &\int_{\mathbb{Q}\times Y} h(t,x,E)\partial_t\varphi(t,x,E)\prod_{i=1}^n |E_i|\sigma_i(y_i,E_i)\,d\mathbb{Q}\,dy \\ &\quad +\sum_{i=1}^n\int_{\mathbb{Q}\times Y} h(t,x,E)\,E_i\partial_{x_i}\varphi(t,x,E)\prod_{j\neq i}|E_j|\sigma_j(y_j,E_j)\,d\mathbb{Q}\,dy \\ &\qquad = -\int_{\mathbb{O}\times Y} f_0(x,y,d(y,E))\varphi(0,x,E)\prod_{i=1}^n |E_i|\sigma_i(y_i,E_i)\,d\mathbb{O}\,dy. \end{aligned} \right. \tag{7.71}$$

Nous calculons maintenant les différents termes de (7.71).

En premier lieu,

$$\left\{ \begin{aligned} &\int_{\mathbb{Q}\times Y} h(t,x,E)\partial_t\varphi(t,x,E)\prod_{i=1}^n |E_i|\sigma_i(y_i,E_i)\,d\mathbb{Q}\,dy \\ &\quad = \int_{\mathbb{Q}\times Y} h(t,x,E)\partial_t\psi(t,x,E)\prod_{i=1}^n |E_i|\sigma_i(y_i,E_i)\,d\mathbb{Q}\,dy \\ &\qquad = \int_{\mathbb{Q}} h(t,x,E)\partial_t\psi(t,x,E)\prod_{i=1}^n |E_i|\sigma_i(E_i)\,d\mathbb{Q} \end{aligned} \right. \tag{7.72}$$

En effet, en utilisant l'expression de φ, nous avons

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{Q}\times Y} h(t,x,E)\partial_t\varphi(t,x,E)\left(\prod_{i=1}^{n}|E_i|\sigma_i(y_i,E_i)\right)d\mathbb{Q}\,dy = \\
&\quad \frac{1}{2}\int_{\mathbb{Q}\times Y} h(t,x,E)\left(\prod_{i=1}^{n}\theta_i(E_i)\right)\partial_t\psi(t,x,E)\left(\prod_{i=1}^{n}|E_i|\sigma_i(y_i,E_i)\right)d\mathbb{Q}\,dy \\
&\qquad +\frac{1}{2}\int_{\mathbb{Q}\times Y} h(t,x,E)\left(\prod_{i=1}^{n}\theta_i(E_i)\right)\partial_t\psi(t,x,-E)\left(\prod_{i=1}^{n}|E_i|\sigma_i(y_i,E_i)\right)d\mathbb{Q}\,dy \\
&\quad +\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\Bigg[\int_{\mathbb{Q}\times Y} h(t,x,E)\left((1-\theta_j(E_j))\prod_{i\neq j}\theta_i(E_i)\right)\partial_t\psi(t,x,E_j,E_j^c) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\left(\prod_{i=1}^{n}|E_i|\sigma_i(y_i,E_i)\right)d\mathbb{Q}\,dy \\
&\qquad +\int_{\mathbb{Q}\times Y} h(t,x,E)\left((1-\theta_j(E_j))\prod_{i\neq j}\theta_i(E_i)\right)\partial_t\psi(t,x,E_j,-E_j^c) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\left(\prod_{i=1}^{n}|E_i|\sigma_i(y_i,E_i)\right)d\mathbb{Q}\,dy\Bigg] \\
&\quad +\cdots.. \\
&\quad +\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\Bigg[\int_{\mathbb{Q}\times Y} h(t,x,E)\left(\theta_j(E_j)\prod_{i\neq j}(1-\theta_i(E_i))\right)\partial_t\psi(t,x,E_j,E_j^c) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\left(\prod_{i=1}^{n}|E_i|\sigma_i(y_i,E_i)\right)d\mathbb{Q}\,dy \\
&\qquad +\int_{\mathbb{Q}\times Y} h(t,x,E)\left(\theta_j(E_j)\prod_{i\neq j}(1-\theta_i(E_i))\right)\partial_t\psi(t,x,-E_j,E_j^c) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\left(\prod_{i=1}^{n}|E_i|\sigma_i(y_i,E_i)\right)d\mathbb{Q}\,dy\Bigg] \\
&\qquad +\int_{\mathbb{Q}\times Y} h(t,x,E)\prod_{i=1}^{n}(1-\theta_i(E_i))\partial_t\psi(t,x,E)\left(\prod_{i=1}^{n}|E_i|\sigma_i(y_i,E_i)\right)d\mathbb{Q}\,dy.
\end{aligned}
\tag{7.73}
$$

Dans la seconde intégrale du membre de droite, nous effectuons le changement de variables $E \to -E$. Dans la quatrième intégrale, pour chaque j nous effectuons le changement de variable $E_j^c \to -E_j^c$, ..., enfin, dans l'avant-dernière, nous remplaçons $E_j \to -E_j$, pour chaque j. En utilisant ensuite les propriétés de parité des fonctions h, θ_i et σ_i, nous obtenons la première égalité de (7.72). En intégrant ensuite par rapport à y nous arrivons à la seconde.

Nous calculons maintenant le second terme de l'égalité (7.71). Nous avons pour tout

$i \in \{1, ..., n\}$

$$\left\{\begin{aligned}&\int_{\mathbb{Q}\times Y} h(t,x,E)E_i\partial_{x_i}\varphi(t,x,E)\left(\prod_{j\neq i}|E_j|\sigma_j(y_j,E_j)\right)d\mathbb{Q}\,dy\\ &\qquad=\int_{\mathbb{Q}^{n-1}\times Y}\left(\int_{\mathbb{R}} h(t,x,E)E_i\partial_{x_i}\varphi(t,x,E)dE_i\right)\prod_{j\neq i}|E_j|\sigma_j(y_j,E_j)\,dxdE_i^c dy\\ &\qquad=\int_{\mathbb{Q}^{n-1}\times Y}\left(\int_{E_i^2\geq 2u_{Max}^i} h(t,x,E)E_i\partial_{x_i}\varphi(t,x,E)dE_i\right)\prod_{j\neq i}|E_j|\sigma_j(y_j,E_j)\,dxdE_i^c dy,\end{aligned}\right. \tag{7.74}$$

où $\mathbb{Q}^{n-1} = [0,T)\times\mathbb{R}_x^n\times\mathbb{R}_E^{n-1}$. En effet, lorsque $E_i^2 \leq 2u_{Max}^i$, $h(t,x,E)E_i\partial_{x_i}\varphi(t,x,E)$ est une fonction impaire de E_i.
En effectuant ensuite le même calcul que celui qui a servi à prouver (7.72), nous obtenons que

$$\left\{\begin{aligned}&\int_{\mathbb{Q}\times Y} h(t,x,E)E_i\partial_{x_i}\varphi(t,x,E)\left(\prod_{j\neq i}|E_i|\sigma_i(y_i,E_i)\right)d\mathbb{Q}\,dy\\ &\qquad=\int_{\mathbb{Q}\times Y} h(t,x,E)(1-\theta_i(E_i))E_i\partial_{x_i}\psi(t,x,E)\left(\prod_{j\neq i}|E_j|\sigma_j(y_j,E_j)\right)d\mathbb{Q}\,dy\\ &\qquad=\int_{\mathbb{Q}} h(t,x,E)(1-\theta_i(E_i))E_i\partial_{x_i}\psi(t,x,E)\left(\prod_{j\neq i}|E_j|\sigma_j(E_j)\right)d\mathbb{Q}\\ &\qquad=\int_{\mathbb{Q}} h(t,x,E)\frac{E_i}{|E_i|}\frac{(1-\theta_i(E_i))}{\sigma_i(E_i)}\partial_{x_i}\psi(t,x,E)\left(\prod_{j=1}^{n}|E_j|\sigma_j(E_j)\right)d\mathbb{Q}\,.\end{aligned}\right. \tag{7.75}$$

Enfin, nous calculons le terme de droite de l'équation (7.71) :

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{O}\times Y} f_0(x,y,d(y,E))\varphi(0,x,E)\prod_{i=1}^{n}|E_i|\sigma_i(y_i,E_i)\,d\mathbb{O}\,dy = \\
&\quad\int_{\mathbb{O}} \psi(0,x,E)\left\langle\left\{\frac{1}{2}\prod_{i=1}^{n}\theta_i(E_i)\left(f_0(x,\cdot,d(\cdot,E)+f_0(x,\cdot,d(\cdot,-E))\right)\right.\right. \\
&\quad+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(1-\theta_j(E_j))\prod_{i\neq j}\theta_i(E_i)\left(f_0(x,\cdot,d(\cdot,E_j,E_j^c)+f_0(x,\cdot,d(\cdot,E_j,-E_j^c)\right) \\
&\quad+\frac{1}{2}\sum_{\substack{k,j=1\\ k\neq j}}^{n}(1-\theta_j(E_j))(1-\theta_k(E_k)) \\
&\qquad\qquad\prod_{\substack{i\neq j\\ i\neq k}}\theta_i(E_i)\left(f_0(x,\cdot,d(\cdot,E_j,E_k,E_{jk}^c)+f_0(x,\cdot,d(\cdot,E_j,E_k,-E_{jk}^c)\right) \\
&+\cdots. \\
&\qquad\qquad\left.\left.+\prod_{i=1}^{n}(1-\theta(E_i))f_0(x,\cdot,d(\cdot,E)\right\}\prod_{i=1}^{n}\sigma(\cdot,E_i)\right\rangle\prod_{i=1}^{n}|E_i|d\mathbb{O}
\end{aligned}
\tag{7.76}
$$

Ainsi, en utilisant les identités (7.72), (7.75) et (7.76) dans l'équation (7.71) nous obtenons que la fonction $h(t,x,E)$ vérifie

$$
\left\{
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{Q}} h(t,x,E)\partial_t\psi(t,x,E)\left(\prod_{j=1}^{n}|E_j|\sigma_i(E_i)\right)\,d\mathbb{Q}+ \\
&\quad\sum_{i=1}^{n}\int_{\mathbb{Q}} h(t,x,E)\frac{E_i}{|E_i|}\frac{(1-\theta_i(E_i))}{\sigma_i(E_i)}\partial_{x_i}\psi(t,x,E)\left(\prod_{j=1}^{n}|E_j|\sigma_i(E_i\right)d\mathbb{Q} \\
&\qquad\qquad\qquad = -\int_{\mathbb{O}} h(0,x,E)\psi(0,x,E)\left(\prod_{j=1}^{n}|E_j|\sigma_i(E_i\right)d\mathbb{O}\,,
\end{aligned}
\right.
\tag{7.77}
$$

qui est une formulation faible de l'équation (7.13). Le théorème 7.4 est donc prouvé. ■

Pour la démonstration du théorème 7.8, nous renvoyons à la section 9, page 79.

