Rapports relatifs à l'Habilitation à diriger des Recherches et au Doctorat de Emmanuel Frénod

Rapports relatifs à l'Habilitation à diriger des Recherches de Emmanuel Frénod

UNIVERSITÉ DE BRETAGNE-SUD

PROCES-VERBAL D'ADMISSION AU DIPLOME D'HABILITATION A DIRIGER DES RECHERCHES

Vu l'arrêté du 23 novembre 1988 relatif à l'habilitation à diriger des recherches ;
Vu la circulaire n° 89-004 du 5 janvier 1989 modifiée par la circulaire n° 89-98 du 19 avril 1989 relative à l'application de l'arrêté du 23 novembre 1988 ;
Vu l'avis du Conseil d'Université restreint du 29 octobre 1999 ;
Vu la décision du 2 décembre 1999 autorisant M. Emmanuel FRENOD à s'inscrire à l'habilitation à diriger des recherches ;
Vu les avis émis par les membres du jury sur l'habilitation à diriger des recherches soutenue le 9 décembre 1999 par M. Emmanuel FRENOD ;
Vu le rapport rédigé par le Président du jury ;

M. Emmanuel FRENOD est admis au diplôme d'habilitation à diriger des recherches au titre de l'année universitaire 1999/00.

Fait à Vannes, le 9 Décembre 1999

Le Président du Jury :

JM Ghidaglia

Les membres du jury :

M. Grégoire ALLAIRE — M. Jean-Michel GHIDAGLIA — M. Emile LE PAGE

M. Michel PIERRE — M. Jean-Jacques QUEMENER — M. Didier ROBERT

4, rue Jean Zay - 56325 Lorient
Tél. 02 97 64 05 60 - Fax 02 97 64 05 70

12, avenue St-Symphorien - B.P. 573 - 56017 Vannes
Tél. 02 97 68 16 20 - Fax 02 97 68 16 39

UBS

UNIVERSITÉ DE BRETAGNE-SUD

RAPPORT RELATIF A LA SOUTENANCE DE L'HABILITATION A DIRIGER DES RECHERCHES DE M. EMMANUEL FRENOD

Vu l'arrêté du 23 novembre 1988 relatif à l'habilitation à diriger des recherches ;
Vu la circulaire n° 89-004 du 5 janvier 1989 modifiée par la circulaire n° 89-98 du 19 avril 1989 relative à l'application de l'arrêté du 23 novembre 1988 ;
Vu l'avis du Conseil d'Université restreint du 29 mars 1999 ;
Vu la décision du 2 décembre 1999 autorisant M. Emmanuel FRENOD à s'inscrire à l'habilitation à diriger des recherches ;
Vu les avis émis par les membres du jury sur l'habilitation à diriger des recherches soutenue le 9 décembre 1999 par M. Emmanuel FRENOD;
Vu le rapport rédigé par le Président du jury ;

Monsieur Emmanuel FRENOD a clairement exposé l'ensemble de ses travaux au cours d'un exposé brillant, vivant et pédagogique conforme au document de synthèse qu'il a fourni.

Le jury rejoint les rapporteurs pour souligner la grande qualité scientifique des travaux. Ceux-ci comportent notamment une nouvelle approche de l'homogénéisation des équations cinétiques ; approche efficace et qui ouvre de nouveaux champs applicatifs. Ce travail est un bel ensemble complet de mathématiques appliquées, depuis la modélisation jusqu'au calcul scientifique en passant (longuement) par l'analyse mathématique.

Le jury, dans sa diversité, a tout particulièrement été impressionné par la maturité et l'aisance avec lesquelles le candidat a interagi avec lui lors des questions en fin de soutenance.

Pour toutes ces raisons le jury unanime, juge Monsieur Emmanuel FRENOD digne de l'Habilitation à Diriger des Recherches et il estime que Monsieur Emmanuel FRENOD est un excellent candidat aux fonctions de Professeur des Universités.

Fait à Vannes, le 9 Décembre 1999

Le Président du Jury :

JM Ghidaglia

Les membres du jury :

M. Grégoire ALLAIRE

M. Jean-Michel GHIDAGLIA

M. Emile LE PAGE

M. Michel PIERRE

M. Jean-Jacques QUEMENER

M. Didier ROBERT

4, rue Jean Zay - 56325 Lorient
Tél. 02 97 64 05 60 - Fax 02 97 64 05 70

12, avenue St-Symphorien - B.P. 573 - 56017 Vannes
Tél. 02 97 68 16 20 - Fax 02 97 68 16 39

Rapport sur le projet d'habilitation à diriger des recherches
d'Emmanuel FRENOD

Le dossier d'habilitation à diriger des recherches de Monsieur E. Frénod, intitulé "Homogénéisation et simulation d'équations cinétiques" se compose d'une présentation générale de ses travaux (d'une cinquantaine de pages), de 4 articles parus ou acceptés pour publication, de 2 articles et 1 note soumis à publication, et de 2 rapports techniques sur des travaux numériques effectués pour le CEA. L'ensemble de ces travaux est bien équilibré entre les divers champs d'action des mathématiques appliquées : modélisation, analyse théorique d'équations aux dérivées partielles, et analyse numérique de ces équations, y compris la partie programmation des schémas. La motivation physique est la simulation des plasmas à l'aide d'équations cinétiques du type équation de Vlasov ou de Vlasov-Poisson. E. Frénod s'est plus particulièrement intéressé à des questions d'analyse asymptotique, d'homogénéisation, et de schémas numériques pour ces équations cinétiques.

On peut grossièrement classer ces travaux en trois groupes. Tout d'abord, son travail de thèse sur l'homogénéisation d'équations cinétiques linéaires (Vlasov) avec potentiel oscillant. Ensuite, ses travaux récents sur l'approximation gyrocinétique des équations de Vlasov ou de Vlasov-Poisson, c'est-à-dire l'analyse asymptotique de ces équations en présence de forts champs magnétique et/ou électrique. Enfin, son travail sur des schémas numériques conservatifs et entropiques pour les équations de Fokker-Planck en géométrie axisymétrique. Je les décris dans cet ordre.

