Sur une expérimentation d'enseignement où apprentissages et évaluations sont concomitants

Emmanuel Frénod[*] Thierry Morineau [†] Etienne Sirot [‡]

30 septembre 2010

Résumé - Nous rendons compte d'une expérimentation pédagogique menée avec une promotion d'étudiants de première année de Licence de Sciences et Sciences de l'Ingénieur se destinant aux Sciences de la Vie et de la Terre.

Les objectifs de cette expérimentation étaient de rendre concomitantes, pour les étudiants, les acquisitions de connaissance et les évaluations et d'éviter les lacunes dans l'enchaînement de leurs connaissances.

Après avoir présentées les motivations ayant suscitées cette expérimentation, le protocole de l'expérimentation puis sa mise en œuvre sont décrits. Les résultats de cette expérimentation sont enfin analysés via une comparaison avec les résultats de la promotion de l'année précédente.

1 Introduction

La raison pour laquelle nous avons effectué cette expérimentation est liée à notre expérience d'enseignant. Plus particulièrement, elle est liée au sentiment désagréable, ressenti lors de corrections de copies, d'avoir expliqué aux étudiants des concepts d'un niveau bien supérieur à ce qu'ils étaient en état de comprendre et, en conséquence, à ce qu'ils avaient compris.

Un autre sentiment désagréable, lié au précédent, est l'impression d'avoir donné des Unités d'Enseignement à des étudiants qui n'avaient pas assimilé des notions essentielles de manière solide, non pas parce qu'ils n'avaient pas fourni d'efforts, mais parce que l'enseignement qu'ils avaient reçu avait été en inadéquation avec ce qu'ils étaient en état d'intégrer.

De plus, lors de nos interactions avec les étudiants nous avions souvent l'impression qu'ils avaient beaucoup de difficultés à effectuer seuls des exercices très simples alors qu'ils étaient capables d'écouter des cours contenant des concepts complexes.

Selon nous, l'explication des défauts que nous venons de pointer se trouve dans le fait que le mode de couplage entre enseignement et évaluation que nous utilisions ne correspond pas au rapport que les générations actuelles d'étudiants entretiennent avec la connaissance.

En schématisant à l'extrême, dans le système d'enseignement-évaluation que nous pratiquions précédemment, nous demandions aux étudiants de travailler, d'acquérir des connaissances et des compétences durant une longue période, sans évaluation. Pour réussir, les étudiants devaient s'auto-évaluer et adapter leur effort de travail de manière permanente. À la fin de cette longue période, les étudiants subissaient une évaluation, sanctionnant l'obtention ou non de leur Unité d'Enseignement.

Or, l'acquisition de la maîtrise des technologies numériques est basée sur un mécanisme d'essais-erreurs systématique que nous décrivons maintenant. Lors d'un essai d'une nouvelle fonctionnalité ou d'un nouvel objet numérique une évaluation immédiate est effectuée de manière naturelle : si la

[*]Université Européenne de Bretagne, Lab-STICC (UMR CNRS 3192), Université de Bretagne-Sud, Centre Yves Coppens, Campus de Tohannic, F-56017, Vannes. emmanuel.frenod@univ-ubs.fr

[†]Université Européenne de Bretagne

[‡]Université Européenne de Bretagne

fonctionnalité ou l'objet numérique n'est pas utilisé de manière absolument canonique, cela aboutit à un échec. Cette évaluation n'est pas une évaluation-sanction mais invite à recommencer en cas d'échec, et ce jusqu'à la maîtrise de la fonctionnalité ou de l'objet numérique.

Le développement des technologies numériques dans la vie quotidienne, et en particulier celui des jeux vidéo, a placé les étudiants actuels dans ce mécanisme. Nous pensons alors qu'il a influencé fortement les apprentissages de toutes formes de connaissance, et en particulier ceux de la connaissance scolaire et académique.

Ainsi les étudiants qui sont aujourd'hui dans le système de l'enseignement supérieur sont, en moyenne, moins capables de s'auto-évaluer seul que ne l'étaient les étudiants des générations précédentes. De plus, l'évaluation-sanction n'est pas adaptée à leur rapport à l'acquisition de la connaissance.

La vocation de ce travail était de commencer à explorer des voies pour adapter le mode d'enseignement-évaluation au rapport actuel que les étudiants entretiennent avec la connaissance.

2 Objectifs et choix

Les éléments essentiels que nous souhaitions incorporer au mode d'enseignement-évaluation étaient les suivants.

En premier lieu, ce mode devait permettre aux étudiants d'avoir une vision claire des exigences requises pour acquérir l'Unité d'Enseignement, et au delà, pour obtenir telle ou telle note. Ensuite, il devait se baser, non pas sur une évaluation-sanction mais sur des évaluations fréquentes permettant aux étudiants de progresser via un processus d'essais-erreurs et de suivre l'évolution de leurs progrès. Enfin, il nous paraissait important que ce mode amène les étudiants à savoir faire, seuls, des choses simples et sans faute.

Nous avons donc construit notre enseignement et les évaluations sur les principes suivants.

Nous avons défini 5 chapitres et pour chaque chapitre deux niveaux. Le niveau "connaissances de base", définissait le minimum qu'un étudiant devait savoir faire seul, sans aucune faute. Le niveau "connaissances avancées", correspondait à des concepts, méthodes ou calculs plus élaborés qui devaient être réalisés également sans faute.

Un niveau "connaissances avancées" supplémentaire (CA - 6) correspondant à la capacité à résoudre un problème en utilisant des connaissances et compétences de plusieurs chapitres a également été défini.

Les contrôles pour acquérir le niveau "connaissances de base" d'un chapitre étaient constitués d'exercices très simples et en petit nombre. L'objectif pour les étudiants était alors de réaliser ces exercices sans aucune faute, et ce, sans pression temporelle. Si un étudiant réussissait le contrôle de niveau, il capitalisait 2 points. S'il échouait, il devait le repasser jusqu'à ce qu'il réussisse. Un étudiant ne pouvait se présenter pour le contrôle des "connaissances de base" d'un chapitre donné que s'il avait obtenu le niveau "connaissances de base" du chapitre précédent.

La règle concernant les contrôles des "connaissances avancées" étaient la suivante. Un étudiant ne pouvait se présenter pour le contrôle des "connaissances avancées" d'un chapitre donné que s'il avait obtenu le niveau "connaissances de base" de ce même chapitre ou bien s'il avait obtenu les niveaux "connaissances de base" et "connaissances avancées" du chapitre précédent. Lorsque qu'un contrôle des "connaissances avancées" était réalisé parfaitement par un étudiant, celui-ci obtenait ce niveau avec 2 points. Si le contrôle était réalisé presque parfaitement, l'étudiant obtenait le niveau avec 1 seul point. La capitalisation effective de ces points ne pouvait se faire qu'une fois validés les niveaux "connaissances de base" de tous les chapitres.

L'enseignement était constitué d'un cours magistral classique en amphi où les concepts et les méthodes étaient expliquées et d'un cours où des exercices représentatifs des ce que leur serait demandé lors des contrôles étaient corrigés. Des "feuilles d'exercices d'entraînement" (voir annexe B) étaient également distribuées aux étudiants pour qu'ils travaillent de manière autonome. Elles proposaient des "exercices de base" et des "exercices avancés" sur chaque chapitre. Les cours où les exercices étaient traités étaient l'occasion de répondre aux questions des étudiants sur les exercices des "feuilles d'exercices d'entraînement" et éventuellement de corriger certains d'entre eux.

Au tout début de la période d'enseignement un document détaillé (voir annexe A) expliquant les objectifs du mode fonctionnement, le déroulement des enseignements et des évaluations ainsi que le système d'évaluation et de notation a été distribué aux étudiants.

3 Définition des chapitres et niveaux

La définition des niveaux nous a amené à nous interroger de façon précise sur ce que nous devions exiger qu'un étudiant de première année de sciences se destinant à des études de Biologie ou en Sciences de la Terre sache faire sans faute.

Le programme de l'Unité d'Enseignement concernée était le suivant :

- Droites du plan et programmation linéaire (Points, vecteurs, colinéarité, determinant, orthogonalité, produit scalaire, équations de droite, résolution de problème de choix de stratégie en écologie par programmation linéaire)
- Suites (Définition de la notion de limite, opérations sur les limites, utilisation d'inégalités, suites définies par récurrence, exemple de modèle d'évolution d'effectif)
- Fonction (Défininitions : fonctions, croissance, décroissance, monotonie, continuité, limite ; propriétés des fonctions continues, fonctions équivalentes ; définition de la dérivée, calcul de dérivée, fonction dérivée ; fonctions usuelles ; bijection, fonctions arcsin, arccos et arctan ; études de fonctions ; formule de Taylor, développements limités, caractérisation des extrema)
- Intégration (Idée de l'intégrale de Riemann, primitives, calcul d'intégrales, intégration par parties, changement de variable)
- Equations différentielles ordinaires (Edo linéaires du premier ordre, edo linéaires du second ordre à coefficients constants, variation de la constante pour les edo du premier ordre)

Nous avons alors défini les chapitres et les connaissances et compétences à acquérir pour obtenir les divers niveaux.

Chapitre 1 : Droite du plan

Niveau connaissances de base 1 - Savoir placer dans le plan des points et des vecteurs. Savoir trouver une équation de droite (cartésienne et paramétrée) passant par deux points, passant par un point et avec un vecteur directeur donné ou passant par un point et orthogonal à un vecteur. Savoir tracer une droite connaissant son équation. Savoir faire un exercice de programmation linéaire simple et sans piège.

Niveau connaissances avancées 1 - Savoir résoudre un problème de choix de stratégie en écologie par programmation linéaire

Chapitre 2 : Suites

Niveau connaissances de base 2 - Savoir faire des calculs simples sur les suites. Savoir faire un raisonnement par récurrence élémentaire. Savoir calculer des limites simples.