7.3 Exemple du "Cat eye's flow"

Nous appliquons ici les résultats que nous venons d'obtenir au cas bidimensionnel où le potentiel est donné par

$$
u(y_1,y_2) = 2\left(\sin(\pi y_1)\cos(\pi y_2)+\delta\cos(\pi y_1)\sin(\pi y_2)\right). \tag{7.78}
$$

Ce type de potentiel intervient dans l'étude de la turbulence passive en mécanique des fluides. Nous renvoyons à A.Fannjianng & G.Papanicolaou [20] et à A.M.Soward & S.Childress [40] pour plus de détails.

Pour cet exemple le coefficient $\xi^{\#}$ de l'équation satisfaite par le profil s'exprime en fonction d'une intégrale elliptique.

Avec ce potentiel, l'équation (1.1) s'écrit :

$$\left\{\begin{array}{l} \partial_t f^\varepsilon + \xi\cdot\nabla_x f^\varepsilon - \dfrac{1}{\varepsilon}\left(\begin{array}{c} \cos(\pi\frac{x_1}{\varepsilon})\cos(\pi\frac{x_2}{\varepsilon}) - \delta\sin(\pi\frac{x_1}{\varepsilon})\sin(\pi\frac{x_2}{\varepsilon}) \\ -\sin(\pi\frac{x_1}{\varepsilon})\sin(\pi\frac{x_2}{\varepsilon}) + \delta\cos(\pi\frac{x_1}{\varepsilon})\cos(\pi\frac{x_2}{\varepsilon}) \end{array}\right)\cdot\nabla_\xi f^\varepsilon = 0, \\ f^\varepsilon_{|t=0} = f^\varepsilon_0, \end{array}\right. \tag{7.79}$$

où $f_0^\varepsilon = f_0(x,\frac{x}{\varepsilon},\xi),\ f_0\in L^2(\mathcal{O};C_p(Y)),\ f_0\geq 0$.

Nous nous ramenons au cas (7.1) en effectuant un changement de variables.
Remarquons en premier lieu que si nous posons

$$\left\{\begin{array}{l} z_1 = y_1+y_2, \\ z_2 = y_1-y_2, \end{array}\right. \tag{7.80}$$

le potentiel $u(y_1,y_2)$ devient

$$\begin{array}{rcl} v(z_1,z_2) & = & (1+\delta)\sin(\pi z_1) + (1-\delta)\sin(\pi z_2) \\ & = & v_1(z_1)+v_2(z_2). \end{array} \tag{7.81}$$

En effet,

$$\begin{array}{rcl} v(y_1+y_2,y_1-y_2) & = & (1+\delta)\left(\sin(\pi y_1)\cos(\pi y_2)+\cos(\pi y_1)\sin(\pi y_2)\right) \\ & & \quad +(1-\delta)\left(\sin(\pi y_1)\cos(\pi y_2)-\cos(\pi y_1)\sin(\pi y_2)\right) \\ & = & 2\left(\sin(\pi y_1)\cos(\pi y_2)+\delta\cos(\pi y_1)\sin(\pi y_2)\right) \end{array} \tag{7.82}$$

Ainsi, en effectuant un changement similaire à (7.80) en les variables de position x et de vitesse ξ, i.e.

$$\left\{\begin{array}{l} s_1 = x_1+x_2, \quad s_2 = x_1-x_2, \\ \zeta_1 = \xi_1+\xi_2, \quad \zeta_2 = \xi_1-\xi_2, \end{array}\right. \tag{7.83}$$

l'équation (7.78) devient

$$\left\{\begin{array}{l} \partial_t g^\varepsilon + \zeta\cdot\nabla_s g^\varepsilon - \dfrac{1}{\varepsilon}\left(\nabla_z v\right)\left(\dfrac{s}{\varepsilon}\right)\cdot\nabla_\zeta g^\varepsilon = 0, \\ g^\varepsilon_{|t=0} = g_0, \end{array}\right. \tag{7.84}$$

où g^ε est liée à f^ε par la relation

$$g^\varepsilon(t,x_1+x_2,x_1-x_2,\xi_1+\xi_2,\xi_1-\xi_2) = f^\varepsilon(t,x,\xi). \tag{7.85}$$

Nous nous sommes donc ramenés dans le cadre des hypothèses du théorème (7.2), nous pouvons alors l'appliquer.

Nous avons $Y_1 = Y_2 = [-1,1]$ et les fonctions σ_1 et σ_2 sont données par, (c.f.(7.2))

$$\left\{\begin{array}{l} \sigma_1(z_1,e_1) = (e_1 - 2(1+\delta))\sin(\pi z_1))^{-\frac{1}{2}}, \quad \sigma_1(e_1) = \langle\sigma_1(\cdot,e_1)\rangle, \\ \sigma_2(z_2,e_2) = (e_2 - 2(1-\delta))\sin(\pi z_2))^{-\frac{1}{2}}, \quad \sigma_2(e_2) = \langle\sigma_2(\cdot,e_2)\rangle. \end{array}\right. \tag{7.86}$$

En nommant ensuite $G(t,s,z,\zeta)$ le profil associé à g^ε, le théorème (7.4) implique le

Théorème 7.12 *Il existe* $k \in L^\infty(0,T;\ L^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n,\ |e_1 e_2|\sigma_1(e_1)\sigma_2(e_2)dxdE))$, *vérifiant* $k(t,s,e_1,e_2) = k(t,s,-e_1,e_2)$ *pour* $e_1^2 \le 2(1+\delta)$ *et, pour* $e_2^2 \le 2(1-\delta)$ $k(t,s,e_1,e_2) = k(t,s,e_1,-e_2)$ *unique solution de*

$$\begin{cases} \partial_t k + \zeta^\#(e) \cdot \nabla_s k = 0, \\ k_{t=0} = k_0, \end{cases} \tag{7.87}$$

avec

$$\begin{aligned} k_0(s,e) = \frac{1}{\sigma_1(e_1)\sigma_2(e_2)} \Bigg\langle \Bigg\{ & \frac{1}{2}\theta_1(e_1)\theta_2(e_2)\left(g_0(s,\cdot,d(\cdot,e) + g_0(s,\cdot,d(\cdot,-e)\right) \\ & + \frac{1}{2}\theta_1(e_1)(1-\theta_2(e_2))\left(g_0(s,\cdot,d(\cdot,e_1,e_2)) + g_0(s,\cdot,d(\cdot,-e_1,e_2))\right) \\ & + \frac{1}{2}(1-\theta_1(e_1))\theta_2(e_2)\left(g_0(s,\cdot,d(\cdot,e_1,e_2)) + g_0(s,\cdot,d(\cdot,e_1,-e_2))\right) \\ & + (1-\theta_1(e_1))(1-\theta_2(e_2))g_0(s,\cdot,d(\cdot,e_1,e_2)) \Bigg\} \sigma_1(\cdot,e_1)\sigma_2(\cdot,e_2) \Bigg\rangle, \end{aligned} \tag{7.88}$$

et avec

$$\zeta^\#(e) = \begin{pmatrix} \frac{e_1}{|e_1|}\frac{1-\theta_1(e_1)}{\sigma_1(e_1)} \\ \frac{e_2}{|e_2|}\frac{1-\theta_2(e_2)}{\sigma_2(e_2)} \end{pmatrix}. \tag{7.89}$$

telle que

$$G(t,s,z,\zeta) = k(t,s,\mathcal{E}(z,\zeta)). \tag{7.90}$$

De plus, lorsque $1-\theta_1(e_1) = 1$, *i.e. lorsque* $e_1^2 > 2v^i_{Max} = 2(1+\delta)$, *la fonction* $\sigma_1(e_1)$ *s'exprime en fonction de l'intégrale elliptique de première espèce :*

$$\begin{aligned} \sigma_1(e_1) &= \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{e_1 - 2(1+\delta)\sin(\pi z_1)}} dz_1 \\ &= \frac{2}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{e_1 - 2(1+\delta)\sin(\alpha)}} d\alpha \\ &= -\frac{2}{\pi}\frac{2}{\sqrt{e_1+2(1+\delta)}}\left(\mathcal{F}\left(0, \sqrt{\frac{4(1+\delta)}{e_1+2(1+\delta)}}\right) - \mathcal{F}\left(\frac{\pi}{2}, \sqrt{\frac{4(1+\delta)}{e_1+2(1+\delta)}}\right)\right), \end{aligned} \tag{7.91}$$

où $\mathcal{F}(\varphi,k)$ *désigne l'intégrale elliptique de première espèce. (c.f. I.S. Gradshteyn & I.M.Ryzhic [27] page 153, formule 2.571, pour l'obtention de la dernière égalité).*
De même, lorsque $e_2^2 > 2(1-\delta)$, *nous avons*

$$\sigma_2(e_2) = -\frac{2}{\pi}\frac{2}{\sqrt{e_2+2(1-\delta)}}\left(\mathcal{F}\left(0, \sqrt{\frac{4(1-\delta)}{e_2+2(1-\delta)}}\right) - \mathcal{F}\left(\frac{\pi}{2}, \sqrt{\frac{4(1-\delta)}{e_2+2(1-\delta)}}\right)\right). \tag{7.92}$$