Dans sa thèse puis dans un article écrit avec son directeur de thèse, K. Hamdache, E. Frénod a étudié l'homogénéisation de l'équation de Vlasov avec potentiel oscillant. Si on note $f^\epsilon(t,x,\xi)$ la densité de particules au temps t au point x et à la vitesse ξ, solution de

$$\begin{cases} \partial_t f^\epsilon + \xi\cdot\nabla_x f^\epsilon + E^\epsilon\cdot\nabla_\xi f^\epsilon = 0 \text{ dans } I\!R^+\times I\!R^N\times I\!R^N, \\ f^\epsilon(0,x,\xi) = f_0^\epsilon(x,\xi), \end{cases}$$

où f_0^ϵ est une donnée initiale et E^ϵ est un champ fortement oscillant du type

$$E^\epsilon(x,\xi) = -\frac{1}{\epsilon}\nabla_y u(x,\frac{x}{\epsilon}) - \nabla_y u(x,\frac{x}{\epsilon}) + B(x,\frac{x}{\epsilon},\xi)$$

avec $u(x,y)$ un potentiel périodique en $y\in(0,1)^N$. En utilisant la notion de convergence à deux échelles, il est facile de montrer que $f^\epsilon(t,x,\xi)$ doit se comporter asymptotiquement comme $F(t,x,\frac{x}{\epsilon},\xi)$ où la fonction F satisfait une équation de contrainte

$$\begin{cases} \xi\cdot\nabla_y F - \nabla_y u\cdot\nabla_\xi F = 0, \\ y\to F(t,x,y,\xi)\ (0,1)^N\text{-périodique.} \end{cases}$$

La plus grande difficulté est d'interpréter cette équation, c'est-à-dire de savoir quelle est la structure de F. Une fois connue le type de la fonction F on obtient l'équation homogénéisée vérifiée par la moyenne de F en y en multipliant l'équation de Vlasov par une fonction test qui vérifie aussi l'équation de contrainte et en passant à la limite par des techniques d'homogénéisation standard. Dans ce cas l'équation homogénéisée est assez compliquée avec des termes intégro-différentiels qui traduisent un effet de mémoire.

Moralement, l'équation de contrainte dit que F doit être constante le long des lignes de courant du champ de vecteur $(\xi,-\nabla_y u)$ dans l'espace des phases. Mais la caractérisation fonctionnelle de telles fonctions F n'est pas évidente. Il faut étudier le système hamiltonien qui donnent les courbes caractéristiques périodiques de ce champ de vecteur. Caché derrière cette étude on trouve des arguments d'ergodicité de ces lignes de courant sur le tore. En pratique, E. Frénod traite des cas particuliers de potentiels u qui s'écrivent, par exemple, comme somme de fonctions d'une seule variable

$$u(y) = \sum_{i=1}^{N} u_i(y_i).$$

E. Frénod obtient ainsi des résultats difficiles et très techniques qui sont sans équivalent dans la litérature.

Le deuxième thème de recherche abordé par E. Frénod dans trois articles en collaboration avec E. Sonnendrucker et P.A. Raviart est l'approximation gyrocinétique des équations de Vlasov ou de Vlasov-Poisson. Décrivons brièvement le cas le plus simple parmi une famille de problèmes traités par la même méthode. La densité de particules $f^\epsilon(t, x, \xi)$ est désormais solution de

$$\begin{cases} \partial_t f^\epsilon + \xi \cdot \nabla_x f^\epsilon + \left(E(x,t) + \xi \times B(x,t) + \frac{1}{\epsilon}\xi \times \mathcal{B}\right) \cdot \nabla_\xi f^\epsilon = 0 \text{ dans } \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N, \\ f^\epsilon(0, x, \xi) = f_0(x, \xi), \end{cases}$$

où f_0 est une donnée initiale et $\mathcal{B}$ est un champ magnétique constant. Il s'agit d'un problème de perturbation singulière où le petit paramètre ϵ tends vers 0. D'un point de vue physique on s'attend à ce que les particules suivent des trajectoires hélicoïdales le long des lignes de champ magnétique. Quand on moyenne ces trajectoires en temps on s'attend à trouver des trajectoires effectives parcourues à vitesse plus lente dans la direction de $\mathcal{B}$. C'est l'approximation gyrocinétique ou centre guide des physiciens. E. Frénod démontre rigoureusement qu'à la limite $\epsilon \to 0$ f^ϵ est une fonction périodiquement oscillante du temps (avec une très courte période proportionnelle à ϵ) et que sa moyenne $f(t, x, \xi)$ sur une période est la solution d'une équation effective de transport

$$\begin{cases} \partial_t f + \xi_{||} \cdot \nabla_x f + \left(E_{||}(x,t) + \xi \times B_{||}(x,t)\right) \cdot \nabla_\xi f = 0 \text{ dans } \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N, \\ f(0, x, \xi) = m\left(f_0(x, \xi)\right), \end{cases}$$

où l'index $||$ indique la composante parallèle à $\mathcal{B}$ d'un vecteur, et $m(\cdot)$ est un opérateur de moyenne sur une période de trajectoire. Sa démonstration utilise de façon très élégante et astucieuse la notion de convergence à deux échelles bien connue en homogénéisation (ici il s'agit de deux échelles de temps). De nombreuses généralisations (fort champ électrique, forte vitesse transverse, etc.) sont aussi étudiées.

Il s'agit là, à mon avis, d'un très beau résultat sur un sujet difficile et actuellement très étudié (citons notamment les travaux de Y. Brenier, F. Golse, E. Grenier). Malgré cette situation très compétitive, E. Frénod et ses collaborateurs ont réussi à obtenir des résultats nouveaux et très frappants, et ce d'autant plus que leurs outils techniques sont assez simples en définitive. Ce dernier point n'est pas une critique, bien au contraire : ils ont su rendre simple et lumineux ce qui ne l'était pas à première vue.