Niveau connaissances avancées 2 - Savoir manipuler les suites. Savoir faire des raisonnements imbriquant récurrence et croissance comparée. Connaître le statut du point fixe d'une fonction g pour une suite définie via une formule de récurrence du type "$u_{n+1} = g(u_n)$".

Chapitre 3 : Fonctions

Niveau connaissances de base 3 - Savoir établir le domaine de définition d'une fonction. Savoir Calculer des limites simples. Savoir Calculer des dérivées de fonctions simples. Savoir faire l'étude d'une fonction simple.

Niveau connaissances avancées 3 - Savoir calculer des limites. Savoir calculer des dérivées. Savoir étudier une fonction. Avoir compris la notion de bijection, connaître le rapport entre stricte monotonie et bijection, savoir identifier la bijection réciproque d'une fonction simple.

Chapitre 4 : Intégration et compléments sur les fonctions

Niveau connaissances de base 4 - Savoir calculer des intégrales simples. Savoir manipuler l'intégration par parties et les changements de variables sur des exemples simples. Savoir calculer des limites avec des fonction équivalentes.

Niveau connaissances avancées 4 - Savoir calculer des intégrales complexes en étant guidé. Savoir calculer des limites avec des développements limités. Avoir bien compris les notions de continuité et de dérivation. Savoir calculer des limites avec des développements limités. Savoir caractériser des extrema avec la dérivée seconde.

Chapitre 5 : Edo

Niveau connaissances de base 5 - Savoir résoudre des edo simples du premier et du second ordre.

Niveau connaissances avancées 5 - Savoir résoudre des edo du premier et du second ordre. Savoir utiliser la variation de la constante.

Hors chapitre

Niveau connaissances avancées 6 - Résolution de problèmes.

4 Mise en place

L'Unité d'Enseignement concernée était au premier semestre de la première année. L'expérimentation a été menée au cours du premier semestre de l'année universitaire 2009/2010.

La séquence décrite dans le document distribué aux étudiants en début de la période d'enseignement et donné en annexe A a été suivie, à quelques nuances près dues à des questions d'organisation. Les étudiants ont donc suivi 22 séances de 2 heures cours magistral classique et 22 séances de 2 heures de cours où des exercices représentatifs des ce que leur serait demandé lors des contrôles étaient corrigés.

Ils ont pu se présenter à 11 séances d'évaluation de 2 heures pendant lesquelles ils composaient sur les contrôles. Généralement chaque étudiant composait sur un contrôle des "connaissances de base" et un contrôle des "connaissances avancées", de manière conforme à son avancée dans les divers niveaux des divers chapitres et aux règles définissant ses droits.

À la fin de la période d'enseignement 3 séances d'évaluation de 1 heure, où était offerte aux étudiants la possibilité de composer sur des contrôles de "connaissances de base", ont été proposées.

La note de première session a été attribuée de la manière suivante. Chaque étudiant avait, à la fin de la période d'enseignement acquis 11 notes : NB1 (qui pouvait valoir 0 ou 2 associée au contrôle des "connaissances de base" CB - 1), NB2, ..., NB5 ; NA1 (qui pouvait valoir 0, 1 ou 2 associée au contrôle des "connaissances avancées" CA - 1), NA2, ..., NA5 et NA6.

La formule donnant la note finale était

$$(\mathrm{NB1} + \mathrm{NB2} + \mathrm{NB3} + \mathrm{NB4} + \mathrm{NB5}) + \max(((\mathrm{NB1} + \mathrm{NB2} + \mathrm{NB3} + \mathrm{NB4} + \mathrm{NB5}) - 9), 0) \times (\mathrm{NA1} + \mathrm{NA2} + \mathrm{NA3} + \mathrm{NA4} + \mathrm{NA5} + \mathrm{NA6}).$$

Cette formule permettait de prendre en compte que les points associés aux "contrôles des connaissances avancées" (CA - 1 à CA - 6) ne pouvaient être comptabilisés que si tous les "contrôles des connaissances de base" (CB - 1 à CB - 5) avaient été obtenus.

Lors du second semestre, les étudiants qui avaient besoin d'une note de seconde session ont conservé leur notes NB2, ..., NB5. De plus, 3 séances d'évaluation de 1 heure leur ont été proposées. Lors de ces séances des sujets de contrôle des "connaissances de base" étaient mis à disposition des étudiants. Celà leur permettait d'obtenir les niveaux "connaissances de base" qu'il n'avaient pas encore acquis.

La formule donnant la note de deuxième session était

$$(\mathrm{NB1} + \mathrm{NB2} + \mathrm{NB3} + \mathrm{NB4} + \mathrm{NB5}).$$

5 Évaluation de l'efficience de la méthode

Dans le but d'évaluer l'efficacité et l'efficience de la méthode nous avons comparé ses résultats au groupe de contrôle constitué des étudiants de l'année universitaire précédente (2008/2009) où l'enseignement et l'évaluation s'était faite sur un mode classique, avec la même équipe pédagogique.

En observant le sujet du contrôle continu du 12 novembre 2008 donné en annexe D, nous pouvons considérer qu'un étudiant qui avait fait sans faute l'exercice 1 avait acquis le niveau CB - 1, qu'un étudiant ayant fait presque parfaitement l'exercice 2 avait acquis le niveau CA - 1 et, enfin, qu'un étudiant ayant fait, sans faute l'exercice 3 avait acquis le niveau CA - 2. Nous avons donc recorrigé les copies de ce contrôle et nous avons obtenu que sur un effectif total de 42 copies,

- 23 (54,8 %) avait obtenu une note supérieure à 10/20,
- 18 (42,9 %) avaient été composées par des étudiants ayant acquis le niveau CB - 1,
- 17 (40,5 %) avaient été composées par des étudiants ayant acquis le niveau CA - 1,
- 9 (21,4 %) avaient été composées par des étudiants ayant acquis le niveau CB - 1 et CA - 1,
- 5 (11,9%) avaient été composées par des étudiants ayant acquis le niveau CA - 2,
- 15 (35,7 %) avaient été composées par des étudiants n'ayant acquis aucun des niveaux CB - 1, CB - 2 ou CA - 2,

de plus,

- parmi les 18 copies présentant le niveau CB - 1, 9 ne présentaient pas le niveau CA - 1,
- parmi les 17 copies présentant le niveau CA - 1, 8 ne présentaient pas le niveau CB - 1.
- parmi les 15 copies ne présentant aucun des niveaux CB - 1, CB - 2 ou CA - 2, 8 avaient une note supérieure ou égale à 8/20

Nous avons pu comparé ces résultats à ceux de l'expérimentation. Durant l'année universitaire 2009/2010 au cours de laquelle l'expérimentation a eu lieu, initialement 91 étudiants étaient inscrits. Sur ces 91, 6 ont abandonné aux cours des premières semaines. Nous prenons donc 85 comme effectif du groupe d'étudiants ayant participé à cette expérimentation. Sur ces 85 étudiants, le 17 novembre 2009,

- 80 (94,1 %) ont acquis le niveau CB - 1,
- 77 (90,6 %) ont acquis le niveau CA - 1,
- 76 (89,4 %) ont acquis le niveau CB - 1 et CA - 1,
- 46 (54,1 %) ont acquis le niveau CA - 2,
- 5 (5,8 %) n'ont acquis aucun niveau,

de plus,

- parmi les 80 étudiants ayant acquis le niveau CB - 1, 3 n'ont pas acquis le niveau CA - 1,
- les 77 étudiants ayant acquis le niveau CA - 1 ont également acquis le niveau CB - 1,

enfin, à cette même date,

- 22 étudiants (25,9 %) ont acquis le niveau CB - 3,

– 7 étudiants (8,2 %) ont acquis le niveau CA - 3.

De même, nous avons recorrigé les copies de l'examen terminal de décembre 2008, donné en annexe D, avec les critères suivants : un étudiant ayant fait parfaitement les questions 1 à 4 de l'exercice 1 était considéré comme ayant acquis le niveau CB - 3 et un étudiant ayant fait presque parfaitement 4 des questions 5 à 10 était considéré comme ayant acquis le niveau CA - 3. D'autre part, un étudiant ayant fait presque parfaitement les 2 questions préliminaires de l'exercice 2 était considéré comme ayant acquis le niveau CA - 4 ; un étudiant ayant fait parfaitement la question 1 de la partie "Résolution d'équation différentielle" de l'exercice 2 était considéré comme ayant acquis le niveau CB - 5 et un étudiant ayant fait correctement l'ensemble de cette partie, comme ayant acquis le niveau CA - 5. Enfin, un étudiant ayant fait presque parfaitement l'ensemble de l'exercice 2 aurait été considéré comme ayant acquis le niveau CA - 6. Sur un effectif total de 41 copies,
- 25 (60,1 %) avaient obtenu une note supérieur à 10,
- 31 (75,6 %) avaient été composées par des étudiants ayant acquis le niveau CB - 3,
- 29 (70,7 %) avaient été composées par des étudiants ayant acquis le niveau CA - 3,
- 3 (7,3%) avaient été composées par des étudiants ayant acquis le niveau CB - 3 et CB - 5,
- 11 (26,8 %) avaient été composées par des étudiants ayant acquis le niveau CA - 4,
- 1 (2,4 %) avaient été composée par un étudiant ayant acquis le niveau CA - 5,
- aucune copie n'avait été composée par un étudiant ayant acquis le niveau CA - 6,

de plus,
- aucune copie ne présentait un profil d'étudiant ayant acquis le niveau CB - 5 sans celui CB - 3,
- la copie présentant le niveau CA - 5 ne présentait pas le niveau CB - 5,
- parmi les 31 copies présentant un niveau CB - 3, 25 présentaient également un niveau CA - 3,
- 3 copies présentait un niveau CA - 3 sans présenter un niveau CB - 3,

enfin parmi les 4 copies ayant obtenues une note supérieure à 15 :
- 3 présentaient le profil suivant : CB - 3, CA - 3, CA - 4, (pas CB - 5 et pas CA - 5),
- 1 présentaient le profil suivant : CB - 3, CA - 3, (pas CA - 4), CB - 5 et CA - 5.