Nous remarquons maintenant que le profil $F(t,x,y,\xi)$, associé à la suite f^ε, est lié à G et donc à k par la relation

$$\begin{array}{rcl} F(t,x,y,\xi) & = & G(t,x_1+x_2,x_1-x_2,y_1+y_2,y_1-y_2,\xi_1+\xi_2,\xi_1-\xi_2) \\ & = & k(t,x_1+x_2,x_1-x_2,\mathcal{E}(y_1+y_2,y_1-y_2,\xi_1+\xi_2,\xi_1-\xi_2)), \end{array} \tag{7.93}$$

où $\mathcal{E}(z,\zeta)=(\mathcal{E}_1(z_1,\zeta_1),\mathcal{E}(z_2,\zeta_2))$, avec $\mathcal{E}_i(z_i,\zeta_i)=\frac{\zeta_i}{|\zeta_i|}\sqrt{\zeta_i^2+2v_i(z_i)}$.
Ainsi, en effectuant les changements de variables réciproques de (7.80) et de (7.83), et en posant

$$\xi^\#(y,\xi)=\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\left(\zeta_1^\#(\mathcal{E}_1(y_1+y_2,\xi_1+\xi_2))+\zeta_2^\#(\mathcal{E}_2(y_1-y_2,\xi_1-\xi_2))\right) \\ \frac{1}{2}\left(\zeta_1^\#(\mathcal{E}_1(y_1+y_2,\xi_1+\xi_2))-\zeta_2^\#(\mathcal{E}_2(y_1-y_2,\xi_1-\xi_2))\right) \end{pmatrix} \tag{7.94}$$

Nous obtenons que le profil F vérifie

$$\left\{\begin{array}{l} F\in\mathbb{K}, \\ \partial_t F+\xi^\#(y,\xi)\cdot\nabla_x F=0, \\ F_{|t=0}=k_0(x,\mathcal{E}_1(y_1+y_2,\xi_1+\xi_2)+\mathcal{E}_2(y_1-y_2,\xi_1-\xi_2), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \mathcal{E}_1(y_1+y_2,\xi_1+\xi_2)-\mathcal{E}_2(y_1-y_2,\xi_1-\xi_2)), \end{array}\right. \tag{7.95}$$

Si nous supposons maintenant que la donnée initiale s'écrit

$$f_0=f_1(x)\,a(y,\xi), \tag{7.96}$$

avec $f_1(x)\in L^2(\mathbb{R}^n)$, positive et à support compact et $a(y,\xi)\in L^\infty(Y\times\mathbb{R}^n)\cap L^2(\mathbb{R}^n;L^2_p(Y))$, $a\geq 0$, nous avons

$$\left\{\begin{array}{rcl} g_0(s,z,\zeta) & = & f_1(\dfrac{s_1+s_2}{2},\dfrac{s_1-s_2}{2})\,a(\dfrac{z_1+z_2}{2},\dfrac{z_1-z_2}{2},\dfrac{\zeta_1+\zeta_2}{2},\dfrac{\zeta_1-\zeta_2}{2}) \\ & & g_1(s)b(z,\zeta), \end{array}\right. \tag{7.97}$$

et

$$\begin{aligned} k_0(s,e)=\frac{1}{\sigma_1(e_1)\sigma_2(e_2)}g_1(s)\Bigg\langle\Bigg\{&\frac{1}{2}\theta_1(e_1)\theta_2(e_2)\,(b(\cdot,d(\cdot,e)+b(\cdot,d(\cdot,-e)) \\ &+\frac{1}{2}\theta_1(e_1)(1-\theta_2(e_2))\,(b(\cdot,d(\cdot,e_1,e_2))+b(\cdot,d(\cdot,-e_1,e_2))) \\ &+\frac{1}{2}(1-\theta_1(e_1))\theta_2(e_2)\,(b(\cdot,d(\cdot,e_1,e_2))+b(\cdot,d(\cdot,e_1,-e_2))) \\ &+(1-\theta_1(e_1))(1-\theta_2(e_2))b(\cdot,d(\cdot,e_1,e_2))\Bigg\}\,\sigma_1(\cdot,e_1)\sigma_2(\cdot,e_2)\Bigg\rangle \\ =g_1(s)b^\#(e). \end{aligned} \tag{7.98}$$

Ainsi, par la même méthode d'homogénéisation non locale que précédemment, nous obtenons

Théorème 7.13 *Il existe une fonction $D(\xi)$ et une famille de mesures paramétrées positives $\nu_\xi(\lambda,\omega)$ à support dans $\Lambda_\xi \times S^{n-1}$ telle que la limite faible f de f^ε soit élément d'un couple (f,w) unique solution de*

$$\begin{cases} \partial_t f + D(\xi)\cdot\nabla_x f - C_n \displaystyle\int_{\Lambda_\xi\times S^{n-1}} d\nu_\xi(\lambda,\omega)\,\partial_r(-\partial_r^2)^{(n-1)/4} w_{|r=\omega\cdot x} = 0, \\ \partial_t w + \lambda\partial_r w + \partial_r(-\partial_r^2)^{(n-1)/4}\mathcal{R}(f(t,\cdot,\cdot,\xi))(r,\omega) = 0, \\ f_{|t=0} = f_1\left\langle a^{\#}(\cdot,\xi)\right\rangle, \\ w_{t=0} = 0, \end{cases} \tag{7.99}$$

où $\mathcal{R}$ désigne la transformation de Radon par rapport à x et où $C_n = \frac{1}{2}(2i\pi)^{n-1}$. la fonction $a^{\#}(y,\xi) = b^{\#}(\mathcal{E}_1(y_1+y_2,\xi_1+\xi_2)+\mathcal{E}_2(y_1-y_2,\xi_1-\xi_2),\mathcal{E}_1(y_1+y_2,\xi_1+\xi_2)-\mathcal{E}_2((y_1-y_2,\xi_1-\xi_2))$.

8 Cas général

8.1 Introduction, résultats

Dans les cas où nous ne pouvons pas déterminer explicitement le noyau $\mathbb{K}$, nous pouvons utiliser formellement la projection $\mathbb{P}$ sur $\mathbb{K}$ et obtenir la forme de l'équation satisfaite par le profil.
Nous supposons $u \in C_p^2(Y)$ et, pour pouvoir utiliser $\mathbb{P}$, nous imposons sur f_0 une hypothèse de décroissance plus forte que précédemment. En d'autres termes,

$$\begin{cases} f_0^\varepsilon(x,\xi) = f_0(x, \dfrac{x}{\varepsilon}, \xi) \\ f_0(x,y,\xi) \in L^2(\mathcal{O}; C_p(Y)), \ f_0 \geq 0, \\ \exists \gamma > \dfrac{n-1}{2} \text{ tel que } (H+1)^\gamma f_0 \in L^2(\mathcal{O}; C_p(Y)) \end{cases} \tag{8.1}$$

où $H(x,\xi) = \frac{1}{2}\xi^2 + u(y)$. Profitons-en pour définir tout de suite $H^\varepsilon(x,\xi) = H(\frac{x}{\varepsilon}, \xi)$.

Nous pourrions effectuer une hypothèse plus classique, du type décroissance exponentielle

$$M^+ f_0 \in L^2(\mathcal{O}; C_p(Y)), \tag{8.2}$$

où $M^\pm = \exp(\pm H(x,\xi))$. Mais, l'hypothèse que nous faisons ici est, en un certain sens la plus faible que nous puissions faire pour appliquer la méthode à venir.

Nous avons un besoin crucial de ce type d'hypothèses pour exprimer les coefficients de l'équation du profil. nous verrons par la suite que toutes les hypothèses de ce type sont équivalentes au sens où, si deux hypothèses de décroissance sont satisfaites ensemble (par exemple (8.1.c) et (8.2)), les coefficients de l'équation du profil sont indépendants de celle utilisée.

Sous les hypothèses ci-dessus, nous avons le

Théorème 8.1 *Soit $\mathbb{P}$ la projection de $L^2(\mathbb{R}^n; L_p^2(Y))$ dans $\mathbb{K}$. Alors, sous l'hypothèse (8.1) le profil F associé à la suite f^ε (solution de (1.1)) est l'unique solution de*

$$\begin{cases} \mathbb{P}(F) = F \text{ pour presque tout } (x,t) \\ \partial_t F + \xi^\#(y,\xi) \cdot \nabla_x F = 0, \text{ pour presque tout } (y,\xi), \\ F_{|t=0} = \mathbb{P}(f_0), \end{cases} \tag{8.3}$$

où $\xi^\#$ est formellement la projection de ξ sur $\mathbb{K}$. Nous renvoyons le lecteur à la formule (8.55) pour sa définition exacte.