Le troisième thème de recherche étudié par E. Frénod dans un article en collaboration avec B. Lucquin et dans le cadre d'une collaboration avec le CEA/DAM est l'analyse numérique des équations de Fokker-Planck. Rappelons que ces équations sont un modèle simplifié des équations de Boltzmann dans lequel l'opérateur de collision quadratique est un opérateur intégro-différentiel. Comme pour Boltzmann, il existe une entropie cinétique qui décroit au cours du temps et les moments d'ordre 0, 1, et 2 de la fonction de répartition sont conservés (c'est-à-dire que la masse, la quantité de mouvement et l'énergie sont conservées). Il est essentiel pour des raisons de consistance physique que les schémas numériques respectent ces propriétés de conservation et de décroissance de l'entropie. Il faut faire attention cependant de ne pas introduire de nouveaux invariants qui sont de purs artefacts numériques. Généralisant des travaux de P. Degond et B. Lucquin, E. Frénod construit un tel schéma numérique conservatif et entropique en géométrie axisymétrique, ce qui rajoute des contraintes sur la discrétisation. Il s'agit d'une méthode d'éléments finis $Q1$ avec une discrétisation astucieuse en espace-temps du noyau de collision qui permet de garantir au niveau discret les propriétés du modèle continu, et celles-là seulement. Cette analyse du schéma est confirmée par des calculs numériques exposés dans les rapports écrits pour le CEA.

Le document qui présente et résume les travaux est très bien et très clairement rédigé. Le nombre d'articles écrits par E. Frénod (4 parus et 2 soumis) me parait correct pour le niveau d'une habilitation. Plus encore, leur qualité est indéniable (ils sont tous parus dans des revues internationales de premier plan), et bien qu'ils soient tous dans le même thème ils présentent des aspects variés et originaux qui témoigne d'une évolution et d'un renouvellement des sujets de recherche. Bien que tous les articles d'E. Frénod soient cosignés avec des collaborateurs, je ne doute pas de la contribution personnelle essentielle d'E. Frénod à leur réalisation. Le seul petit reproche que l'on peut faire sur ce dossier est peut-être une légère précipitation dans la rédaction des derniers articles soumis. A mon avis ils auraient gagné à être rédigés (et commentés) plus soigneusement, et le dossier aurait été plus convaincant et plus fourni encore avec une ou deux années de travail supplémentaire. Mis à part cette petite réserve personnelle, j'ai une très bonne estime des travaux de E. Frénod qui prouvent qu'il a acquis une complète autonomie dans sa recherche. Son programme de recherches est très pertinent et au meilleur niveau international ce qui lui permet de pouvoir diriger des recherches. J'estime donc qu'il s'agit d'une bonne habilitation, très complète, en mathématiques appliquées.

J'émets donc un avis favorable à la soutenance d'habilitation à diriger des recherches d'E. Frénod.

Grégoire ALLAIRE
Professeur à l'Université Paris 6

Rapport sur les travaux présentés par E. Frénod en vue d'une habilitation à diriger les recherches

Le mémoire de E. Frénod comprend une présentation générale de ses travaux de 50 pages, suivie de textes que je regroupe par thèmes selon le plan très clair proposé par Frénod lui-même.

(1) Thèse (94) et 1 article (Proc. Royal Soc. Edinburgh 96, en collaboration avec Hamdache, directeur de la thèse)

(2) 4 articles parus ou en cours correspondant aux travaux après thèse réalisés en collaboration avec E. Sonnendrücker / P. A. Raviart. Les deux qui sont parus ont été publiés dans Asymp. Anal. 98 et Math. Mod. Meth. Appl. Sci.

(3) 1 article en collaboration avec B. Lucquin paru dans Math. Mod. and Num. Anal. 98 et 2 rapports du CEA 96.

Le thème général des recherches de Frénod est cohérent. Il concerne d'une part l'étude des équations de Vlasov avec diverses dynamiques dépendant d'un petit paramètre et définies par

1) un champ de force fort, d'amplitude $O(1/\varepsilon)$, et oscillant à haute fréquence dans le thème (1),

2) un champ de force électromagnétique fort, d'amplitudes $O(1/\varepsilon)$, et appliqué sur des temps $O(1)$ ou $O(1/\varepsilon)$ pour le thème (2)

et d'autre part la construction d'opérateurs de Fokker-Planck discrets conduisant à divers algorithmes de discrétisation pour le thème (3).

Dans 1) et 2) les problèmes sont donc en général linéaires (sauf pour le modèle Vlasov-Poisson) tandis que 3) est non linéaire.

Je vais analyser les points 1) et 2) avec quelques détails, laissant de côté le point (3) qui est moins de ma compétence.

1) Équations cinétiques avec potentiel oscillant

L'équation de Vlasov s'écrit

$$\left(\partial_t + v \cdot \partial_x - \frac{1}{\varepsilon}\partial_\theta U(x/\varepsilon) \cdot \partial_v\right) f^\varepsilon = 0, \quad f^\varepsilon_{|t=0} = f^\varepsilon_0,$$

le potentiel $U(\theta)$ étant régulier et périodique en θ.

Le résultat général obtenu par Frénod est le suivant : la suite f^ε se décrit asymptotiquement au moyen d'un profil $F(t,x,v,\theta)$ c'està-dire qu'on a $f^\varepsilon(t,x,v) \sim F(t,x,v,x/\varepsilon)$ où F, qui est périodique en θ, est solution du problème

$$\begin{aligned} &PF = F \\ &(\partial_t + v^\sharp(v,\theta) \cdot \partial_x)F = 0 \\ &F(0,x,v,\theta) = PF_0 \end{aligned}$$

Dans ces équations, P désigne un projecteur sur l'ensemble des profils invariants par le flot hamiltonien de $E = \frac{1}{2}|v|^2 + U(\theta)$

$$v \cdot \partial_\theta - \partial_\theta U(\theta) \cdot \partial_v$$

et $v^\sharp = Pv$. Dans certains cas Frénod explicite l'opérateur P et la vitesse $v^\sharp$. D'abord, dans le cas de la dimension 1, $F = PF$ signifie que le profil se factorise en

$$F(t, x, v, \theta) = G(t, x, \mathcal{E}(v, \theta))$$

avec $\mathcal{E}(v, \theta) = \mathrm{sgn}(v)\sqrt{\frac{1}{2}v^2 + U(\theta)}$. La vitesse encore et abusivement notée $v^\sharp(\mathcal{E}(v, \theta))$ vaut 0 sur les trajectoires sous-critiques c'est-à-dire d'énergie $\mathcal{E}^2 \leq \max U$. Sur les orbites sur-critiques elle vaut $\mathrm{sgn}(v)\frac{2\pi}{T_{2\pi}}$, qui est la vitesse moyenne sur cette orbite sur-critique, $T_{2\pi}$ étant le temps qu'il faut pour passer de $\theta = 0$ à $\theta = 2\pi$.