Ces résultats ont pu être comparés à ceux de l'expérimentation. Comme précédemment, nous prenons 85 comme effectif du groupe d'étudiants ayant participé à cette expérimentation. Sur ces 85 étudiants, à la fin de l'expérimentation,
- 59 (69,4 %) ont obtenu une note supérieur à 10/20,
- 69 (81,2 %) ont atteint les niveaux CB - 1, CB - 2 et CB - 3,
- 30 (35,3%) ont obtenu le niveau CA - 3,
- 59 (69,4 %) ont atteint les niveaux CB - 1, CB - 2, CB - 3, CB - 4 et CB - 5,
- 26 (30,6 %) ont obtenu le niveau CA - 4,
- 9 (10,6 %) ont obtenu le niveau CA - 5,
- aucun n'a obtenu le niveau CA - 6,

de plus,
- structurellement, aucun étudiant n'a pu obtenir le niveau CB - 5 sans avoir acquis les 4 CB précédents,
- tous les étudiants ayant acquis le niveau CA - 5 ont acquis également le niveau CB - 5,
- parmi les 69 étudiants ayant acquis le niveau CB - 3, 30 ont également acquis le niveau CA - 3,
- aucun étudiant n'a acquis le niveau CA - 3 sans le niveau CB - 3,

enfin,
- 7 étudiants ont obtenu CB - 1, CA - 1, CB - 2, CA - 2, CB - 3, CA - 3, CB - 4, CA - 4 CB - 5 et CA - 5.

Certains éléments comparables sont synthétisés dans les tableaux 1 et 2. La méthode expérimentée ici présente, sur ces éléments comparables, une plus grande efficacité. En particulier, un regard

	CB - 1	CA - 1	CB - 1 et CA - 1	CA - 2	Aucun
Méthode classique	42,9 %	40,5 %	21,4 %	11,9 %	35,7 %
Expérimentation	94,1 %	90,6 %	89,4 %	54,11%	5,8 %

TAB. 1 – Proportion d'étudiants ayant, à mi-parcours, atteint divers niveaux avec un mode d'enseignement-évaluation classique pratiqué lors de l'année universitaire 2008/2009 (ligne du haut) et avec le mode expérimenté ici (ligne du bas).

	≥ 10	CB - 3	CA - 3	CA - 4	CB - 5	CA - 5	CA - 6
Méthode classique	60,1 %	75,6 %	70,7 %	26,8 %	7,3%	2,4 %	0
Expérimentation	69,4 %	81,2 %	35,3 %	30,6 %	69,4 %	10,6 %	0

TAB. 2 – Proportion d'étudiants ayant, à la fin de la période d'enseignement, eu une note supérieure à 10 et ayant atteint divers niveaux avec un mode d'enseignement-évaluation classique pratiqué lors de l'année universitaire 2008/2009 (ligne du haut) et avec le mode expérimenté ici (ligne du bas).

sur la première colonne du tableau 2 montre un meilleur taux de réussite.

Au-delà de cette première constatation, il nous semble important de commenter le fait que, à mi-parcours, dans le mode d'enseignement-évaluation classique une proportion non négligeable d'étudiants n'avait atteint aucun des niveaux CB - 1, CA - 1 et CA - 2 (*c.f.* dernière colone du tableau 1).

La proportion d'étudiants n'ayant acquis aucun niveau à mi-parcours dans le mode expérimenté ici est très faible. Ceci, couplé au fait qu'une proportion très importante d'étudiants ont acquis CB - 1 et CA - 1 (*c.f.* troisième colone du tableau 1) et au fait que tous les étudiants ayant acquis CA - 1 ont également acquis CB - 1, tend à prouver que cette méthode à au moins deux vertus attendues : elle pousse les étudiants à travailler et elle limite une acquisition lacunaire des connaissances.

Ceci est renforcé par la lecture de deux première colonne du tableau 1 mais également par le fait déjà pointé que, dans le cadre de l'expérimentation, aucun étudiant n'a acquis le niveau CA - 3 sans le niveau CB - 3 et que tous les étudiants ayant acquis le niveau CA - 5 ont acquis également le niveau CB - 5.

La comparaison des proportions exhibées dans l'avant dernière colonne du tableau 1 montre de plus que les meilleurs étudiants ont pu progresser plus vite dans le cadre de la méthode expérimentée ici que dans un cadre classique. Cela aboutit à ce qu'une proportion notoirement plus importante ait atteint le niveau CA - 4 (*c.f.* avant dernière colone du tableau 2) à la fin de la période d'enseignement.

La méthode expérimentée ici montre une meilleure efficacité sur l'acquisition des connaissances de base. Ceci est attesté par les deuxième et cinquième colonne du tableau 2. Ceci est particulièrement vrai pour les connaissances de bases du dernier chapitre (concernant les équations différentielles). Cela illustre une autre vertu de la méthode, les étudiants ont été poussés à acquérir tous les niveaux de base, sinon ils n'auraient pas obtenu l'Unité d'Enseignement.

En ce qui concerne les niveaux "connaissances avancées", la situation est plus mitigée. À mi-parcours elle à permis à une proportion d'étudiants plus importante d'acquérir le niveau CA - 2 et en fin de période à une meilleure proportion d'acquérir CA - 5. En revanche la méthode classique avait été plus performante sur le niveau CA - 4. Une explication à cela (qui nous semble crédible) est que les étudiants ont du porter leur effort sur les edo pour obtenir le niveau CB - 5, et ce au détriment de l'approfondissement des connaissances avancées sur les fonctions.

Une autre explication à ce fait serait que, au moment où les contrôles des connaissances pour obtenir CA - 4 ont été proposés aux étudiants, certains d'entre eux avait déjà obtenu tous les niveaux de base. Ils ont pu alors relâcher leur effort. C'est peut-être ici une facette un peu perverse de la méthode.

Pour terminer sur ces éléments de comparaison, le niveau CA - 6 n'a été atteint par aucun étudiant. Il semble que ce soit la définition même de ce niveau de compétence qui manque de pertinence. À ce sujet, il serait sans doute intéressant de définir plusieurs niveaux hors chapitre concernant les résolution de problèmes et amenant les étudiants à développer leur capacité à intégrer des connaissances et compétences de plusieurs chapitres.

Au delà de cette comparaison il est intéressant de noter que la méthode expérimentée ici a amené l'équipe pédagogique mettre en place un suivi de la progression de chaque étudiant. Ainsi, il est possible de reconstituer, si cela est nécessaire, l'historique de l'acquisition des niveaux pour chaque étudiant.

Il est également possible de dire que, par exemple, le 16 décembre 2009, $95,3\%$ des étudiants ont atteint le niveau CB - 1, $83,6\%$ le niveau CB - 2, $74,1\%$ le niveau CB - 3, $43,5\%$ le niveau CB - 4, $8,2\%$ le niveau CB - 5, $91,8\%$ le niveau CA - 1, $70,6\%$ le niveau CA - 2, $35,3\%$ le niveau CA - 3, $21,2\%$ le niveau CA - 4 et 0% le niveau CA - 5.

De même, à la fin de la période d'enseignement, $96,5\%$ des étudiants ont atteint le niveau CB - 1, $84,7\%$ le niveau CB - 2, $81,2\%$ le niveau CB - 3, $74,1\%$ le niveau CB - 4, $69,4\%$ le niveau CB - 5, $92,9\%$ le niveau CA - 1, $70,6\%$ le niveau CA - 2, $35,3\%$ le niveau CA - 3, $30,6\%$ le niveau CA - 4 et $10,6\%$ le niveau CA - 5.

Cette information pourrait être transmise aux enseignants des Unités d'Enseignement des semestres suivants, sous la forme, par exemple de : "$96,5\%$ des étudiants savent placer des points et des vecteurs dans un plan, trouver l'équation d'une droite passant par 2 points et résoudre un problème de programmation linéaire simple", "$91,8\%$ des étudiants savent résoudre un problème de biologie par programmation linéaire", "$69,4\%$ des étudiants savent résoudre une edo linéaire du premier ordre simple" mais seulement : "$10,6\%$ d'entre eux savent utiliser la méthode de la variation de la constante", *etc.*

6 Évaluation subjective

Parmi les aspects non mesurables concernant l'efficacité de la méthode est le fait, clairement ressenti, que le mode d'évaluation a poussé les étudiants à travailler.

D'autre part, avoir effectué des contrôles fréquents nous a permis de suivre les étudiants individuellement. Cela ne s'est pas simplement traduit par l'existence d'un tableau donnant, tout au long de la période d'enseignement, la position de chaque étudiant dans son apprentissage. Cela a également permis la mise en place de véritables dialogues entre l'équipe et certains étudiants.

Cela a également amené une gestion de la dynamique du groupe. Par exemple, lors de la première occurrence du contrôle des "connaissances de base 2" (*c.f.* paragraphe C.3 des annexes, page 25) un grand nombre d'étudiants avait fait parfaitement l'exercice 2 concernant des calculs simples sur les suites, mais avaient montrer des faiblesses dans la maîtrise de la démonstration par récurrence, évaluée dans l'exercice 1. Nous n'avons alors attribué le niveau CB - 2 qu'à 8 étudiants. Lors de la deuxième occurrence nous n'avons évalué que les capacités à effectuer une démonstration par récurrence. Suite à cette deuxième occurrence, 19 étudiants supplémentaires ont acquis le niveau CB - 2.