L'équation (8.3.a) traduit simplement le fait que $F \in \mathbb{K}$, et la démonstration du reste du théorème se déroule comme suit. Nous commençons par chercher des estimations a priori, qui permettent de déduire que le profil satisfait également une condition de décroissance du type (8.1.c). Puis, nous introduisons la projection $\mathbb{P}$ et étudions ses propriétés. Ensuite, à l'aide de ces outils, nous prouvons (8.3).

Une fois le théorème 8.1 prouvé, nous appliquons une méthode d'homogénéisation non locale inspirée de Y.Amirat, K.Hamdache & A.Ziani [5] pour moyenner l'équation (8.3) par rapport à y. Nous devons alors faire les hypothèses supplémentaires suivantes

$$f_0(x,y,\xi) = f_1(x)a(y,\xi), \tag{8.4}$$

où f_1 et a satisfont

$$\begin{array}{l} f_1 \in L^2(\mathbb{R}^n) \text{ est à support compact et positive,} \\ a \in L^\infty(Y\times\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n; L^2_p(Y)),\ a \geq 0. \end{array} \tag{8.5}$$

Nous devons supposer que f_1 est à support compact car la première étape du processus d'homogénéisation non locale consiste à appliquer une transformation de Radon à l'équation (8.3). Nous obtenons alors une famille d'équations unidimensionnelles paramétrées par la fréquence. Ensuite en appliquant les résultats de la section 1, nous obtenons une famille d'équations homogénéisées. En effectuant enfin la transformation de Radon inverse, nous obtenons le

Théorème 8.2 *Sous les hypothèses (8.4) et (8.5) il existe une fonction $D(\xi)$ et une famille de mesures paramétrées positives $\nu_\xi(\lambda,\omega)$ à support dans $\Lambda_\xi \times S^{n-1}$ telle que la limite faible f de f^ε soit élément d'un couple (f,w) unique solution de*

$$\left\{\begin{array}{l} \partial_t f + D(\xi)\cdot\nabla_x f - C_n \displaystyle\int_{\Lambda_\xi\times S^{n-1}} d\nu_\xi(\lambda,\omega)\,\partial_r(-\partial_r^2)^{(n-1)/4} w_{|r=\omega\cdot x} = 0, \\ \partial_t w + \lambda\partial_r w + \partial_r(-\partial_r^2)^{(n-1)/4}\mathcal{R}(f(t,\cdot,\cdot,\xi))(r,\omega) = 0, \\ f_{|t=0} = f_1\left\langle a^{\#}(\cdot,\xi)\right\rangle, \\ w_{t=0} = 0, \end{array}\right. \tag{8.6}$$

où $\mathcal{R}$ désigne la transformation de Radon par rapport à x et où $C_n = \frac{1}{2}(2i\pi)^{n-1}$.
Les définitions précises de D, Λ_ξ et ν_ξ sont données par (9.71), (9.77) et (9.78) respectivement.

8.2 Estimations

Les conditions de décroissance devant également être vraies pour le profil, nous commençons par déduire des estimations sur f^ε, qui, nous le montrerons, se transmettent sur F.
Les estimations que nous cherchons sont une conséquence directe du lemme suivant.

Lemme 8.3 *Pour toute fonction $\phi(\alpha,\beta) \in C^1(\mathbb{R}^2)$, positive et vérifiant la condition de croissance*

$$\phi(\alpha,\beta) < C(\alpha)|\beta|, \tag{8.7}$$

si la suite $\phi(H^\varepsilon, f_0^\varepsilon)$ est bornée dans $L^2(\mathcal{O})$ alors $\phi(H^\varepsilon, f^\varepsilon)$ l'est dans $L^\infty(0,T,L^2(\mathcal{O}))$.

Démonstration - Nous commençons par régulariser le problème (1.1). A ε fixé, soit $f^{\varepsilon}_{0,\delta}$ une suite de fonctions dans $C^1_0(\mathcal{O})$ telle que $f^{\varepsilon}_{0,\delta} \to f^{\varepsilon}_0$ dans $L^2(\mathcal{O})$ fort et presque partout. Nous considérons f^{ε}_{δ} la solution de (1.1) pour la donnée initiale $f^{\varepsilon}_{0,\delta}$. f^{ε}_{δ} est alors régulière et à support compact.
Ainsi, sachant que H^{ε} vérifie $\nabla_x H^{\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon}\nabla_y u(\frac{x}{\varepsilon}) \cdot \nabla_{\xi} H^{\varepsilon} = 0$, nous avons

$$\partial_t \left[\phi^2(H^{\varepsilon}, f^{\varepsilon}_{\delta})\right] + \xi \cdot \nabla_x \left[\phi^2(H^{\varepsilon}, f^{\varepsilon}_{\delta})\right] - \frac{1}{\varepsilon}\nabla_y u\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \cdot \nabla_{\xi} \left[\phi^2(H^{\varepsilon}, f^{\varepsilon}_{\delta})\right] = 0. \tag{8.8}$$

En intégrant par rapport à x et ξ, nous obtenons

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{d}{dt} \|\phi(H^{\varepsilon}, f^{\varepsilon}_{\delta})\| = 0, \quad \text{i.e} \\ \|\phi(H^{\varepsilon}, f^{\varepsilon}_{\delta})\| = \left\|\phi(H^{\varepsilon}, f^{\varepsilon}_{0,\delta})\right\|. \end{array} \right. \tag{8.9}$$

où $\|\ \|$ désigne la norme dans $L^2(\mathcal{O})$. Grâce à l'hypothèse de croissance (8.7), nous avons

$$\phi(H^{\varepsilon}, f^{\varepsilon}_{0,\delta}) < C(H^{\varepsilon}) \left|f^{\varepsilon}_{0,\delta}\right|. \tag{8.10}$$

Sachant que lorsque $\delta \to 0$, la fonction $\phi(H^{\varepsilon}, f^{\varepsilon}_{0,\delta}) \to \phi(H^{\varepsilon}, f^{\varepsilon}_0)$ p.p., nous avons, en appliquant le théorème de convergence dominée de Lebesgue $\phi(H^{\varepsilon}, f^{\varepsilon}_{0,\delta}) \to \phi(H^{\varepsilon}, f^{\varepsilon}_0)$ dans $L^2(\mathcal{O})$ fort, donc de (8.9) nous déduisons

$$\|\phi(H^{\varepsilon}, f^{\varepsilon}_{\delta})\| < C. \tag{8.11}$$

Comme de plus, $\phi(H^{\varepsilon}, f^{\varepsilon}_{\delta}) \to \phi(H^{\varepsilon}, f^{\varepsilon})$ p.p., nous avons

$$\phi(H^{\varepsilon}, f^{\varepsilon}_{\delta}) \rightharpoonup \phi(H^{\varepsilon}, f^{\varepsilon}) \text{ dans } L^{\infty}(0,T; L^2(\mathcal{O})) \text{ faible} - *, \tag{8.12}$$

et donc, encore d'après (8.9)

$$\|\phi(H^{\varepsilon}, f^{\varepsilon})\| \leq \|\phi(H^{\varepsilon}, f^{\varepsilon}_{\delta})\| \leq \left\|\phi(H^{\varepsilon}, f^{\varepsilon}_{0,\delta})\right\|. \tag{8.13}$$

Enfin, ayant prouvé que $\phi(H^{\varepsilon}, f^{\varepsilon}_{0,\delta}) \to \phi(H^{\varepsilon}, f^{\varepsilon}_0)$ dans $L^2(\mathcal{O})$ fort, nous obtenons

$$\|\phi(H^{\varepsilon}, f^{\varepsilon})\| \leq \|\phi(H^{\varepsilon}, f^{\varepsilon}_0)\|. \tag{8.14}$$

ce qui achève la preuve du lemme.

Nous déduisons alors l'estimation suivante

Corollaire 8.4 $(H^{\varepsilon} + 1)^{\gamma} f^{\varepsilon}$ *est bornée dans* $L^{\infty}(0,T; L^2(\mathcal{O}))$.

Démonstration - Il suffit de choisir $\phi(\alpha, \beta) = |\alpha + 1|^{\gamma}|\beta|$.

Nous montrons maintenant que cette estimation se transmet au profil et permet d'établir le

Lemme 8.5 *Le profil F vérifie*

$$\left\{ \begin{array}{l} (H+1)^{\gamma}\, F \in L^{\infty}(0,T; L^2(\mathcal{O}; L^2_p(Y))), \\ |\xi| F \in L^{\infty}(0,T; L^2(\mathcal{O}; L^2_p(Y))). \end{array} \right. \tag{8.15}$$

Démonstration - Nous commençons par montrer (8.15.a). $(H^{\varepsilon}+1)^{\gamma} f^{\varepsilon}$ étant bornée dans $L^{\infty}(0,T; L^2(\mathcal{O}))$, et $(H+1)^{\gamma}$ étant une fonction régulière, $Y-$périodique en y, nous déduisons

$$\int_{\mathcal{Q}} (H^{\varepsilon}+1)^{\gamma} f^{\varepsilon} \psi^{\varepsilon} d\mathcal{Q} \to \int_{\mathcal{Q}\times Y} F(H+1)^{\gamma} \psi \, d\mathcal{Q} dy, \tag{8.16}$$

pour toute fonction $\psi(t,x,y,\xi)$ régulière et $Y-$périodique en y. (8.15.a) est alors prouvée.