Le cas de la dimension $d > 1$ est beaucoup plus compliqué dans le cas général. Il se ramène cependant plus ou moins facilement à celui de la dimension 1 lorsqu'il est possible (cas intégrable) de trouver d solutions indépendantes de

$$(v \cdot \partial_\theta - \partial_\theta U(\theta) \cdot \partial_v) S = 0.$$

Frénod décrit en détail le cas modèle où $U(\theta) = \sum_{1 \leq k \leq d} U_k(\theta_k)$. Le problème de Cauchy pour le profil a une formulation analogue à celle qui est établie en dimension 1.

La suite de l'étude concerne plusieurs perturbations du hamiltonien précédent en dimension 1 ce qui peut conduire à des profils à deux phases avec des conditions de transmission à la frontière de zônes du plan de phase où le champ hamiltonien possède des propriétés qualitatives différentes.

Enfin Frénod examine le cas d'un potentiel radial en dimension $d = 2$. La situation ne se ramène pas à la précédente car le hamiltonien dépend cette fois aussi de la position x qui est une variable lente. On est dans un cas à coefficients variables qui nécessite un traitement un peu différent.

Après cette étude d'exemples variés de dynamique où il a pu déterminer l'asymptotique de la solution de l'équation de Vlasov, Frénod cherche à décrire la loi d'évolution du mode moyen du profil, qui est la fonction $f(t, x, v) = \int_0^{2\pi} F(t, x, v, \theta) \frac{d\theta}{2\pi}$, et qui est aussi la limite faible des solutions de l'équation de Vlasov quand $\varepsilon \to 0$.

Le résultat, même s'il repose sur des idées anciennes, est intéressant. Il dit en effet que dans la plupart des cas l'évolution de f n'est, semble-t-il, pas hyperbolique. Ceci est donc différent de résultats équivalents en optique physique ou en hydrodynamique où le mode moyen suit une évolution plus complexe qu'un simple transport mais qui reste hyperbolique. J'aurais cependant souhaité deses commentaires plus abondants concernant les propriétés de cette dynamique.

La méthode employée par Frénod suit une idée de Tartar et a été mise au point par Hamdache, Amirat et Ziani (92) pour un problème un peu différent. Elle utilise un théorème abstrait de représentation intégrale des fonctions de Nevanlinna qu'on applique à la transformée de Fourier-Laplace de la fonction F si $d = 1$ ou de sa transformée de Radon si $d > 1$.

2) Approximation gyrocinétique

Les problèmes étudiés peuvent être considérés comme une première étape vers l'étude du système de Vlasov-Maxwell complet modélisant l'évolution d'un population de particules chargées (constituée d'une seule espèce de particules) en présence d'un champ électromagnétique. Les champs électrique et magnétique sont ici donnés *a priori*, les champ induits par le nuage étant eux supposés négligeables, ce qui rend le problème linéaire.

Le problème type étudié correspond à l'équation de Vlasov suivante

$$\left(\partial_t + v \cdot \partial_x + \frac{1}{\varepsilon}(\mathbf{E}_0 + \varepsilon \mathbf{E}_1)(t,x) + v \times (\mathbf{B}_0 + \varepsilon \mathbf{B}_1)(t,x)\right) \cdot \partial_v \big) f^\varepsilon = 0,$$

avec $\mathbf{E}_0 = \mathbf{N}$ et $\mathbf{B}_0 = \mathbf{M}$ orthogonaux entre eux et constants (on peut les supposer unitaires) , les champs $\mathbf{E}_1(t,x)$ et $\mathbf{B}_1(t,x)$ étant lentement variables. Comme précédemment, il s'agit d'étudier les propriétés asymptotiques de la solution f^ε sur une durée $O(1)$.

Le résultat principal dit que la solution admet asymptotiquement un profil $F(t,\tau,x,v)$, 2π-périodique en τ, tel que que $f^\varepsilon(t,x,v) \sim F(t,\frac{t}{\varepsilon},x,v)$ quand $\varepsilon \to 0$. Ce profil vérifie deux équations selon un schéma classique de la méthode BKW.

La première équation est imposée par la dynamique rapide

$$\left(\partial_\tau + (\mathbf{N} + v \times \mathbf{M}) \cdot \partial_v\right) F = 0$$

dont les caractéristiques $s \mapsto (s, v(s))$ vérifient

$$\frac{d}{ds} v(s) = \mathbf{N} + v(s) \times \mathbf{M},$$

donc, puisque $(\mathbf{N} \times \mathbf{M}) \times \mathbf{M} = -\mathbf{N}$, sont solutions de

$$\frac{d}{ds}\left(v(s) - \mathbf{N} \times \mathbf{M}\right) = \left(v(s) - \mathbf{N} \times \mathbf{M}\right) \times \mathbf{M},$$

indiquant l'effet de dérive selon le champ $\mathbf{N} \times \mathbf{M}$ dû à la force de Coriolis. On a donc

$$v(s) = \mathbf{N} \times \mathbf{M} + \mathcal{R}_{\mathbf{M}}(-s)(v(0) - \mathbf{N} \times \mathbf{M}), \quad s \in \mathbb{R}$$

où $\mathcal{R}_{\mathbf{M}}(s)$ désigne la rotation d'angle s et d'axe $\mathbf{M}$ et on en déduit que

$$F(t,\tau,x,v) = F_0(t,x,\mathbf{N} \times \mathbf{M} + \mathcal{R}_{\mathbf{M}}(\tau)\left(v - \mathbf{N} \times \mathbf{M}\right)),$$

où $F_0(t,x,v)$ désigne le profil associé à la condition initiale.