Un autre exemple de la gestion de la dynamique du groupe est donnée par la suite des occurrences des "contrôles des connaissances avancées 2". Les sujets se ressemblent beaucoup ((*c.f.* paragraphe C.4 des annexes, page 27). Le message que nous voulions faire passer aux étudiants était : "entraînezvous à faire ce type de démonstration un peu longue, vous finirez par obtenir le niveau CA - 2." le message est sans doute assez bien passé, puisque $70,6\%$ des étudiants ont fini par obtenir ce niveau alors que seulement $54,1\%$ l'avait obtenu en novembre.

Ce mode de fonctionnement nous a par ailleurs amené à constater que quelques étudiants ont eu la capacité étonnante à produire, à plusieurs occurrences d'une même évaluation, le même raisonnement faux, sans aucune remise en cause d'une fois sur l'autre. Cette capacité a été pour nous une véritable découverte troublante que seul ce mode d'évaluation pouvait mettre en lumière.

Ces rapports que nous avons eu avec le groupe d'étudiants et les éléments que nous avons pu appréhender le concernant n'ont existé que parce que nous avons effectué 14 séances d'évaluations lors desquelles étaient proposés plusieurs sujets de contrôles de "connaissances de base" et de "connaissances avancées". Cela nous a amené à générer un grand nombre de sujets et à corriger beaucoup de copies. Cette expérimentation a donc été consommatrice de temps. Ce fait serait a prendre en compte dans le cas où ce mode d'enseignement-évaluation serait réutilisé.

Soulignons également que, dans le cadre de cette expérimentation nous avons pu prendre facilement en charge les étudiants arrivés en cours de l'année et ceux qui ne pouvaient assister aux séances d'évaluations pour des raisons médicales. Il a juste fallu organiser quelques séances d'évaluation supplémentaires pour les étudiants concernés.

Enfin nous souhaitons souligner un aspect concernant les tentatives de fraude auxquelles nous avons eu à faire face. Sachant qu'après avoir corrigé les diverses occurrences des divers niveaux, nous rendions les copies aux étudiants. Ceux-ci pouvait être amenés à poser des questions sur les raisons pour lesquelles telle ou telle chose était fausse. Cette méthode a permis de revenir sur quelques erreurs de correction de notre part.

Elle a également amenée certains étudiants à tenter de frauder en corrigeant leur copie *a posteriori*. Nous nous en sommes rendu compte pour certains d'entre eux. Nous les avons alors convoqué, sermonné, informé des risques qu'ils avaient pris en faisant cela et expliqué que si il étaient repris ces risques deviendraient réalité. Mais nous avons surtout cherché à comprendre les raisons qui les ont poussés à prendre de tels risques. Deux raisons sont apparues. En premier lieu, ils n'avaient pas vraiment l'impression de faire quelque chose de grave. L'aspect désacralisé des évaluations est sans doute à mettre en cause ici. D'autre part, le fait qu'il faille réaliser parfaitement les exercices était pour eux anxiogène. Sur ce sujet, nous pensons que le fonctionnement expérimenté leur a appris à gérer ce type de stress.

7 Quelques pistes de modification de la méthode

Nous avons pointé des qualités de la méthode expérimentée, mais aussi certains de ses défauts. Au vu de notre expérience, pour renforcer ses qualités et amoindrir ses défauts, nous jugeons pertinent de renforcer l'interaction apprentissage-évaluation en ce qui concerne les niveaux de base en augmentant, par exemple leur nombre. Il nous semblerait en effet raisonnable de pouvoir assurer que les étudiants obtenant l'Unité d'Enseignement maîtrise effectivement toutes les méthodes et tous les calculs basiques du programme.

En ce qui concerne le nombre de nivaux de "connaissances avancées", celui que nous avions utilisé (5) nous semble correct. En revanche, il nous semblerait pertinent de limiter le droit à se présenter à l'évaluation associée à chacun de ces niveaux à 3 fois. Cela pourrait sans doute pousser les étudiants à mieux les préparer.

Il nous semblerait également pertinent d'inclure dans ce processus une facette amenant les étudiants à intégrer des connaissances de plusieurs chapitres pour résoudre des épreuves de type problème. Une façon pertinente de procéder serait d'ajouter quelques niveaux de "connaissances intégrées" avec des évaluation spécifiques et de difficulté croissante.

Il semblerait de plus pertinent de renforcer le coté sacralisé des séances d'évaluation, même si elles sont fréquentes.

Enfin, nous terminons par un commentaire sur le fait qu'il semble que peu d'étudiants aient fait de manière systématique toutes les feuilles d'entraînement que nous leurs avions fournies. Certains suivaient même de façon extrêmement passive les séances de cours magistraux où les exercices étaient corrigés. Il nous semble, *a posteriori*, qu'il faudrait limiter ce nombre de séances et instituer des séances de rendez-vous où les étudiants pourraient poser des questions sur les exercices des feuilles d'entraînement.

Annexes

A Document explicatif distribué aux étudiants

Mode d'enseignement et d'évaluation pour l'unité MTH 1103 sur le site de Vannes

Pour l'année universitaire 2009/2010, l'équipe pédagogique du l'unité MTH 1103, dans le cadre du "plan pour la réussite en licence", met en place sur le site de Vannes le mode d'enseignement et d'évaluation décrit ci-dessous.

Les objectifs de ce fonctionnement sont :
- une évaluation fréquente
- une évaluation graduée (un étudiant ne peut se soumettre à l'évaluation d'un niveau que s'il a obtenu les niveaux précédents)
- une responsabilisation (l'étudiant doit comprendre le système d'évaluation et savoir où il en est dans sa progression)
- une réussite accrue (l'étudiant passe l'épreuve d'évaluation d'un niveau jusqu'à son obtention)

Ce document et les Feuilles d'Entraînement (FE - 1 à FE - 6) sont disponibles sur :
– http ://www-labsticc.univ-ubs.fr/ frenod/DocumentsPourEtudiant.html –
ou
– http ://www-labsticc.univ-ubs.fr/ frenod/index.html – (puis cliquer sur "Documents pour les étudiants")

Description du déroulement de l'unité (les dates ne sont données qu'à titre indicatif)
—» Cours : CM - 1 (E. Frénod le 07/09))
Droites du plan 1 - Résolution d'un problème de biologie par programmation linéaire

—» Distribution d'une Feuille d'Entraînement à faire en autonomie : FE - 1
Résolution d'un problème de biologie par programmation linéaire
Exercices sur droites du plan

—» Cours : CM - 2 (E. Frénod le 07/09)
Droites du plan 2 - Vecteurs du plan. Équations de droite

—» Cours : CM - 3 (E. Sirot le 16/09)
Résolution d'exercices sur droites du plan

—» Cours : CM - 4 (E. Frénod le 23/09)
Suites 1 - Quelques exemples de modèles d'évolution

—» Distribution d'une Feuille d'Entraînement à faire en autonomie : FE - 2
Suites

—» Séance d'évaluation (le 25/09)
==> CB - 1 : Exercices de base sur droites du plan et résolution de problèmes très simples de biologie par programmation linéaire
==> CA - 1 : Résolution de problèmes de biologie par programmation linéaire

—» Cours : CM - 5 (E. Sirot le 28/09)
Exemples de résolutions d'exercices sur les suites

—» Cours : CM - 6 (E. Frénod le 30/09)
Suites 2 - Formulaire sur les suites

—» Séance d'évaluation (le 02/10)
==> Pour les étudiants qui n'ont pas obtenu CB - 1 –> CB - 1
==> Pour les étudiants qui n'ont pas obtenu CA - 1 –> CA -1

—» Cours : CM - 7 (E. Sirot le 05/10)
Exemples de résolutions d'exercices sur les suites

—» Cours : CM - 8 (E. Frénod le 07/10)
Fonctions 1

—» Distribution d'une Feuille d'Entraînement à faire en autonomie : FE - 3
Fonctions 1

—» Séance d'évaluation (le 09/10)
==> Pour les étudiants qui ont obtenu CB - 1 –> CB - 2 : Démonstration par récurrence. Calculs simples de limites
Pour les étudiants qui n'ont pas obtenu CB - 1 –> CB - 1
==> Pour les étudiants qui ont obtenu CA - 1 et CB - 1 –> CA - 2 : Manipulation des suites. Applications à des calculs en biologie
Pour les étudiants qui n'ont pas obtenu CA - 1 –> CA - 1

—» Cours : CM - 9 (E. Sirot le 12/10)
Exemples d'exercices sur le domaine de définition et les limites

—» Cours : CM - 10 (E. Frénod le 14/10)

Fonctions 1 (suite)

—» Séance d'évaluation (le 16/10)
==> Pour les étudiants qui ont obtenu CB - 2 –> CB - 3 : Domaine de définition d'une fonction, Calculs de limites simples, calculs de dérivées simples, études de fonctions simples
Pour ceux qui ont obtenu CB - 1 et pas CB - 2 –> CB - 2
Pour ceux qui n'ont pas obtenu CB - 1 –> CB - 1
==> Pour les étudiants qui ont obtenu CA - 2 et CB - 2 –> CA - 3 : Calculs de limites plus complexes, calculs de dérivées plus complexes, études de fonctions, bijection réciproque
Pour ceux qui ont obtenu ((CA - 1 et CB - 1) ou CB - 2) et pas CA - 2 –> CA - 2
Pour ceux qui n'ont pas obtenu CA - 1 –> CA - 1

—» Cours : CM - 11 (E. Sirot le 19/10)
Calculs de dérivées

—» Cours : CM - 12 (E. Frénod le 21/10)
Fonction 1 (suite) - Fonctions usuelles (dont arctan, arcsin et arccos)