Remarquons alors que $(H+1)^{1/2} \leq (H+1)^{\gamma}$. Donc sachant

$$|\xi| \leq (H(y,\xi)+1)^{1/2}, \tag{8.17}$$

nous déduisons immédiatement (8.15.b), prouvant ainsi le lemme.

8.3 Projection $\mathbb{P}$ et propriétés

Ces estimations établies, nous nous intéressons à la projection orthogonale $\mathbb{P}$ de $L^2(\mathbb{R}^n; L^2_p(Y))$ vers $\mathbb{K}$. Le projeté d'une fonction $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^n; L^2_p(Y))$ est défini par

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{P}(\varphi) \in \mathbb{K}, \\ \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n \times Y} \{\mathbb{P}(\varphi(y,\xi)) - \varphi(y,\xi)\}\, v(y,\xi)\; dy d\xi = 0 \qquad \forall v \in \mathbb{K}. \end{array} \right. \tag{8.18}$$

Nous étudions maintenant quelques propriétés de la projection. La première établit que $\mathbb{P}$ commute avec l'intégration.

Propriété 8.6 *La projection $\mathbb{P}$ vérifie*

$$\mathbb{P}\left(\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y,\xi,z)\, dz \right) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{P}(\varphi(y,\xi,z))\, dz \tag{8.19}$$

pour toute fonction $\varphi \in L^2(Y \times \mathbb{R}^n; L^1 \cap L^2(\mathbb{R}^m))$.

Démonstration - Montrons que (8.18) est bien vérifiée. Nous avons en premier lieu

$$\int_{\mathbb{R}^n \times Y} \left(\int_{\mathbb{R}^m} \mathbb{P}(\varphi)\, dz - \int_{\mathbb{R}^m} \varphi\, dz \right) v \; dy d\xi = \int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{\mathbb{R}^n \times Y} (\mathbb{P}(\varphi) - \varphi)\, v \, dy d\xi \right) dz = 0. \tag{8.20}$$

(8.18.b) est donc bien vérifiée.

Il faut maintenant montrer

$$\int_{\mathbb{R}^m} \mathbb{P}(\varphi)\, dz \in \mathbb{K}. \tag{8.21}$$

Posons $\psi(y,\xi,z) = \mathbb{P}(\varphi(y,\xi,z))$. La question devient alors : avons nous

$$T \int_{\mathbb{R}^m} \psi(\cdot,\cdot,z)\, dz = 0 \ \ ? \tag{8.22}$$

Considérons une suite régularisante $\rho_\delta(y,\xi,z)$ et une fonction $\mathcal{X}_\delta(\ddagger)$ régulière telle que $\mathcal{X}_\delta(\ddagger) = \infty$ si $z < \frac{1}{\delta}$ et 0 si $z > \frac{1}{\delta}+1$. Définissons alors $\psi_\delta(y,\xi,z) = \mathcal{X}_\delta(\ddagger)(\rho_\delta * \psi)(\dagger,\xi,\ddagger)$. La fonction ψ_δ étant régulière, nous avons,

$$T \int_{\mathbb{R}^m} \psi_\delta\, dz = \int_{\mathbb{R}^m} T\psi_\delta\, dz. \tag{8.23}$$

Or le membre de gauche converge, lorsque $\delta \to 0$, vers $T \displaystyle\int_{\mathbb{R}^m} \psi\, dz$ et celui de droite, en utilisant le lemme de Friedrichs, vers 0. La réponse à la question (8.22) est donc "oui" et la démonstration de la propriété achevée.

La projection $\mathbb{P}$ conserve certaines propriétés des fonctions ; nous avons, par exemple

Propriété 8.7 *Si $\varphi \in L^2(I\!R^n; L^2_p(Y)) \cap L^\infty(I\!R^n \times Y)$, alors $I\!P(\varphi) \in I\!K \cap L^\infty(I\!R^n \times Y)$ et*

$$\|I\!P(\varphi)\|_\infty \leq \|\varphi\|_\infty \tag{8.24}$$

Propriété 8.8 *Si $\varphi \in L^2(I\!R^n; L^2_p(Y))$ est positive, alors $I\!P(\varphi)$ est positive.*

Démonstration de la propriété 8.7 - Nous commençons par établir le résultat préliminaire suivant

Résultat préliminaire *Soit $w \in I\!K$, considérons l'ensemble*

$$D_M = \{(y,\xi),\ |w(y,\xi)| > M\} \tag{8.25}$$

alors, en nommant $\mathcal{X}_{\mathcal{D_M}}$ la fonction caractéristique de D_M, nous avons

$$w_M := w\mathcal{X}_{\mathcal{D_M}} \in I\!K. \tag{8.26}$$

Pour démontrer ce résultat, nous introduisons la fonction $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\psi(x) = 1 \text{ si } |x| > M,\ 0 \text{ sinon.} \tag{8.27}$$

Nous avons alors

$$\mathcal{X}_{\mathcal{D_M}} = \psi(\sqsupseteq). \tag{8.28}$$

Nous introduisons alors une suite $\psi_n \in C^\infty(\mathrm{I\!R})$, $\psi_n \leq \psi$ p.p., telle que

$$\psi_n \to \psi \text{ simplement.} \tag{8.29}$$

Nous avons alors $\psi_n(w) \to \psi(w)$ p.p., et $\psi_n(w) \leq \psi(w)$, donc en appliquant le théorème de convergence dominée de Lebesgue, nous déduisons

$$\psi_n(w) \to \psi(w) \text{ dans } L^2(\mathrm{I\!R}^n; L^2_p(Y)) \text{ fort.} \tag{8.30}$$

ψ_n étant régulière, nous déduisons aisément

$$T\psi_n(w) = \psi_n'(w)T(w) = 0, \tag{8.31}$$

or, d'après (8.30), nous avons

$$T\psi_n(w) \to T\psi(w) \text{ dans } \mathcal{D}', \tag{8.32}$$

et ainsi,

$$T\psi(w) = 0. \tag{8.33}$$

En nous remémorant (8.28), nous déduisons que $\mathcal{X}_{\mathcal{D_M}} \in \mathrm{I\!K} \cap \mathcal{L}^\infty(\mathrm{I\!R}^\backslash, \mathcal{L}_{\surd}(\mathcal{Y}))$. Nous concluons alors aisément que $w_M \in \mathrm{I\!K}$, ce qui achève la preuve du résultat préliminaire.

Nous l'appliquons maintenant à la démonstration de la propriété 8.7.
Considérons $M = \|\varphi\|_\infty$, $D_M = \{(y,\xi),\ |\mathrm{I\!P}(\varphi)| > M\}$, et montrons que $\mathrm{mes}(D_M) = 0$.
Supposons donc que $\mathrm{mes}(D_M) \neq 0$, et montrons que nous aboutissons à une contradiction.
Sachant que (grâce au résultat préliminaire)

$$\mathrm{I\!P}(\varphi)\mathcal{X}_{\mathcal{D_M}} \in \mathrm{I\!K} \tag{8.34}$$

et que (par la caractérisation de $\mathrm{I\!P}$)

$$\int_{\mathrm{I\!R}^n \times Y} (\mathrm{I\!P}(\varphi) - \varphi)\, w \; dy d\xi = 0, \quad \forall w \in \mathrm{I\!K}, \tag{8.35}$$

nous déduisons

$$\int_{\mathrm{I\!R}^n \times Y} (\mathrm{I\!P}(\varphi) - \varphi)\, \mathrm{I\!P}(\varphi)\mathcal{X}_{\mathcal{D_M}} \; \lceil \dagger \lceil \xi = \prime. \tag{8.36}$$

(8.36) nous permet d'établir d'une part,

$$\int_{D_M} (\mathrm{I\!P}(\varphi))^2 \, dy d\xi = \int_{D_M} \mathrm{I\!P}(\varphi)\varphi dy d\xi. \tag{8.37}$$

D'autre part, sur l'ensemble D_M,

$$|\mathrm{I\!P}(\varphi)| > |\varphi|, \tag{8.38}$$

donc

$$|\mathbb{P}(\varphi)|^2 > |\mathbb{P}(\varphi)||\varphi| = |\mathbb{P}(\varphi)\varphi|. \tag{8.39}$$

La mesure de D_M étant non nulle, nous déduisons

$$\int_{D_M} (\mathbb{P}(\varphi))^2\, dyd\xi > \int_{D_M} |\mathbb{P}(\varphi)\varphi|\, dyd\xi \geq \int_{D_M} \mathbb{P}(\varphi)\varphi\, dyd\xi. \tag{8.40}$$

L'égalité (8.37) et l'inégalité stricte (8.40) sont en contradiction. Donc mes$(D_M) = 0$. Ceci nous permet de conclure immédiatement que (8.24) est vérifiée. La propriété 8.7 est donc prouvée.

La propriété 8.8 se démontre de façon analogue en utilisant l'ensemble

$$D_- = \{(y,\xi),\ \mathbb{P}(\varphi) < 0\}, \tag{8.41}$$

et en utilisant dans la formule caractérisant la projection, la fonction $w = \mathbb{P}(\varphi)\mathcal{X}_{\mathcal{D}_-}$ ($\in \mathbb{K}$).

Nous énonçons maintenant la dernière propriété, concernant la projection d'un produit de fonctions dont l'une appartient à $\mathbb{K}$.