La seconde équation s'obtient comme condition de résolubilité de l'équation suivante de la méthode BKW. Elle conduit à l'équation suivante sur F_0.

$$\left(\partial_t + (\mathbf{N}\times\mathbf{M} + \pi_{\mathbf{M}} v) \cdot \partial_x + \left(\pi_{\mathbf{M}}(\mathbf{E}_1 + \mathbf{N}\times\mathbf{M}\times\mathbf{B}_1) + (v - \mathbf{N}\times\mathbf{M}) \times \pi_{\mathbf{M}}\mathbf{B}_1\right) \cdot \partial_v\right) F_0 = 0$$

et à la condition initiale

$$F_0(0,x,v) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_0(x, v(s;v))\, ds.$$

Ce résultat établit, Frénod l'applique au système non linéaire de Vlasov-Poisson, utilisant des résultats classiques pour démontrer la convergence forte du champ électrique, ce qui permet de passer à la limite dans les termes non linéaires. Il étudie ensuite deux modèles d'approximation dits du "rayon de Larmor fini" et "centre-guide".

Les résultats précédents sont démontrés avec les techniques habituelles des fonctions test utilisées en homogénéisation.

Enfin dans un travail commun avec Raviart et Sonnendrücker les auteurs emploient la méthode BKW pour retrouver certains des résultats précédents ainsi que les équations pour le deuxième terme du développement asymptotique. Ils donnent aussi une preuve de la stabilité de cette approximation.

3) Conclusion

Je dois d'abord dire l'intérêt que j'ai pris à la lecture de cet ensemble de travaux que je n'avais pas eu l'occasion de regarder auparavant (y compris ceux qui constituent spécifiquement la thèse de Frénod).

Le domaine de recherche exploré est centrée sur l'étude de divers type de solutions oscillantes des équations cinétiques : équation de Vlasov avec un potentiel oscillant (thèse) ou un champ électromagnétique fort (travaux en commun avec Sonnendrücker), déclinant plusieurs modèles d'approximations gyrocinétiques. L'ensemble me parait asseez complet même si la plupart des problèmes sont linéaires.

Le domaine de recherche est intéresssant. C'est une étape pour l'étude de l'interaction laser-plasma et les travaux de Frénod constituent, à mon avis, une base solide pour tout ce qui concerne la dynamique des particules. .

La méthode d'analyse utilise des fonctions test oscillantes dans une formulation faible. C'est la méthode habituellement utilisée par les spécialistes de l'homogénéisation qui a fait ses preuves.

Il me semble que la méthode des développements asymptotiques s'appliquerait aussi avec efficacité à tous ces problèmes, présentant de plus une relation naturelle avec les méthodes particulaires. Le papier avec Raviart illustre bien cet aspect.

Mon avis est que la qualité scientifique du dossier de Frénod correspond tout à fait au niveau d'une bonne habilitation à diriger des recherches.

De plus le dossier de Frénod montre son importante implication dans la mise sur pied des enseignements de mathématiques appliquées à l'université de Bretagne-Sud.

Je suis donc tout à fait favorable à la candidature de Frénod à l'habilitation à diriger des recherches et je suis convaincu que Frénod fera un très bon candidat à un poste de professeur.

Fait à Bordeaux, le 11 Novembre 1999

Jean-Luc Joly

école normale supérieure de Cachan
ENS BRETAGNE

Rapport sur les travaux présentés par
Emmanuel Frénod
en vue de l'obtention du
diplôme d'habilitation à diriger des recherches
à l'Université de Bretagne-Sud
sur le thème
Homogénéisation et simulation d'équations cinétiques

Les travaux présentés par Monsieur Emmanuel Frénod relèvent de l'étude mathématique et numérique des modèles cinétiques et sont classés selon deux axes:
- l'analyse des oscillations dans les équations cinétiques (1ère et 2ème parties ci-dessous)
- les méthodes numériques pour l'équation de Fokker-Planck en géométrie axisymétrique.

Ces travaux sont d'abord resitués dans le cadre général de la modélisation cinétique dans l'introduction du document de présentation. Il est rappelé comment, dans le cadre de la mécanique newtonienne, l'équation de Vlasov décrit, en termes d'une fonction de densité $f(t, x, v)$, l'évolution d'un nuage de particules de vitesse v au point x et à l'instant t lorsqu'il n'y a pas de collision entre les particules; elle s'écrit

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_x f + \frac{1}{m} \mathbf{F}(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) \cdot \nabla_v f = 0, \tag{1}$$

où $\mathbf{F}$ est le champ de forces appliquées et m la masse d'une particule. Lorsque le nuage de particules est chargé et satisfait aux équations de Maxwell, le couplage donne lieu aux équations de Vlasov-Maxwell qui se simplifient en les équations de Vlasov-Poisson lorsque le champ magnétique créé est négligé. Pour des particules non chargées mais soumises à des interactions de courte portée (collisions), le terme en $\mathbf{F}$ disparaît ci-dessus, mais un terme source non local et quadratique en f apparaît: c'est l'équation de Boltzmann qui se simplifie elle-même en l'équation de Fokker-Planck pour des plasmas en confinement inertiel.

La première partie a fait l'objet d'une thèse d'université sous la direction de K. Hamdache et a conduit à une publication. Elle concerne l'équation de Vlasov où le champ de forces est oscillant et fort et de la forme $\mathbf{F} = E^\epsilon$ avec

$$E^\epsilon = -\frac{1}{\epsilon} \nabla_y u(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\epsilon}) - \nabla_x u(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\epsilon}) + B(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\epsilon}, \mathbf{v}),$$

où u est un potentiel périodique en $\frac{x}{\epsilon}$, B un champ de forces extérieures borné et ϵ un petit paramètre. Il s'agit d'étudier le comportement du système quand ϵ

antenne de Bretagne
campus de Ker Lann
35170 BRUZ
France
02 99 05 93 00
02 99 05 93 29
61 av. du Pt Wilson
94235 CACHAN cedex
France
01 47 40 20 00
01 47 40 20 74

école normale supérieure de Cachan
ENS BRETAGNE

tend vers zéro. Nous ne nous attarderons pas sur cette partie qui a déjà donné lieu à des rapports. Notons seulement qu'on y trouve la démarche de base du chapitre suivant à savoir: l'utilisation intensive du principe de *convergence à deux échelles* introduit par N'Guetseng et Allaire et un processus en trois étapes pour décrire complètement le problème homogénéisé avec
- l'obtention d'une première équation sur le profil limite
- la déduction d'une deuxième équation fermant l'information sur ce profil
- l'intégration du système sous des hypothèses simplificatrices.