—» Séance d'évaluation (le 02/11)
==> Pour les étudiants qui ont obtenu CB - 2 et pas CB - 3 –> CB - 3
Pour ceux qui ont obtenu CB - 1 et pas CB - 2 –> CB - 2
Pour ceux qui n'ont pas obtenu CB - 1 –> CB - 1
==> Pour les étudiants qui ont obtenu ((CA - 2 et CB - 2) ou CB - 3) et pas CA - 3 –> CA - 3
Pour ceux qui ont obtenu ((CA - 1 et CB - 1) ou CB - 2) et pas CA - 2 –> CA - 2
Pour ceux qui n'ont pas obtenu CA - 1 –> CA - 1

—» Cours : CM - 13 (E. Sirot le 04/11)
Exemples d'études de fonction

—» Cours : CM - 14 (E. Frénod le 09/11)
Calcul intégral

—» Distribution d'une Feuille d'Entraînement à faire en autonomie : FE - 4
Intégrales

—» Séance d'évaluation (le 13/11)
==) Pour les étudiants qui ont obtenu CB - 2 et pas CB - 3 –> CB - 3
Pour ceux qui ont obtenu CB - 1 et pas CB - 2 –> CB - 2
Pour ceux qui n'ont pas obtenu CB - 1 –> CB - 1
==) Pour les étudiants qui ont obtenu ((CA - 2 et CB - 2) ou CB - 3) et pas CA - 3 –> CA - 3
Pour ceux qui ont obtenu ((CA - 1 et CB - 1) ou CB - 2) et pas CA - 2 –> CA - 2
Pour ceux qui n'ont pas obtenu CA - 1 –> CA - 1

—» Cours : CM - 15 (E. Sirot le 16/11)
Exemples de calculs d'intégrales

—» Cours : CM - 16 (E. Frénod le 18/11)
Fonction 2 - Définition de "limite", "continuité" et "dérivée" Développements limités. Extrema

—» Distribution d'une Feuille d'Entraînement à faire en autonomie : FE - 5
Fonctions 2

—» Séance d'évaluation (le 20/11)
==) Pour les étudiants qui ont obtenu CB-3 –> CB - 4 : Calculs d'intégrales simples, manipulation de l'intégration par parties et du changement de variable sur des exemples simples, calculs de limites avec des développements limités. Pour ceux qui ont obtenu CB - 2 et pas CB - 3 –> CB - 3
Pour ceux qui ont obtenu CB - 1 et pas CB - 2 –> CB - 2
Pour ceux qui n'ont pas obtenu CB - 1 –> CB - 1
==) Pour les étudiants qui ont obtenu CA - 3 et CB - 3 –> CA - 4 : Calcul d'intégrales plus complexes, études d'extrema.
Pour ceux qui ont obtenu ((CA - 2 et CB - 2) ou CB - 3) et pas CA - 3 –> CA - 3
Pour ceux qui ont obtenu ((CA - 1 et CB - 1) ou CB - 2) et pas CA - 2 –> CA - 2
Pour ceux qui n'ont pas obtenu CA - 1 –> CA - 1

—» Cours : CM - 17 (E. Sirot le 23/11)
Exemples de manipulation de la définition de la limite. Exemples d'utilisation de développements limités pour calculer des limites.

—» Cours : CM - 18 (E. Frénod le 25/11)
Equations différentielles ordinaires 1 - Edo linéaires d'ordre 1. Edo linéaires à coefficients constants d'ordre 2.

—» Distribution d'une Feuille d'Entraînement à faire en autonomie : FE - 6
Edo

—» Séance d'évaluation (le 30/11)
==> Pour les étudiants qui ont obtenu CB - 3 et pas CB - 4 –> CB - 4
Pour ceux qui ont obtenu CB - 2 et pas CB - 3 –> CB - 3

Pour ceux qui ont obtenu CB - 1 et pas CB - 2 –> CB - 2
Pour ceux qui n'ont pas obtenu CB - 1 –> CB - 1
==> Pour les étudiants qui ont obtenu ((CA - 3 et CB - 3) ou CB - 4 et pas CA - 4 –> CA - 4
Pour ceux qui ont obtenu ((CA - 2 et CB - 2) ou CB - 3) et pas CA - 3 –> CA - 3
Pour ceux qui ont obtenu ((CA - 1 et CB - 1) ou CB - 2) et pas CA - 2 –> CA - 2
Pour ceux qui n'ont pas obtenu CA - 1 –> CA - 1

—» Cours : CM - 19 (E. Sirot le 02/12)
Exemples de résolutions d'Edo 1

—» Cours : CM - 20 (E. Frénod le 09/12)
Edo 2 - Variation de la constante

—» Séance d'évaluation (le 11/12)
==> Pour les étudiants qui ont obtenu CB-4 –> CB - 5 : Résolutions d'équations différentielles simples du premier et second ordre
Pour les étudiants qui ont obtenu CB - 3 et pas CB - 4 –> CB - 4
Pour ceux qui ont obtenu CB - 2 et pas CB - 3 –> CB - 3
Pour ceux qui ont obtenu CB - 1 et pas CB - 2 –> CB - 2
Pour ceux qui n'ont pas obtenu CB - 1 –> CB - 1
==> Pour les étudiants qui ont obtenu CA - 4 et CB - 4 –> CA - 5 : Résolution d'équations différentielles, utilisation de la variation de la constante
Pour les étudiants qui ont obtenu ((CA - 3 et CB - 3) ou CB - 4 et pas CA - 4 –> CA - 4
Pour ceux qui ont obtenu ((CA - 2 et CB - 2) ou CB - 3) et pas CA - 3 –> CA - 3
Pour ceux qui ont obtenu ((CA - 1 et CB - 1) ou CB - 2) et pas CA - 2 –> CA - 2
Pour ceux qui n'ont pas obtenu CA - 1 –> CA - 1

—» Cours : CM - 21 (E. Sirot le 16/12)
Exemples de résolutions d'Edo 2

—» Séance d'évaluation (le 18/12)
==> Pour les étudiants qui ont obtenu CB - 4 et pas CB - 5 –> CB - 5
Pour ceux qui ont obtenu CB - 3 et pas CB - 4 –> CB - 4
Pour ceux qui ont obtenu CB - 2 et pas CB - 3 –> CB - 3
Pour ceux qui ont obtenu CB - 1 et pas CB - 2 –> CB - 2
Pour ceux qui n'ont pas obtenu CB - 1 –> CB - 1
==> Pour les étudiants qui ont obtenu ((CA - 4 et CB - 4) ou CB - 5) et pas CA - 5 –> CA - 5
Pour ceux qui ont obtenu ((CA - 3 et CB - 3) ou CB - 4 et pas CA - 4 –> CA - 4
Pour ceux qui ont obtenu ((CA - 2 et CB - 2) ou CB - 3) et pas CA - 3 –> CA - 3
Pour ceux qui ont obtenu ((CA - 1 et CB - 1) ou CB - 2) et pas CA - 2 –> CA - 2
Pour ceux qui n'ont pas obtenu CA - 1 –> CA - 1

—-»> Cours : CM - 22 (E. Sirot le 06/01) Exemples de problèmes

—» Séance d'évaluation (le 08/01)
==> Pour les étudiants qui ont obtenu CB - 5 et CA - 5 –> CA - 6 : Problème
Pour ceux qui ont obtenu CB - 5 et CA - 4 et pas CA - 5 –> CA - 6 ou CA - 5 au choix
Pour ceux qui ont obtenu CB - 5 et CA - 3 et pas CA - 4 –> CA - 6 ou CA - 4 au choix
Pour ceux qui ont obtenu CB - 5 et CA - 2 et pas CA - 3 –> CA - 6 ou CA - 3 au choix
Pour ceux qui ont obtenu CB - 5 et CA - 2 et pas CA - 3 –> CA - 6 ou CA - 3 au choix
Pour ceux qui ont obtenu CB - 5 et CA - 1 et pas CA - 2 –> CA - 6 ou CA - 2 au choix
Pour ceux qui ont obtenu CB - 5 et CA - 1 et pas CA - 2 –> CA - 6 ou CA - 2 au choix
Pour ceux qui ont obtenu CB - 5 et pas CA - 1 –> CA - 6 ou CA - 1 au choix

Principe d'évaluation et formule donnant la note

PRINCIPES

Pour chaque niveau d'évaluation, il y a deux épreuves :
- un "contrôle des connaissances de base" (CB - 1 à CB - 5)
- un "contrôles des connaissances avancées" (CA - 1 à CA - 5)

Il y a un "contrôles des connaissances avancées" supplémentaire (CA - 6) dont le sujet est une résolution de problème.
Un étudiant ne peux pas passer CB - 2 tant qu'il n'a pas obtenu CB - 1
Un étudiant ne peux pas passer CB - 3 tant qu'il n'a pas obtenu CB - 2
Un étudiant ne peux pas passer CB - 4 tant qu'il n'a pas obtenu CB - 3
Un étudiant ne peux pas passer CB - 5 tant qu'il n'a pas obtenu CB - 4

Un étudiant ne peux pas passer CA - 2 tant qu'il n'a pas obtenu ((CB - 1 et CA - 1) ou CB - 2)
Un étudiant ne peux pas passer CA - 3 tant qu'il n'a pas obtenu ((CB - 2 et CA - 2) ou CB - 3)
Un étudiant ne peux pas passer CA - 4 tant qu'il n'a pas obtenu ((CB - 3 et CA - 3) ou CB - 4)
Un étudiant ne peux pas passer CA - 5 tant qu'il n'a pas obtenu ((CB - 4 et CA - 4) ou CB - 5)
Un étudiant ne peux pas passer CA - 6 s'il n'a pas obtenu CB - 5

NOTATION (Première session)

CB - 1 donne la note NB1(qui vaut 0 ou 2) ; CB - 2 donne la note NB2 (qui vaut 0 ou 2) ; etc.
CA - 1 donne la note NA1 (qui vaut 0, 1 ou 2) ; CA - 2 donne la note NA2 (qui vaut 0, 1ou 2) ; etc.