Propriété 8.9 *Pour toute* $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^n; L^2_p(Y)) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n \times Y)$, *et* $g \in \mathbb{K}$, *nous avons*

$$\mathbb{P}(\varphi g) = \mathbb{P}(\varphi) g. \tag{8.42}$$

Démonstration - Nous utilisons, ici encore, la caractérisation (8.18) de la projection. En premier lieu, nous avons très simplement, $\mathbb{P}(\varphi)g \in \mathbb{K}$.
Nous devons alors prouver que

$$\int_{\mathbb{R}^n\times Y} (\mathbb{P}(\varphi)g - \varphi g)\, v\ dyd\xi = \int_{\mathbb{R}^n\times Y} (\mathbb{P}(\varphi) - \varphi)\, gv\ dyd\xi = 0, \tag{8.43}$$

$\forall v \in \mathbb{K}$. L'égalité (8.43) est évidemment vérifiée si $g \in \mathbb{K} \cap L^\infty(\mathbb{R}^n \times Y)$ car alors $gv \in \mathbb{K}$.
Or, il est simple de voir que $\mathbb{K} \cap L^\infty(\mathbb{R}^n \times Y)$ est dense dans $\mathbb{K}$.
En effet, considérons T_n la fonction de troncature, définie par $T_n(x) = x$ si $x < n$ et $\frac{x}{|x|}n$ sinon. En régularisant T_n, nous voyons aisément que $T_n(g) \in \mathbb{K}$ dès que $g \in \mathbb{K}$. Donc, et parce que $T_n(g) \to g$ dans $L^2(\mathbb{R}^n; L^2_p(Y))$, nous obtenons que $\mathbb{K} \cap L^\infty(\mathbb{R}^n \times Y)$ est dense dans $\mathbb{K}$.
Ainsi, en remarquant que (8.43) a toujours un sens avec $g \in \mathbb{K}$, nous obtenons par densité, que celle-ci est vraie pour $g \in \mathbb{K}$.

8.4 Preuve du théorème 8.1

Avec les estimations et les résultats concernant la projection, nous avons sous la main les outils nécessaires pour démontrer le théorème 8.1. C'est ce que nous faisons maintenant.

Comme nous l'avons déjà noté, (8.3.a) n'est rien d'autre que l'équation de contrainte. Dans le but de prouver (8.3.b−c) nous définissons, pour toute fonction $\varphi \in \mathbb{K}$ et toute fonction $\psi \in C_0^1([0,T) \times \mathbb{R}^n)$, la fonction test oscillante

$$\phi^\varepsilon(t,x,\xi) = \varphi\left(\frac{x}{\varepsilon},\xi\right)\psi(t,x). \tag{8.44}$$

Nous attirons l'attention sur le fait que dans la suite, nous avons besoin de toutes les fonctions $\varphi \in \mathbb{K}$. Ainsi, la fonction test définie ci-dessus n'est pas forcément dans $C_0^1([0,T) \times \mathcal{O}; C_p^1(Y))$. Donc pour l'utiliser dans la formulation faible, nous devons la régulariser. Définissons alors $\phi_\delta^\varepsilon = \mathcal{X}_\delta(\S,\xi)(\varphi(\frac{\S}{\varepsilon},\xi) * \rho_\delta(\S,\xi))\psi(\sqcup,\S)$, où ρ_δ est un noyau régularisant et où $\mathcal{X}_\delta$ est une fonction régulière valant 1 sur $B(0,1/\delta)$ et 0 sur le complémentaire de $B(0,1/\delta+1)$, $B(0,r)$ désignant la boule de centre 0 et de rayon r. En injectant ϕ_δ^ε dans la formulation faible, nous obtenons

$$\begin{gathered}\int_{\mathcal{Q}} f^\varepsilon\left(\partial_t\phi_\delta^\varepsilon + \xi\cdot\nabla_x\phi_\delta^\varepsilon\right)d\mathcal{Q} \\ +\frac{1}{\varepsilon}\int_{\mathcal{Q}} f^\varepsilon\left(\xi\cdot\nabla_y\phi_\delta^\varepsilon - \nabla_y u(\frac{x}{\varepsilon})\cdot\nabla_\xi\phi_\delta^\varepsilon\right)d\mathcal{Q} = -\int_{\mathcal{O}} f_0^\varepsilon\phi_\delta^\varepsilon(0)\,d\mathcal{O}.\end{gathered} \tag{8.45}$$

En passant à la limite en δ à ε fixé et en utilisant le lemme de Friedrichs, nous obtenons que $\xi\cdot\nabla_y\phi_\delta^\varepsilon - \frac{1}{\varepsilon}\nabla_y u(\frac{x}{\varepsilon})\cdot\nabla_\xi\phi_\delta^\varepsilon \to 0$ et donc que

$$\int_{\mathcal{Q}} f^\varepsilon\left(\partial_t\phi^\varepsilon + \xi\cdot\nabla_x\phi^\varepsilon\right)d\mathcal{Q} = -\int_{\mathcal{O}} f_0^\varepsilon\phi^\varepsilon(0)\,d\mathcal{O}. \tag{8.46}$$

pour toute fonction ϕ^ε définie par (8.44).
En faisant ensuite tendre ε vers 0, nous avons

$$\int_{\mathcal{Q}\times Y} F\left(\partial_t\psi + \xi\cdot\nabla_x\psi\right)\varphi\,d\mathcal{Q}dy = -\int_{\mathcal{O}\times Y} f_0\psi(0)\varphi\,d\mathcal{O}dy, \tag{8.47}$$

pour toute fonction $\varphi \in \mathbb{K}$.
D'après la caractérisation de la projection $\mathbb{P}$, nous déduisons alors de (8.47) que

$$\mathbb{P}\left[\int_{(0,T)\times\mathbb{R}^n} F\left(\partial_t\psi + \xi\cdot\nabla_x\psi\right)dtdx + \int_{\mathbb{R}^n} f_0\psi(0)\,dx\right] = 0. \tag{8.48}$$

Ayant prouvé que, sous les hypothèses (8.1), $\xi F \in L^2(\mathbb{R}^n \times Y)$ pour presque tout $(t,x) \in (0,T)\times\mathbb{R}^n$, en appliquant les propriétés 8.6 et 8.7 de la projection, nous déduisons de (8.48)

$$\int_{(0,T)\times\mathbb{R}^n} \mathbb{P}\left[F\left(\partial_t\psi + \xi\cdot\nabla_x\psi\right)\right]dtdx + \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{P}(f_0)\psi(0)\,dx = 0, \tag{8.49}$$

pour toute fonction $\psi \in C_0^1([0,T) \times \mathbb{R}^n)$. Sachant que $\mathbb{P}(F) = F$, nous tirons alors de (8.49)

$$\begin{cases} \partial_t F + \nabla_x \mathbb{P}(\xi F) = 0, \\ F_{|t=0} = \mathbb{P}(f_0). \end{cases} \tag{8.50}$$

Nous approchons du résultat, il n'y a plus maintenant qu'à transformer $\mathbb{P}(\xi F)$ en $\xi^{\#}(y,\xi)F$. La fonction $\xi^{\#}$ doit être comprise comme la projection de ξ sur $\mathbb{K}$. Cependant, comme $\xi \notin L^2(\mathbb{R}^n; L^2(Y))$, nous allons utiliser l'estimation (8.15.b) pour la définir rigoureusement. Ecrivons

$$\mathbb{P}(\xi F) = \mathbb{P}\left(\frac{\xi}{(H(y,\xi)+1)^\gamma}(H(y,\xi)+1)^\gamma F\right). \tag{8.51}$$

Nous avons

$$\frac{\xi}{(H(y,\xi)+1)^\gamma} \in L^2 \cap L^\infty(\mathbb{R} \times Y), \tag{8.52}$$

et d'après le lemme 8.5,

$$(H(y,\xi)+1)^\gamma F \in \mathbb{K} \text{ pour presque tout } (t,x) \in (0,T) \times \mathbb{R}^n. \tag{8.53}$$

En utilisant alors (8.52) et (8.53) dans (8.51), nous déduisons en utilisant la propriété 8.9

$$\mathbb{P}(\xi F) = \mathbb{P}\left(\frac{\xi}{(H(y,\xi)+1)^\gamma}\right)(H(y,\xi)+1)^\gamma F. \tag{8.54}$$

En utilisant maintenant (8.54) dans (8.50), et en définissant

$$\xi^{\#}(y,\xi) = \mathbb{P}\left(\frac{\xi}{(H(y,\xi)+1)^\gamma}\right)(H(y,\xi)+1)^\gamma, \tag{8.55}$$

nous obtenons (8.3). Ainsi le théorème 8.1 est prouvé.