La deuxième partie (*Approximation gyrocinétique*), réalisée en collaboration avec E. Sonnendrücker, concerne l'équation de Vlasov avec champ de forces de Lorentz où le champ magnétique est intense (cas du confinement magnétique au sein de tokamaks) : des oscillations de très petite période sont générées, d'où un problème d'homogénéisation. Cette partie très consistante a fait l'objet de deux publications, d'une note soumise, d'un article plus détaillé à paraître ainsi que d'un article tout récemment achevé en collaboration avec P.A. Raviart et E. Sonnendrücker.

Après un adimensionnement de l'équation de Vlasov pour mettre en évidence les petits paramètres significatifs, plusieurs jeux des ces petits paramètres sont examinés correspondants à des phénomènes réels intéressants:
- comportement global du plasma avec rayon de Larmor petit devant la taille caractéristique du dispositif avec, ou bien la force électrique petite devant la force magnétique, ou bien les deux forces comparables,
- étude locale au bord des tokamaks: on choisit des longueurs caractéristiques distinctes dans la direction du champ magnétique fort et dans la direction orthogonale (approximation "rayon de Larmor fini").

Toutes ces approches reposent sur un principe de convergence à deux échelles, suivi de trois étapes comme plus haut pour en décrire l'homogénéisation.

La réflexion se poursuit par un effort d'abstraction pour englober ces résultats de convergence très similaires bien qu'obtenus dans des situations distinctes et pour expliquer certains "miracles" des calculs. Elle aboutit à un très joli théorème abstrait résumant bien la situation. Ce cadre abstrait est ensuite étendu pour recouvrir aussi l'approximation locale "rayon de Larmor fini".

On passe ensuite au comportement global d'un plasma sur des temps longs (du même ordre de grandeur que le champ magnétique fort). L'approximation "centre guide" obtenue permet de retrouver un principe bien connu des physiciens sur la dérive à vitesse uniforme des particules.

Ce chapitre se termine par une analyse menée à l'aide de l'outil mathématique différent des *développements asymptotiques*. Cette approche s'avère aussi très efficace et est comparée aux techniques à deux échelles choisies plus haut. La confrontation des ces deux techniques sur les problèmes de perturbations singulières hautement non triviaux examinés ici est tout à fait intéressante.

antenne de Bretagne
campus de Ker Lann
35170 BRUZ
France
☎ 02 99 05 93 00
Fax 02 99 05 93 29
antenne@bretagne.ens-cachan.fr

61 av. du Pt Wilson
94235 CACHAN cedex
France
01 47 40 20 00 ☎
01 47 40 20 74 Fax
Cachan

La troisième partie concerne la discrétisation de l'opérateur de Fokker-Planck en géométrie axisymétrique. Elle a donné lieu à une publication avec B. Lucquin-Desreux, à un logiciel de simulation de plasmas multi-espèce dans le cadre d'une collaboration avec le CEA (*fpmultesp*) et à un rapport d'étude remis au CEA. La contribution peut être décomposée en trois temps:
1) Construction d'opérateurs discrets de Fokker-Planck, en géométrie cylindrique pour la vitesse, avec préservation des propriétés physiques essentielles du modèle continu: conservation de la masse, de la quantité de mouvement, de l'énergie cinétique et décroissance de l'entropie. Une difficulté est cependant mise en évidence par l'analyse: l'apparition de nouveaux invariants collisionnels dus à la discrétisation et perturbant les simulations numériques.
2) Dans le même article commun avec B. Lucquin-Desreux, en prenant en compte l'analyse préalable ci-dessus, un schéma d'approximation est proposé et implémenté pour un plasma confiné *mono-espèce*. Deux jeux de tests sont effectués et validés par comparaison avec l'existant: des améliorations sensibles sont obtenues sur le long terme.
3) Ces idées sont étendues pour la réalisation d'un logiciel *multi-espèces* dans le cadre d'un contrat entre l'ENS Cachan et le CEA/DAM, puis intégrées dans un couplage avec des codes de déplacement des particules par une technique de splitting (cf. 2ème rapport CEA).

En conclusion, le travail présenté par Emmanuel Frénod est un excellent exemple de ce qui peut se faire dans l'étude de modèles mathématiques pour la physique, avec ici une concentration sur les problèmes à petits paramètres produisant des phénomènes d'homogénéisation. Le nombre de publications acceptées n'est pas encore très important, mais elles sont originales et de qualité et résolvent des problèmes difficiles. A titre personnel, j'ai, en particulier, apprécié l'effort d'abstraction qui a été fait pour formuler et rassembler dans un cadre général des idées qui avaient prouvé leur efficacité dans plusieurs modèles différents. Je veux aussi souligner, car ce n'est pas toujours le cas dans ce type de recherche, la composante *analyse numérique* (introduction et analyse de schémas numériques de résolution d'équations issues de la physique) ainsi que la composante *implémentation numérique* avec la simulation effective des modèles introduits et le développement de codes numériques dans le cadre de contrats industriels. Mentionnons aussi les deux nouveaux articles récemment achevés et la perspective de deux prochaines publications très significatives sur le sujet. Pour ces toutes ces raisons, je donne un avis favorable pour la soutenance par Emmanuel Frenod d'une habilitation à diriger les recherches à l'Université de Bretagne-Sud.

Fait à Bruz, le 24 novembre 1999
par Michel PIERRE,
Professeur, ENS de Cachan

antenne de Bretagne
campus de Ker Lann
35170 BRUZ
France
02 99 05 93 00
02 99 05 93 29

61 av. du Pt Wilson
94235 CACHAN cedex
France
01 47 40 20 00
01 47 40 20 74
Cachan

Rapports relatifs au Doctorat de Emmanuel Frénod

UNIVERSITE 13 PARIS NORD

PROCES - VERBAL DE SOUTENANCE

DOCTORAT DE L'UNIVERSITE PARIS XIII
(arrêté du 5 Juillet 1984, modifié par
l'arrêté du 23 Novembre 1988 **et l'arrêté du 30 Mars 1992)**

Spécialité Mathématiques

Le **16 décembre 1994**, les membres du jury étant réunis sous la présidence de Claude Bardos,

Monsieur Emmanuel FRENOD né le 27 octobre 1968 à LAGNY (77),

a présenté une thèse de Doctorat intitulée :

HOMOGÉNÉISATION D'ÉQUATIONS CINÉTIQUES AVEC POTENTIELS OSCILLANTS.