CB - 1 est déclarée obtenue par l'étudiant si il a NB1 = 2 ;
CB - 2 est déclarée obtenue par l'étudiant si il a NB2 = 2 ; etc

CA - 1 est déclarée obtenue par l'étudiant si il a NA1 = 1 ou 2 ;
CA - 2 est déclarée obtenue par l'étudiant si il a NA2 = 1ou 2 ; etc

Formule donnant la note finale de première session :

(NB1 + NB2 + NB3 + NB4 + NB5) + Max(((NB1 + NB2 + NB3 + NB4 + NB5)-9) , 0) × (NA1 + NA2 + NA3 + NA4 + NA5 + NA6).

Cela revient à dire que les points associés aux "contrôles des connaissances avancées" (CA - 1 à CA - 6) ne sont comptabilisés que si tous les "contrôles des connaissances de base" (CB - 1 à CB - 5) ont été obtenus.

NOTATION (Seconde session)

Il n'y a pas formellement de deuxième session.
En revanche, à l'issue du jury de première session, les NB obtenues par les étudiants au cours des évaluations de première session sont conservées. Les notes NA obtenues par les étudiants au cours des évaluations de première session sont oubliées. Des contrôles de connaissances de bases sont organisés lors du second semestre afin de permettre aux étudiants d'obtenir de nouveaux CB et, de ce fait, d'améliorer leur note. Les règles pour se présenter aux épreuves sont identiques à celles de la première session.

Formule donnant la note finale de seconde session :

(NB1 + NB2 + NB3 + NB4 + NB5)

B Feuilles d'exercices d'entraînement

B.1 Feuille d'exercices d'entraînement 1

Programme : Résolution d'un problème de biologie par programmation linéaire. Exercices sur droites du plan

Exercices de base

Exercice b.1 - Soient les points $A(1,3)$, $B(2,-1)$, $C(2,2)$ et $D(-1,-3)$.
1. Placer ces points dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.
2. Dessiner les vecteurs suivants $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{AB}+\vec{i}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OC}+\vec{j}$, puis donner leurs coordonnées.

Exercice b.2 - Soient les points $O(0,0)$, $A(1,-2)$ et $B(3,2)$ et le vecteur $\vec{u}(1,1)$.
1. Donner une équation de la droite (AB).
2. Donner une équation de la droite passant par B et de vecteur directeur $\vec{u}$.
3. Donner une équation de la droites passant par B et orthogonale à $\overrightarrow{OA}$.

Exercice b.3 - On considère le problème de biologie très simplifié d'un animal situé dans une zone où il dispose de deux types de ressource alimentaire R_1 et R_2. La zone contient 8 unités de R_1 et 4 unités de R_2. L'ingestion d'une unité de R_1 apporte à l'animal une quantité d'énergie de 1 ; et, l'ingestion d'une unité de R_2 lui apporte une quantité d'énergie de 3. Pour ingérer une unité de R_1 l'animal met 1 minutes et pour ingérer une unité de R_2 l'animal met 2 minutes. L'animal dispose de 12 minutes.

Dans la suite, on appelle x_1 la quantité d'unités de R_1 ingérée par l'animal et x_2 la quantité d'unités de R_2.
1. Pour une quantité x_1 donnée et une quantité x_2 donnée d'unités ingérées donner l'énergie acquise par l'animal.
2. Traduire les contraintes données ci-dessus en inéquations.
3. Représenter le quadrilatère dont l'intérieur représente l'ensemble de (x_1,x_2) satisfaisant les contraintes.
4. Donner la quantité d'unités de R_1 et la quantité d'unités de R_2 qui maximisent l'énergie que l'animal peut acquérir. Avec ces quantités, combien d'énergie obtient-il ?

Exercice b.4 - On considère le problème de biologie très simplifié d'un animal situé dans une zone où il dispose de deux types de ressource alimentaire R_1 et R_2. La zone contient 8 unités de R_1 et 4 unités de R_2. L'ingestion d'une unité de R_1 apporte à l'animal une quantité d'énergie de 2 ; et, l'ingestion d'une unité de R_2 lui apporte une quantité d'énergie de 2. Pour ingérer une unité de R_1 l'animal met 1 minutes et pour ingérer une unité de R_2 l'animal met 2 minutes. L'animal dispose de 11 minutes.

Dans la suite, on appelle x_1 la quantité d'unités de R_1 ingérée par l'animal et x_2 la quantité d'unités de R_2.
1. Pour une quantité x_1 donnée et une quantité x_2 donnée d'unités ingérées donner l'énergie acquise par l'animal.

2. Traduire les contraintes données ci-dessus en inéquations.
3. Représenter le quadrilatère dont l'intérieur représente l'ensemble de (x_1, x_2) satisfaisant les contraintes.
4. Donner la quantité d'unités de R_1 et la quantité d'unités de R_2 qui maximisent l'énergie que l'animal peut acquérir. Avec ces quantités, combien d'énergie obtient-il ?

Exercices avancés

Exercice a.1 - Soit la droite $\mathcal{D}$ d'équation $ax + by + c = 0$ et $M(r, s)$ un point et $N(p, q)$ le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{D}$
1. Écrire deux équations faisant intervenir p et q caractérisant N.
2. Donner l'expression de (p, q) en fonction de a, b, c, r et s.
3. Donner l'expression de la distance de M à N. (Remarque : Cette distance est par définition la distance de M à $\mathcal{D}$.)

Exercice a.2 - On considère le problème de biologie très simplifié d'un animal situé dans une zone où il dispose de deux types de ressource alimentaire R_1 et R_2. La zone contient 251 unités de R_1 et 497 unités de R_2. L'ingestion d'une unité de R_1 apporte à l'animal une quantité d'énergie de 4 ; et, l'ingestion d'une unité de R_2 lui apporte une quantité d'énergie de 2. Pour ingérer une unité de R_1 l'animal met 1 minutes et pour ingérer une unité de R_2 l'animal met 2 minutes. Les caractéristiques physiologiques de l'animal ne lui permettent pas d'ingérer plus d'unités de R_1 que d'unités de R_2. L'animal dispose de 679 minutes.

Dans la suite, on appelle x_1 la quantité d'unités de R_1 ingérée par l'animal et x_2 la quantité d'unités de R_2.
1. Pour une quantité x_1 donnée et une quantité x_2 donnée d'unités ingérées donner l'énergie acquise par l'animal.
2. Traduire les contraintes données ci-dessus en inéquations.
3. Représenter le quadrilatère dont l'intérieur représente l'ensemble de (x_1, x_2) satisfaisant les contraintes.
4. Identifier le point qui maximise l'énergie obtenue (tout en respectant les contraintes).
5. Donner les trois points de coordonnées entières les plus proches du point qui maximise l'énergie.

6. Sachant que l'animal ne peut absorber que des quantités entières de R_1 et R_2, donner la quantité d'unités de R_1 et la quantité d'unités de R_2 qui maximisent l'énergie que l'animal peut acquérir. Avec ces quantités, combien d'énergie obtient-il ?

B.2 Feuille d'exercices d'entraînement 2

Programme : Suites

Exercices de base

Exercice b.1 - Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par u_0 et la formule de récurrence $u_{n+1} = u_n^3$.
1. Sur un graphique, tracer la courbe représentative de la fonction : $x \mapsto x^3$ dans un repère orthonormé. Sur ce graphique représenter les 4 premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque $u_0 = 2$. Sur ce même graphique représenter les 4 premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque $u_0 = 1/2$.
2. Démontrer par récurrence que si $u_0 \geq 0$ alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite positive. Montrer par récurrence que si $u_0 \leq 0$ alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite négative.
3. Démontrer par récurrence que si $u_0 \geq 1$ alors, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 1$ et qu'alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante.

Exercice b.2 - Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 2$ et la formule de récurrence $u_{n+1} = \Big(2 + \dfrac{1}{n+1}\Big)u_n$.
1. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n \geq v_n$ où la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $v_0 = u_0$ et la formule de récurrence $v_{n+1} = 2v_n$.
2. Donner $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$. Justifier la réponse.
3. Déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice b.3 - Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 4$ et la formule de récurrence $u_{n+1} = \Big(\dfrac{1}{3} + \dfrac{\cos(n)}{4}\Big)u_n$.
1. Démontrer que pour tout entier naturel n, $\dfrac{1}{12} \leq \dfrac{1}{3} + \dfrac{\cos(n)}{4} \leq \dfrac{5}{6}$.
2. Trouver deux suites géométriques $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de raisons dont les valeurs absolues sont strictement plus petites que 1 telles que, pour tout entier naturel n, $v_n \leq u_n \leq w_n$.
3. Donner $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n$. Justifier la réponse.
3. Déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice b.4 - Soient les suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $u_0 = 2$, $v_0 = 100$ et les formules de récurrence $u_{n+1} = 1.08\, u_n$ et $v_{n+1} = 0.94\, v_n$.
1. Montrer par récurrence que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
2. Trouver le rang à partir duquel les termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont strictement supérieurs à 30.
3. Déterminer le rang $\tilde{n}$ tel que $\forall n < \tilde{n}$, $u_n < v_n$ et $\forall n \geq \tilde{n}$, $u_n \geq v_n$.

Exercice b.5 - Soit la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \dfrac{x+3}{2}$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par u_0 et la formule de récurrence $u_{n+1} = \dfrac{u_n + 3}{2}$.
1. Démontrer que pour tout couple de réels (x, y), la fonction g satisfait la propriété suivante : $|g(x) - g(y)| \leq \dfrac{1}{2}|x - y|$.