Remarque 8.10 Si, au lieu de l'hypothèse (8.1.c), nous avions supposé (8.2), à savoir $M^+ f_0 \in L^2(\mathcal{O}; C_p(Y))$, avec $M^\pm(y,\xi) = \exp(\pm H(y,\xi))$, nous démontrerions sans mal que $M^+ F \in L^\infty(0,T; L^2(\mathcal{O}; C_p(Y))$. Nous pourrions alors définir $\xi^{\#}$ par

$$\xi^{\#}(y,\xi) = M^+ \mathbb{P}(M^- \xi). \tag{8.56}$$

Il est intéressant de remarquer que si les deux hypothèses sont satisfaites ensemble, les fonctions $\xi^{\#}$ définies par (8.56) et par (8.55) sont en fait les mêmes. C'est le sens de la remarque qui suit. ∎

Remarque 8.11 D'une manière générale, si il existe deux fonctions v et w de (y,ξ) telles que

$$\frac{\xi}{v} \in L^2 \cap L^\infty(Y \times \mathbb{R}^n),\ Fv \in \mathbb{K},\ \frac{1}{v} \in \mathbb{K} \cap L^\infty(Y \times \mathbb{R}^n), \tag{8.57}$$

$$\frac{\xi}{w} \in L^2 \cap L^\infty(Y \times \mathbb{R}^n),\ Fw \in \mathbb{K},\ \frac{1}{w} \in \mathbb{K} \cap L^\infty(Y \times \mathbb{R}^n), \tag{8.58}$$

alors

$$\begin{aligned} \xi^\# &= \mathbb{P}\left(\frac{\xi}{v}\right) v, \\ &= \mathbb{P}\left(\frac{\xi}{w}\right) w, \end{aligned} \tag{8.59}$$

et il y a égalité des deux définitions.
En effet, sachant que $\dfrac{\xi}{vw} \in L^2(Y \times \mathbb{R}^n)$ nous avons, en utilisant la propriété 8.9,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\frac{\xi}{vw}\right) &= \mathbb{P}\left(\frac{\xi}{v}\right) \frac{1}{w} \\ &= \mathbb{P}\left(\frac{\xi}{w}\right) \frac{1}{v}\ . \end{aligned} \tag{8.60}$$

(8.59) découle alors directement. ■

Remarque 8.12 Remarquons que pour ξ fixé, $\xi^\#(\cdot,\xi)$ est bornée. En effet, grâce à la propriété 8.7, $\mathbb{P}\left(\xi(H+1)^{-\gamma}\right) \in L^\infty$ et $(H(\cdot,\xi)+1)$ est bornée pour ξ fixé.
Ainsi (8.3) a bien un sens à (y,ξ) fixé.
Cette remarque est très importante pour l'étape d'homogénéisation non locale que nous allons maintenant aborder. ■

9 Homogénéisation non locale

Dans cette section, nous réalisons l'étape d'homogénéisation non locale pour le cas du potentiel générant un système hamiltonien intégrable (section 7) et pour le cas général (section 8).

Grâce à la relation liant le profil F à la limite faible f, le comportement effectif de f se déduit en intégrant par rapport à y l'équation (7.14) (pour le cas du système hamiltonien intégrable) ou l'équation (8.3) (pour le cas général). Pour réaliser cette intégration, nous nous inspirons d'une méthode d'homogénéisation développée dans Y.Amirat, K. Hamdache & A.Ziani [5].

Les hypothèses effectuées sur la donnée initiale nous permettent d'écrire

$$F_{|t=0}(x, y, \xi) = f_1(x)a^{\#}(y, \xi), \tag{9.61}$$

où $a^{\#}(y, \xi) = a^{\#}(\mathcal{E}(y, \xi))$, avec $a^{\#}(E)$ défini par (7.21) pour le cas des systèmes hamiltoniens intégrables et $a^{\#}(y, \xi) = \mathbb{P}(a)(y, \xi)$ dans le cas général.
Dans chacun de ces deux cas, les hypothèses effectuées sur $a(y, \xi)$ permettent d'écrire

$$a^{\#} \in L^{\infty}(Y \times \mathbb{R}^n), \ a^{\#} \geq 0. \tag{9.62}$$

Dans le cas général, la propriété (9.62) est une conséquence des propriétés 8.7 et 8.8. En revanche, dans l'autre cas elle provient simplement de la définition de $a^{\#}$.

Pour intégrer (8.3) - (**??**) ou (7.14) - (**??**) par rapport à y, nous commençons par appliquer la transformation de Radon en x (c'est ici que nous avons besoin d'avoir f_1 à support compact). Pour une description complète du cadre mathématique de cette transformation, nous renvoyons à Helgason [29]. Nous définissons $\tilde{F} = (-\partial_r^2)^{(n-1)/4}\mathcal{R}(F)$, $\mathcal{R}$ désignant la transformation de Radon, définie pour $(r, \omega) \in \mathbb{R} \times S^{n-1}$ par

$$\mathcal{R}(F)(t, r, \omega, y, \xi) = \int_{x\cdot\omega=r} F(t, x, y, \xi)dx^*, \tag{9.63}$$

dx^* désignant la mesure de Lebesgue sur l'hyperplan $x \cdot \omega = r$. La fonction $\tilde{F}$ ainsi définie, vérifie l'équation unidimensionnelle suivante

$$\begin{cases} \partial_t \tilde{F} + \xi^{\#}(y, \xi) \cdot \omega \partial_r \tilde{F} = 0, \\ \tilde{F}_{t=0} = \tilde{f}_1(r, \omega)a^{\#}(y, \xi). \end{cases} \tag{9.64}$$

Appliquons la transformation de Laplace en t et celle de Fourier en r à l'équation (9.64). Nous obtenons

$$p\mathcal{L}\mathcal{F}(\tilde{F}) + 2i\pi k\xi^{\#}(y, \xi) \cdot \omega\mathcal{L}\mathcal{F}(\tilde{F}) = \mathcal{F}(\tilde{f}_1)a^{\#}, \tag{9.65}$$

où p et k sont les variables duales t et r respectivement.

Nous déduisons alors l'expression de $\mathcal{L}\mathcal{F}(\tilde{F})$

$$\mathcal{L}\mathcal{F}(\tilde{F}) = \frac{\mathcal{F}(\tilde{f}_1)a^{\#}}{p + 2i\pi k\xi^{\#}(y,\xi)\cdot\omega} \quad . \tag{9.66}$$

Pour calculer la moyenne en y de $\mathcal{L}\mathcal{F}(\tilde{F})$ nous introduisons la fonction ϕ suivante

$$\phi(y,\xi,\omega,z) = a^{\#}(y,\xi)(z + \xi^{\#}(y,\xi)\cdot\omega)^{-1} \tag{9.67}$$

définie pour $(y,\xi,\omega,z) \in Y \times \mathbb{R}^n \times S^{n-1} \times (\mathbb{C} \setminus \Lambda_{\xi,\omega})$, où

$$\Lambda_{\xi,\omega} = [-|\xi^{\#}(\cdot,\xi)\cdot\omega|_\infty, |\xi^{\#}(\cdot,\xi)\cdot\omega|_\infty], \tag{9.68}$$

et holomorphe par rapport à $z \in (\mathbb{C} \setminus \Lambda_{\xi,\omega})$, pour tout ξ. Nous pouvons alors exprimer $\mathcal{L}\mathcal{F}(\tilde{F})$ en fonction ϕ

$$\mathcal{L}\mathcal{F}(\tilde{F}) = \frac{1}{2i\pi k}\mathcal{F}(\tilde{f}_1)\phi\left(y,\omega,\xi,\frac{p}{2i\pi k}\right). \tag{9.69}$$

En appliquant alors la formule (2.64) donnant la moyenne de ϕ, nous obtenons qu'il existe une famille de mesures paramétrées $\nu_{\xi,\omega}$ ayant leur support dans $\Lambda_{\xi,\omega}$ telle que

$$\langle\phi(\cdot,\xi,\omega,z)\rangle = \left\langle a^{\#}(\cdot,\xi)\right\rangle \left\{z + D(\xi)\cdot\omega - \int (z-\lambda)^{-1}\, d\nu_{\xi,\omega}(\lambda)\right\}^{-1}, \tag{9.70}$$

pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$, $z \in (\mathbb{C} \setminus \Lambda_{\xi,\omega})$, $\omega \in S^{n-1}$. La fonction $D(\cdot)$ est définie par

$$D(\xi) = \left\langle a^{\#}(\cdot,\xi)\xi^{\#}(\cdot,\xi)\right\rangle \left\langle a^{\#}(\cdot,\xi)\right\rangle^{-1}. \tag{9.71}$$

Nous déduisons alors

$$\begin{aligned}\left\langle \mathcal{L}\mathcal{F}(\tilde{F})\right\rangle \;=\; & \mathcal{F}(f_1)\left\langle a^{\#}(\cdot,\xi)\right\rangle \Big\{ p + 2i\pi k D(\xi)\cdot\omega \\ & -(2i\pi k)^2 \int (p + 2i\pi k\lambda)^{-1} d\nu_{\xi,\omega}(\lambda)\Big\}^{-1},\end{aligned} \tag{9.72}$$

(9.72) permet d'établir que $\langle\tilde{F}\rangle$ (qui est égale à $\tilde{f} = (-\partial_r^2)^{(n-1)/4}f$) vérifie

$$\begin{cases} \partial_t\tilde{f} + D(\xi)\cdot\omega\partial_r\tilde{f} - \displaystyle\int_0^t ds \int d\nu_{\xi,\omega}\partial_r^2\tilde{f}(s, r+\lambda(t-s),\omega,\xi), \\ \tilde{f}_{|t=0} = \tilde{f}_1\langle a^{\#}(\cdot,\xi)\rangle. \end{cases} \tag{9.73}$$

Nous introduisons maintenant la fonction auxiliaire $w(t,r,\omega,\xi,\lambda) = \int_0^t \partial_r\tilde{f}(s, r+\lambda(t-s),\omega,\xi)\, ds$. Ainsi le couple $(\tilde{f}, w)$ vérifie le système

$$\begin{cases} \partial_t\tilde{f} + D(\xi)\cdot\omega\partial_r\tilde{f} - \displaystyle\int d\nu_{\xi,\omega}(\lambda)\partial_r w(t,r,\omega,\xi,\lambda) = 0, \\ \partial_t w + \lambda\partial_r w - \partial_r\tilde{f} = 0. \end{cases} \tag{9.74}$$