Les membres du jury soussignés, ayant délibéré, ont déclaré Monsieur Emmanuel FRENOD, digne du titre de Docteur de l'Université Paris XIII en Mathématiques.

et lui ont attribué la mention : Très honorable et les félicitations du Jury.

ONT SIGNE :

Nom, Prénom, fonction ou qualité et lieu d'exercice de chaque membre du jury — Signatures

- BARDOS Claude, Professeur, Université PARIS VII
- BASDEVANT Claude, Professeur, Université PARIS XIII - Institut Galilée
- GERARD Patrick, Professeur, Université PARIS SUD - ORSAY
- HAMDACHE Kamel, Directeur de Recherche CNRS, Université de BORDEAUX I
- HELEIN Frédéric, Professeur, E.N.S. CACHAN
- GUILLOT Jean-Claude, Professeur, Université PARIS XIII - Institut Galilée
- PERTHAME Benoît, Professeur, Université PARIS VI

PARIS NORD

BUREAU DE LA RECHERCHE
ET DES ETUDES DOCTORALES

Villetaneuse, le 16 décembre 1994

RAPPORT DE SOUTENANCE DE THESE

(DOCTORAT : UNIVERSITE)

SPECIALITE : Mathématiques

NOM et PRENOM du CANDIDAT : FRENOD Emmanuel

NOM DU PRESIDENT du JURY : Claude Bardos

NOM DU RAPPORTEUR : Claude Bardos.

SIGNATURES . des Membres du Jury :

- BARDOS Claude, Professeur, Université PARIS VII
- BASDEVANT Claude, Professeur, Université PARIS XIII - Institut Galilée
- GERARD Patrick, Professeur, Université PARIS SUD - ORSAY
- HAMDACHE Kamel, Directeur de Recherche CNRS, Université de BORDEAUX I
- HELEIN Frédéric, Professeur, E.N.S. CACHAN
- GUILLOT Jean-Claude, Professeur, Université PARIS XIII - Institut Galilée JC Guillot
- PERTHAME Benoît, Professeur, Université PARIS VI

RAPPORT sur la SOUTENANCE :

(Cette feuille constitue <u>la première page</u> du rapport de soutenance ; ce dernier sera libellé au verso de ce document et si nécessaire, des pages complémentaires peuvent être annexées).

AV. J.-B. - CLÉMENT - 93430 VILLETANEUSE

RAPPORT sur la SOUTENANCE :

Monsieur Frenod a fait une remarquable présentation de ses travaux.

Cela a permis au jury d'apprecier la rigueur de son travail et la hauteur de vue qu'il avait acquis sur des problèmes difficiles dont les solutions sont importantes pour tout progrès dans le domaine.

En conséquence, le jury a décider de lui décerner le titre de Docteur de l'Université de paris Nord avec la mention très honorable et les félicitations du jury.

24 NOV. 1994

Rapport sur la Thèse d'Emmanuel Frenod .
rédigé par Claude Bardos.

Le travail d'Emmanuel Frenod est une étude à peu près exhaustive des comportements asymptotiques des solutions de problèmes du type suivant:

$$\partial_t f^\epsilon + \xi \cdot \nabla_x f^\epsilon - \frac{1}{\epsilon}\nabla_y u(\frac{x}{\epsilon}).\nabla_\xi f^\epsilon = 0 \tag{1}$$

où $u(y)$ représente une fonction périodique. $u(\frac{x}{\epsilon})$ introduit donc dans le problème des oscillations à haute fréquence et le but du programme est d'obtenir un comportement asymptotique de ces solutions pour ϵ tendant vers zéro.

Ce problème est au coeur d'une série de questions de physique et de technologie. L'auteur explique remarquablement bien les motivations de sa recherche.

Il a en vue l'utilisation des méthodes d'homogéneisation modernes et plus précisément l'introduction selon N'Guetseng d'un profil limite caractérisé par la relation:

$$\int_{\Omega\times]0,T[} f^\epsilon(t,x,\xi)\phi(t,x,\frac{x}{\epsilon},\xi)dxdt \to \int_{T^n} dy \int_{\Omega\times]0,T[} F^\epsilon(t,x,y,\xi)\phi(t,x,y,\xi)dxdt \tag{2}$$

Il observe que la limite est décrite par un système d'équation d'évolution bien posé, mais faisant intervenir des termes à mémoire et des coefficients dont la determination explicite n'est pas toujours possible.

Un examen rapide lui montre que la cinématique sera décrite par la structure du champ hamiltonien

$$\dot y(t) = \xi(t), \quad \dot\xi(t) = -\nabla_y u(y(t)) \tag{3}$$

et que le comportement limite des solutions de (1) dépendra de manière cardinale de la structure golbale des solutions de (3).

Ainsi pour obtenir des solutions explicites il commence par traiter complètement le cas monodimensionnel en distinguant bien la différence entre les énergie conduisant à des particules captives et celles conduisant à des particules qui traversent tout le milieux.

Il en déduit pour des données initiales à vitesse finie, une équation de transport à mémoire pour la densité de masse.

Dans les chapitres 3 et 4 il étend l'analyse précédente soit en perturbant par des potentiel constant ou par une force oscillante, ce qui conduit à l'équation:

$$\partial_t f^\epsilon + \xi\partial_x f^\epsilon - (\partial_x u(x,\frac{x}{\epsilon}) + \frac{1}{\epsilon}(\partial_y u(x,\frac{x}{\epsilon}) - B(x,\frac{x}{\epsilon},\xi)).\nabla_\xi f^\epsilon = 0 \tag{4}$$

soit enfin en considérant des potentiels radiaux.