2. Trouver le réel x tel que $g(x) = x$.
3. Quelle est la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercices avancés

Exercice a.1 - On rappelle que pout tout entier $n \geq 1$, $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$. Démontrer par récurrence que, pour tout n de $\mathbb{N}$, on a :

$$1 \times 1! + 2 \times 2! + 3 \times 3! + 4 \times 4! + \ldots + n \times n! = (n+1)! - 1.$$

Exercice a.2 - Démontrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, $4^n + 5$ est un multiple de 3.

Exercice a.3 - On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_0 = 0, \qquad v_0 = 2,$$
$$u_{n+1} = \frac{(3u_n+1)}{4}, \qquad v_{n+1} = \frac{(3v_n+1)}{4}.$$

1. Calculer les trois premiers termes de chacune des deux suites.
2. Démontrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes et calculer leur limite.
3. On considère la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $s_n = u_n + v_n$. Etudiez le comportement de la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice a.4 - Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $g(x) = \dfrac{x}{2} + \dfrac{2}{x}$.
1. Etudier les variations de g.
2. Démontrer que sa courbe représentative $\mathcal{C}$ admet une asymptote oblique.
3. Construire $\mathcal{C}$.
On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2} + \dfrac{2}{u_n}$.
4. Vérifier que, pour tout n de $\mathbb{N}$, on a : $u_n > 0$.
5. Comment doit-on choisir u_0 pour que la suite soit constante ?
6. Représenter les trois premiers termes de la suite sur le graphique de la troisième question, pour $u_0 = 5$, puis pour $u_0 = 1$. Quelles conjectures peut-on faire ?
7. Démontrer que, quel que soit u_0 de $\mathbb{R}^{+*} - \{2\}$, la suite est minorée et décroissante à partir du rang 1. Que peut-on en conclure ?

Exercice a.5 - Deux populations d'insectes comptent respectivement 100 000 et 180 000 individus. L'effectif de la première population augmente de 4% par semaine, alors que celui de la seconde diminue de 3% par semaine. On suppose que les croissances continuent à ce rythme
1. Dans combien de semaines la première population aura-t-elle doublé ?
2. Dans combien de semaines l'effectif de la première population dépassera-t-il celui de la seconde ?

Exercice a.6 - Dans une population d'effectif constant comprenant 1000 individus, 100 individus sont initialement porteurs d'un parasite. On estime que chaque semaine, 20% des individus infectés guérissent, alors que 20% des individus sains sont infectés par le parasite. On appelle u_n le nombre d'individus sains lors de la $n^{\text{ième}}$ semaine (avec $u_0 = 900$).
1. Trouver une relation de récurrence entre u_n et u_{n+1}.
2. Etudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice a.7 - On considère un problème de dynamique de population modélisé par une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Pour chaque entier naturel n, le réel u_n est l'effectif de la population à l'instant n. on suppose que u_0 est connu et que u_{n+1} est donné en fonction de u_n par

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 0 \quad \text{si } u_n < 2, \\ &= 0,57 \cdot (1 - \cos\left(\frac{2\pi}{18}(u_n - 2)\right) u_n \quad \text{si } 2 \leq u_n < 20, \\ &= 0 \quad \text{si } u_n \geq 20. \end{aligned} \tag{B.2.0.1}$$

1. Étudier et représenter la fonction $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ suivante :

$$\begin{aligned} \gamma(x) &= 0 \quad \text{si } x < 2, \\ &= 0,57 \cdot (1 - \cos\left(\frac{2\pi}{18}(x - 2)\right) \quad \text{si } 2 \leq x < 20, \\ &= 0 \quad \text{si } x \geq 20. \end{aligned}$$

2. Donner une justification à l'aide d'arguments biologiques du modèle (B.2.0.1).
3. Étudier et représenter sur un graphique la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \gamma(x)x$.
4. Représenter sur le graphique de la question 3 les termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour plusieurs valeurs de u_0.
5. À l'aide du graphique déterminer le comportement de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de la valeur de u_0.
6. Interpréter d'un point de vue biologique.

B.3 Feuille d'exercices d'entraînement 3

Programme : Fonctions 1

Exercices de base

Exercice b.1 - Donner le domaine de définition des fonctions suivantes :

$$\begin{array}{llll} 1:\ x\mapsto 5x; & 2:\ x\mapsto \dfrac{x^2-4}{x^2+4}; & 3:\ x\mapsto \dfrac{x^3-27}{x-3}; & 4:\ x\mapsto \sqrt{x^2-5}; \\ 5:\ x\mapsto \ln(x^2-4); & 6:\ x\mapsto \ln(|x|); & 7:\ x\mapsto x\sin\left(\dfrac{1}{|x|}\right); & 8:\ x\mapsto \sqrt{e^x-8}. \end{array}$$

Exercice b.2 - Calculer les limites suivantes :

$$\begin{array}{lll} 1:\ \lim\limits_{x\to 2} 5x; & 2:\ \lim\limits_{x\to 2} x^2-4x+1; & 3:\ \lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^2-4}{x^2+4}; \\ 4:\ \lim\limits_{x\to -4} \dfrac{x^2-16}{x+4}; & 5:\ \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2+2x+1}{x+1} & 6:\ \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(x+h)^2-x^2}{h}. \end{array}$$

Exercice b.3 - Calculer les limites suivantes :

$$\begin{array}{llll} 1:\ \lim\limits_{x\to +\infty} 5x^2+x; & 2:\ \lim\limits_{x\to +\infty} 5x^2-x; & 3:\ \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{x^2-1}; & 4:\ \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^2+1}{x-3}; \\ 5:\ \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^2+1}{5x^4-3}; & 6:\ \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^2+1}{5x^2-3x-2} & 7:\ \lim\limits_{x\to +\infty} \ln(x)-x; & 8:\ \lim\limits_{x\to -\infty} e^{-x}+x. \end{array}$$

Exercice b.4 - Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer le (ou les) point(s) a pour lequel (lesquels) le dénominateur s'annule, puis étudier les limites lorsque $x\to a^+$ et $x\to a^-$

$$1:\ x\mapsto \frac{-2}{x};\quad 2:\ x\mapsto \frac{2}{x^2}.$$

Exercice b.5 - Montrer que la fonction $f: x\mapsto f(x)=\sin(x)e^{-x}$ vérifie $-e^{-x}\leq f(x)\leq e^{-x}$ pour tout réél x. En déduire $\lim\limits_{x\to +\infty} \sin(x)e^{-x}$.

Exercice b.6 - Calculer les limites suivantes :

$$1:\ \lim_{x\to 0} \cos\left(x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)\qquad 2:\ \lim_{x\to 0} \sin^2(x)\ln(\sin(x)).$$

Exercice b.7 - Donner le domaine de définition puis calculer la dérivée des fonctions suivantes :

$$\begin{array}{lll} 1:\ x\mapsto \dfrac{x^2-4}{x^2+4}; & 2:\ x\mapsto \dfrac{x^2}{3+\cos(x)}; & 3:\ x\mapsto \cos(x^2); \\ 4:\ x\mapsto \sqrt{x^2+2}; & 5:\ x\mapsto \ln(x^2-x+3); & 6:\ x\mapsto e^{3x^2}; \\ 7:\ x\mapsto x\ln(x)-x; & 8:\ x\mapsto \ln\big(\cos(x)\big); & 9:\ x\mapsto \cos\big(\sin(x)\big). \end{array}$$

Exercice b.8 - Soit la fonction f définie par $f(x)=x\,|x|$.

1. Déterminer D_f et montrer que f est continue sur D_f.
2. Calculer f' pour $x\neq 0$.
3. Le nombre dérivé $f'(0)$ existe-il ? Si oui le calculer.

Exercice b.9 - Déterminer l'équation de la tangente aux courbes suivantes en $x=1$.

$$1:\ y=8-5x^2\ ,\quad 2:\ \frac{4}{x+1},\quad 3:\ \ln(x^2).$$

Exercice b.10 - Étudier la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{\ln(x)}{x}$.

Exercices avancés

Exercice a.1 - Donner le domaine de définition des fonctions suivantes :

$$1: x \mapsto \ln(x^2-3x+1); \quad 2: x \mapsto \frac{1}{\cos(x)}; \quad 3: x \mapsto \frac{\sqrt{x^2-5x+1}}{\cos(3x)};$$
$$4: x \mapsto \frac{1}{e^{2x}-e^x-1}; \quad 5: x \mapsto \ln(x^3+x-2); \quad 6: x \mapsto \ln(|x|+\sqrt{x}-1).$$

Exercice a.2 - Calculer les limites suivantes :

$$1: \lim_{x\to 3} \frac{x^3-27}{x-3}; \quad 2: \lim_{x\to 2} \frac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}}; \quad 3: \lim_{x\to -2} \frac{x+2}{x^2-x-6};$$
$$4: \lim_{x\to 3} \frac{x^3-27}{x-3}; \quad 5: \lim_{x\to -1} \frac{x^2+2x+1}{x+1} \quad 6: \lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+2}-2}.$$

Exercice a.3 - Calculer les limites suivantes :

$$1: \lim_{x\to+\infty} e^{-x}\ln(x^4); \quad 2: \lim_{x\to+\infty} \sin\left(\frac{1}{x}\right)\ln(x) \quad 3: \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}.$$

Exercice a.4 - Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer le (ou les) point(s) a pour lequel (lesquels) le dénominateur s'annule, puis étudier les limites lorsque $x \to a^+$ et $x \to a^-$

$$1: x \mapsto \frac{x+1}{(x-1)(x+6)}; \quad 2: x \mapsto \frac{x}{x^2-3}.$$

Exercice a.5 - Encadrer la fonction f par deux fonctions g_1 et g_2 pour calculer les limites suivantes :

$$1: \lim_{x\to+\infty} f(x) \text{ avec } f(x) = \sin(x)e^{-x}; \quad 2: \lim_{x\to 0} f(x) \text{ avec } f(x) = \left(x+\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)\frac{x^2}{\sqrt{4x^2+1}}.$$

Exercice a.6 -
1. Donner une fonction f et une fonction g vérifiant $\lim_{x\to+\infty} f = \lim_{x\to+\infty} g = +\infty$ telles que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f-g = 0$.