En appliquant l'opérateur $(-\partial_r^2)^{(n-1)/4}$ à (9.74.a) et en remplaçant $\tilde{f}$ par son expression, nous arrivons à

$$\left\{\begin{array}{l} \partial_t(-\partial_r^2)^{(n-1)/2}f + D(\xi)\cdot\omega\partial_r(-\partial_r^2)^{(n-1)/2}f \\ \qquad\qquad - \displaystyle\int d\nu_{\xi,\omega}(\lambda)p_r(-\partial_r^2)^{(n-1)/4}w(t,r,\omega,\xi,\lambda) = 0, \\ \partial_t w + \lambda\partial_r w - \partial_r\tilde{f} = 0. \end{array}\right. \tag{9.75}$$

Pour déduire l'équation satisfaite par f, nous utilisons la transformation de Radon inverse

$$f = \int_{S^{n-1}} (-\partial_r^2)^{(n-1)/2}\mathcal{R}(f)(t, x\cdot\omega, \omega, \xi)d\omega. \tag{9.76}$$

Pour cela, nous définissons la famille de mesures paramétrées sur $\Lambda_\xi \times S^{n-1}$, $\sigma_{\xi,\omega}(\lambda,\omega)$ où

$$\Lambda_\xi = [-|\xi^\#(\cdot,\xi)|_\infty, |\xi^\#(\cdot,\xi)|_\infty], \tag{9.77}$$

par

$$\langle d\nu_\xi(\lambda,\omega), g(\lambda,\omega)\rangle = \int_{S^{n-1}}\int_{\Lambda_{\xi,\omega}} g(\lambda,\omega)d\sigma_{\xi,\omega}(\lambda), \tag{9.78}$$

pour toute fonction test g.
En utilisant cette définition et en intégrant (9.75) par rapport à $\omega \in S^{n-1}$, après avoir posé $r = x\cdot\omega$, nous obtenons (8.6) ou (7.20) et les théorèmes 8.2 et 7.8 sont ainsi prouvés.

Références

[1] **R.Abraham, J.E.Marsden, T.Ratiu,** Differential Calculus and Manifold Analysis. *S. in Pure Math, Vol. 20, Spinger Verlag, (1983)*

[2] **R.Alexandre, K.Hamdache,** Homogenization of kinetic equations in non homogeneous medium. *To appear*

[3] **G.Allaire,** Homogenization and two scale convergence. *S.I.A.M., J. on Mathematical Analysis, Vol 23, num 6, p. 1482-1518, (1992)*

[4] **Y.Amirat, K.Hamdache, A.Ziani,** Homogénéisation d'équations hyperboliques du premier ordre et application aux écoulements missibles en milieux poreux. *Ann. Inst. Henri Poincaré, Analyse non linéaire, Vol. 6 num. 5, p397-417, (1989)*

[5] **Y.Amirat, K.Hamdache, A.Ziani,** Homogenization of parametrised families of hyperbolic problems. *Proceeding of the Royal Society of Edinburgh, 120 A, p. 199-221, (1992)*

[6] **Y.Amirat, K.Hamdache, A.Ziani,** Kinetic formulation for a transport equation with memory. *Commun. in partial differential equations, 16 (8&9), p 1287-1311, (1991)*

[7] **Y.Amirat, K.Hamdache, A.Ziani,** Homogenization of degenerated wave equations with periodic coefficients. *To appear in S.I.A.M., J. Math. Anal.*

[8] **V.I.Arnold,** Mathematical Methods of Classical Mechanics. *Spinger-Verlag (1989)*

[9] **C.Bardos, L.Dumas, P.Gérard & F.Golse,** Systèmes dynamiques et équations cinétiques : résultats et perspectives. *Rapport CMLA, F94235 Cachan France, Num. 9307, (1993)*

[10] **C.Bardos, F.Golse, B.Perthame & R.Sentis,** The nonaccretive radiative transfer equations. Existence of solutions and Rosseland approximation. *J. Funct. Anal., Vol. 77, p. 334-360, (1988)*

[11] **A.Bensoussan, J.L.Lions, G.Papanicolaou,** Asymptotic analysis for periodic structures. *Studies in Math and its Appl., Vol 5 North Holland, (1978)*

[12] **C.Cercignani,** The Boltzmann Equation and Its Applications *Appl. Math. Sciences, vol 67, Springer-Verlag, (1988)*

[13] **R.Dautray, J.L.Lions,** Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques. *vol. 9, INSTN, CEA, Masson, (1988)*

[14] **P.Degond, P.A.Markowich,** A mathematical analysis of quantum transport in three dimensional crystal. *Report, Centre de mathématiques appliquées , F91120, Palaiseau, France, (1989)*

[15] **R.J.Di Perna, P.L.Lions,** Ordinary differential equation, tranport theory and Sobolev spaces. *Invent. Math. 98, (1990)*

[16] **R.J.Di Perna, P.L.Lions,** Global weak solution for Maxwell-Poisson system. *Comm. in Pure and Appl. Math. 120, (1990)*

[17] **R.J.Di Perna, P.L.Lions, Y.Meyer,** L^p regularity of velocity average *Rapport du CEREMADE num 9013, (1990)*

[18] **W.F.Donogue,** Monotone Matrix Functions and Analytic Continuation. *Berlin, Springer, (1974)*

[19] **W.E,** Homogenization of linear and non linear transport equations. *Comm. in Pure and Appl. Math, vol XLV, num 3, p.301-326, (1992)*

[20] **A.Fannjianng, G.Papanicolaou,** Convection enhanced diffusion for periodic flows. *A paraître dans S.I.A.M. J. Appl. Math.*

[21] **G.Frosali, C.V.M.Van der Mee, L.Paveri-Fontana,** Conditions for runaway of particle swarm. *To appear in J. Math. Phys.*

[22] **P.Gérard,** Mesures semi-classiques et ondes de Bloch. *Seminaire EDP 1990-1991, Ecole Polytechnique, F-91120 Palaiseau, (1991)*

[23] **F.Golse,** Remarque sur l'homogénéisation des équations de trasport. *C. R. Acad. Sci. Paris, t. 305, p. 801-804 (1988)*

[24] **F.Golse,** Perturbations de systèmes dynamiques et moyennisation en vitesse des EDP. *C. R. Acad. Sci. Paris, t. 314, p. 115-120 (1992)*

[25] **F.Golse, P.L.Lions, B.Perthame, R.Sentis,** Regularity of the Moments of the Solution of a Transport Equation. *J. of Funct. Anal., vol 76, p. 110-125 (1988)*

[26] **F.O.Goodman, Y.W.Wachman,** Dynamics of gas-surface scattering. *Academic press, (1976)*

[27] **I.S.Gradshteyn, I.M.Ryzhik,** Table of integrals, series and products. *Academic Press, (1980)*

[28] **W.Greenberg, C.V.M.Van der Mee, V.Protopopescu,** Boundary value problems in abstract kinetic theory. *Operator theory Adv. and Appl. 23, Birkäuser.*

[29] **S.Helgason,** The Radon transform. *Progress in Mechanics 5, Boston, Birkäuser, (1980)*

[30] **J.L.Joly, J.Rauch,** Justification of multidimensional single phase semilinear geometric optics. *Transactions of the American Mathematical Society, vol 330, num 2, April (1992)*

[31] **J.L.Joly, G.Metivier, J.Rauch,** Generic rigorous asymptotic expansions for weakly nonlinear multidimensional oscillatory waves. *Centre de recherche en mathematiques de Bordeaux, 9203, (1992)*

[32] **J.L.Lions,** Some Methods in the Mathematical Analysis of systems and their control. *Science Press, Beijing, China.*

[33] **P.L.Lions, T.Paul,** Sur les mesures de Wigner. *Cahiers de mathématiques de la décision, num 9227, CEREMADE, (1992)*

[34] **P.A.Markowich, C.A.Ringhofer, C.Schmeiser,** Semiconductor Equations. *Springer-verlag Wien New York, (1990)*

[35] **G.N'Guetseng,** A general convergence result for a functional related to the theory of homgenization. *S.I.A.M., J. Math. Anal., Vol 29-3, p.608-623, (1989)*

[36] **G.N'Guetseng,** Asymptotic analysis for a stiff variational problem arising in mechanics. *S.I.A.M., J. Math. Anal., Vol 21-6, p.1394-1414, (1990)*

[37] **F.Poupaud,** Runaway phenomena and fluid approximation under high fields in semiconductor kinetik theory. *Rapport de recherche de l'université de Nice.*

[38] **F.Murat,** H-convergence. *Seminaire d'analyse fonctionnelle et numérique. Université d'Alger, département des mathématiques (1978)*

[39] **E.Sanchez Palencia,** Non Homogeneous Media and Vibration Theory. *Lect. Notes in Physics 127, Springer Verlag.*

[40] **A.M.Soward, S.Childress,** Large magnetic Reynolds number dynamo action in a spacially periodic flow with mean motion. *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A 333, p. 649-733 (1990)*

[41] **H.Steinrück,** The Wigner-Poisson problem in a crystal : existence, uniqueness, semi-classical limit in the one-dimensional case. *Report, Inst. f. Ang. u. Num. Mathematik, T.U.-Wien, Austria, (1989)*

[42] **L.Tartar,** Cours Peccot, collège de France, (1977) Partialy written in [38]

[43] **L.Tartar,** Non local effects induced by homogenization. Partial Differential Equations and the Calculus of Variations. *Essay in Honor of Ennio De Giorgy, II, 925-938, Birkaüser, Boston, (1989)*

[44] **L.Tartar,** Remarks on homogenization. *Homogenization and effective Moduli of materials and media, IMA vol. in Math and its Appl., Vol 1, Springer-Verlag, p. 228-246, (1986)*

[45] **L.Tartar,** Memory Effects and Homogenization. *Arch. Rational Mech. Anal. 111, p. 121-133, (1990)*