Une autre extension de cette analyse au cas pluridimensionnel peut être obtenue pour des potentiels de la forme:

$$u(y) = \sum_{i=1}^{n} u(y_i) \tag{5}$$

et ceci est fait au chapitre 7.

Le dernier chapitre (chapitre 8) est consacré au cas général.

Une caractérisation bien moins explicite que dans les chapitres précédents, mais absolument complète est alors obtenue en faisant intervenir la transformation de Radon de la limite pour se ramener au cas monodimensinnel.

L'ensemble est remarquablement bien rédigé, contient beaucoup d'éléments nouveaux, présentant des applications à de vrais problèmes physiques, et constitue donc une excellente thèse.

INSTITUT DE RECHERCHE MATHÉMATIQUE DE RENNES
Unité associée au C.N.R.S. 305
UNIVERSTÉ de RENNES I
Campus de Beaulieu, 35042 RENNES CEDEX (France)

Guy Métivier

Tel : 99 28 60 10
Fax : 99 28 67 90
email : metivier@univ-rennes1.fr

24 NOV. 1994
2498

Rennes, le 17 novembre 1994,

Rapport sur la thèse de Monsieur Emmanuel FRENOD.

La thèse de Monsieur Frenod porte sur l'homogenéïsation d'équations de la forme

$$\partial_t f^\varepsilon + \xi \cdot \partial_x f^\varepsilon - \partial_x u^\varepsilon \cdot \partial_\xi f^\varepsilon = 0 \tag{E}$$

lorsque le potentiel u^ε est rapidement oscillant. Le problème est d'étudier la limite faible f de la suite f^ε (ou de sous suites). La difficulté mathématique est de passer à la limite faible dans le produit $\partial_x u^\varepsilon \cdot \partial_\xi f^\varepsilon$, c'est-à-dire de comprendre les phénomènes d'interaction entre les oscillations de u^ε et celles de f^ε. On peut résoudre explicitement l'équation, en résolvant le système des caractéristiques

$$\frac{dx}{dt} = \xi \quad , \quad \frac{d\xi}{dt} = -\partial_x u^\varepsilon(x) \tag{H}$$

La difficulté est alors d'étudier le comportement asymptotique en ε de ce flot.

Les motivations physiques sont très claires. L'équation (E) est un prototype de modélisation de propagation de particules soumises à un potentiel rapidement variable, à l'échelle microscopique ε, et dont on veut décrire le comportement macroscopique.

La thèse présente l'étude détaillée d'un certain nombre de cas où l'étude est menée à son terme. En fait, la clé est donnée au chapitre 8, où est faite l'étude générale du problème. Le potentiel $u^\varepsilon(x)$ étant périodique de la forme $u(x/\varepsilon)$, Frenod introduit comme N'Guentseng, W.E, D.Serre, G.Allaire et d'autres, le profil d'oscillation $F(t, x, \xi, y)$ associé à une sous-suite f^ε. La limite faible f se déduit de F par integration dans les variables périodiques y. Sous des hypothèses générales, F est caractérisé comme solution d'un système de deux equations : d'abord, une équation de contrainte

$$\xi \cdot \partial_y F - \partial_y u(y) \cdot \partial_\xi F = 0,$$

et ensuite une équation de propagation

$$\partial_t F + \xi^\sharp(y, \xi) \cdot \partial_x F = 0.$$

Il n'est pas facile en général, d'en déduire une "équation" pour la limite faible f. Cela est cependant possible pour des données initiales particulières, conduisant à des profils découplés de la forme $F = f_1(x - t\xi^\sharp)\, a(y, \xi)$. Frenod obtient alors un système d'équations avec retard.

Les chapitres 2 à 7 détaillent ces principes généraux, dans des cas particuliers où le système hamiltonien des caractéristiques de l'équation de contrainte est intégrable. On peut alors décrire toutes les solutions de ce système. En particulier, le profil F est de la forme $h(t, x, \mathcal{E}(y, \xi))$ et la fonction $\xi^{\sharp}$ qui est la projection de la fonction ξ sur le noyau de l'opérateur de contrainte, s'explicite complètement. L'equation de propagation pour F se traduit en une équation de transport pour h.

Le chapitre 2 traite du cas de la dimension un (pour les variables x et ξ). Le chapitre 3 envisage des potentiels de la forme $u^{\epsilon}(x) = u(x, x/\varepsilon)$ en permettant aussi l'ajoût d'un terme de force de la forme $B(x, x/\varepsilon, \xi)\,\partial_x f^{\epsilon}$. Le chapitre 4, qui sort du cadre périodique décrit ci-dessus, traite d'un potentiel radial $u^{\epsilon}(x) = a(|x|/\varepsilon)$. Le chapitre 5 est une simple introduction au problème en dimension quelconque. Les potentiels sont de la forme $u^{\epsilon}(x) = u_1(x_1/\varepsilon)$ au chapitre 6 et $u^{\epsilon}(x) = u_1(x_1/\varepsilon) + \cdots u_n(x_n/\varepsilon)$ au chapitre 7.

S'il y a un certain nombre de redites d'un chapitre à l'autre, les cas étudiés sont significativement différents, dans leurs formulations et dans le détails des résultats. Il ne s'agit évidemment pas de la répétition d'un théorème général dans des cas particuliers. Au contraire, les analyses des chapitres 2 à 7, vont beaucoup plus loin qu'on ne peut le faire dans le cas général, en tenant compte des spécificités. Par ailleurs, si la méthode est finalement assez claire, sa mise en oeuvre souleve des difficultés techniques absolument non triviales. Par exemple, la détermination de toutes les solutions *faibles* et *globales*, de l'équation de contraintes ne peut se faire qu'avec des hypothèses adaptées sur le potentiel u. Autre exemple, l'écriture des équations pour h se fait en régionant l'espace des (t, x, E), et les conditions de raccord demandent une analyse fine.

Conclusion.

La thèse de Monsieur Frenod représente un volume important de travail. Sur un sujet d'actualité, il a su apporter des résultats nouveaux. Son étude des différents problèmes est très détaillée et quasi définitive. Les techniques modernes d'homogénéisation qu'il utilise sont fines. Je pense qu'il s'agit indiscutablement d'une bonne thèse, et je donne un avis très favorable à sa soutenance.

Guy Métivier.