2. Donner une fonction f et une fonction g vérifiant $\lim_{x\to+\infty} f = \lim_{x\to+\infty} g = +\infty$ telles que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f-g = +\infty$.

Exercice a.7 - Calculer les limites suivantes :

$$1: \lim_{x\to 0} \cos\left(x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) \quad 2: \lim_{x\to 0} \left(x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)+2x^2\right)\ln\left(x^4\sin^2\left(\frac{1}{x}\right)+4x^4\sin\left(\frac{1}{x}\right)+4x^4\right).$$

Exercice a.8 - Calculer les limites suivantes :

$$1: \lim_{x\to 0^+} x^x; \quad 2: \lim_{x\to 0^+} \left(e^{\frac{1}{x}}\right)^x \quad 3: \lim_{x\to 0^+} \left(e^{\frac{1}{\sqrt{x}}}\right)^x \quad 4: \lim_{x\to 0^+} \left(e^{\frac{1}{x^2}}\right)^x.$$

Exercice a.9 - Calculer les limites suivantes :

$$1: \lim_{x\to 0} \frac{3\sin(x)+\sin(3x)}{x(\cos(3x)+\cos(x))}; \quad 2: \lim_{x\to 0} \frac{(e^x-1)\sin(x)}{\ln(1+x^2)}$$

Exercice a.10 - Donner le domaine de définition puis calculer la dérivée des fonctions suivantes :

$$1: x \mapsto \ln\left(\frac{x^2-4}{x^2+4}\right); \quad 2: x \mapsto \exp\left(\frac{x^2}{3+\tan(x)}\right); \quad 3: x \mapsto \sin\big(\cos(x^2)+x\big);$$
$$4: x \mapsto \frac{\sqrt{x^2+2}}{\ln\big(\sin(x)\big)}; \quad 5: x \mapsto \cos\big(\ln(x^2-x+3)\big); \quad 6: x \mapsto \arcsin(e^{3x^2}-x^2);$$
$$7: x \mapsto x\,|\ln(x)|-x; \quad 8: x \mapsto \ln\big(\cos(x)\big)\cos\left(\frac{x^3-6}{x-1}\right); \quad 9: x \mapsto \arctan\big(\sin^2(x)\big).$$

Exercice a.11 - Soit la fonction $f :]-1,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$.

1. Calculer f'. Montrer que f est monotone sur $]-1,+\infty[$.
2. Déterminer $J \subset \mathbb{R}$ tel que f soit une bijection de $]-1,+\infty[$ sur J.
3. Exprimer la fonction $f^{-1} : J \to]-1,+\infty[$.

Exercice a.12 - Soit la fonction f définie par

$$\begin{aligned} f(x) &= (2x-3)(e^x+1) \text{ si } x \leq 0 \\ &= \ln(x^2) \text{ si } x > 0. \end{aligned}$$

1. Donner D_f.
2. La fonction f est elle continue en 0 ?
3. Calculer f' et f''.
4. Étudier les variations de f'. Étudier les variations de f.
5. Donner la représentation graphique de f.

B.4 Feuille d'exercices d'entraînement 4

Programme : Intégrales

Exercices de base

Exercice b.1 - Calculer les primitives des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = \cos(2\pi x)\,, \quad f_2(x) = 7x^4\,, \quad f_3(x) = x^2 e^{(x^3+4)}\,.$$

Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_{\pi/6}^{\pi/2} \cos(x)\sin^2(x)\,dx\,, \quad \int_1^2 \frac{t}{1+t^2}\,dt\,, \quad \int_0^{\pi} \cos(z)\,e^{\sin(z)}\,dz\,.$$

Exercice b.2 - Soit f définie par $f(x) = \dfrac{1}{x^2-4}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Déterminer 2 constantes A et B telles que $\dfrac{1}{x^2-4} = \dfrac{A}{x-2} + \dfrac{B}{x+2}$.
3. Calculer $\displaystyle\int_3^5 f(x)\,dx$.

Exercice b.3 - Soit f définie par $f(x) = \dfrac{x+1}{x^3+x^2-6x}$

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Déterminer 3 constantes A, B et C telles que $f(x) = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x-2} + \dfrac{C}{x+3}$
3. Calculer $\displaystyle\int_3^5 f(x)\,dx$.

Exercice b.4 - En utilisant une intégration par parties, calculer :

$$\int_1^4 \ln(x)\,dx\ ; \qquad \int_{-2}^0 xe^x\,dx\ ; \qquad \int_0^{2\pi} x\sin(x)\,dx\ ;$$

Exercice b.5 - Soit f définie par $f(x) = \dfrac{\sin(x)\cos(x)}{2-\cos^2(x)}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. En effectuant le changement de variables $z = \cos(x)$ calculer $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/3} f(x)\,dx$.

Exercices avancés

Exercice a.1 - Calculer les primitives des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = x\cos(2\pi x^2)\,, \quad f_2(x) = 9x^{4/3}\,, \quad f_3(x) = \frac{1}{x^2+a^2} \text{ pour } a > 0.$$

Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\cos(x)}{\sin^3(x)}\,dx\,,\quad \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}e^{\arctan(t)}\,dt\,,\quad \int_0^{\pi} 3\sin(z)\cos^5(z)\,dz\,.$$

Exercice a.2 - Soit f définie par $f(x) = \dfrac{x+1}{x^3+2x^2+x+2}$
1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Déterminer 3 constantes A, B et C telles que $f(x) = \dfrac{Ax+B}{x^2+1} + \dfrac{C}{x+2}$
3. Calculer $\displaystyle\int_3^5 f(x)\,dx$.

Exercice a.3 - En utilisant une intégration par parties, calculer :

$$\int_{-2}^{0} x^3 e^{(x^2)}\,dx\ ;\qquad \int_0^{2\pi} x^5\sin(x^3)\,dx\ ;\qquad \int_1^3 x^2\ln(x)\,dx\ ;$$

Exercice a.4 - Soit f définie par $f(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{x-1}}$.
1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. En effectuant le changement de variables $z = \sqrt{x-1}$ calculer $\displaystyle\int_2^4 f(x)\,dx$.

B.5 Feuille d'exercices d'entraînement 5

Programme : Fonctions 2

Exercices de base

Exercice b.1 - En utilisant des développements limités de $\sin(x)$ et de $\cos(x)$ en 0 à l'ordre 3, calculer :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^2) - x\sin(x)}{\cos(x^2) - (\cos(x))^2}.$$

Exercice b.2 - Soit la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{x^2-x+1}{x}.$$

1. Quel est le domaine de définition D_f de f ?
2. Quel est le domaine $D_{f'}$ où le nombre dérivé de f existe ?
3. Calculez f' en tout point de $D_{f'}$.
4. Dressez le tableau de variation de f.
5. Calculez les limites de f en 0 à gauche, en 0 à droite, en $+\infty$ et en $-\infty$.
6. Le graphe de f admet-il des asymptotes verticale. Si oui lesquelles ?
7. Montrer que, pour tout $x \in D_f$, $f(x) = x - 1 + \dfrac{1}{x}$. Le graphe de f admet-il des asymptotes obliques en $+\infty$ et en $-\infty$. Si oui lesquelles ?
8. Tracez le graphe de f dans un repère orthonormé.
9. Montrez que si $x > 0$ alors $f(x) \geq 1$.
10. Cherchez la solution $y > 0$ de $y = f(y)$.

Exercice b.3 - En utilisant la définition de la continuité, démontrer que la fonction $x \mapsto x$ est continue en 1.

Exercices avancés

Exercice a.1 - Calculer :

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{(x^2)} - \cos(x)}{\sqrt{1+x(\cos(x^2))} - \sqrt{1-x(\cos(x))^2}}.$$

Exercice a.2 - Faire l'étude complète de la fonction $f(x) = \ln\left(\dfrac{x^2-x+1}{x}\right)$.

Exercice a.3 - En utilisant la définition de la continuité, démontrer que la fonction $x \mapsto x^2$ est continue en tout point de $\mathbb{R}$.

B.6 Feuille d'exercices d'entraînement 6

Programme : Edo

Exercices de base

Exercice b.1 - Donner l'ensemble des solutions $y(t)$ des équations différentielles suivantes :

$$1: \; y' + \cos(t)y = 0\,, \quad 2: \; y' + te^{(t^2)}y = 0\,.$$

Exercice b.2 - Donner la solution $y(t)$ de l'équation différentielle suivante :

$$y' + t\sin(t^2)y = 0\ ,\ y(0) = 1.$$

Exercice b.3 - On considère l'équation différentielle suivante :

$$y' - \frac{1}{1+t^2}y = 2t - 1. \qquad \text{(Eq)}$$

où y est fonction de la variable t.
1) Montrer que la fonction $z(t) = 1 + t^2$ est solution particulière de l'équation (Eq).
2) Exprimer la solution de générale de l'équation différentielle suivante : $\tilde{y}' - \dfrac{1}{1+t^2}\tilde{y} = 0.$
3) Exprimer la solution de générale de l'équation différentielle (Eq).
4) Exprimer la solution de (Eq) vérifiant $y(0) = 2$.

Exercice b.4 - Donner la solution générale des équations différentielles ordinaires suivantes :

$$y'' - 4y' + 4y = 0\,, \quad y'' - y' + 2y = 0\,, \quad y'' - 3y' + 1y = 0\,.$$

Exercice b.5 -
1) Donner la solution générale de l'équation différentielle suivante : $y'' + 3y' + 4y = 0$ (où y est une fonction de la variable t.)
2) Trouver 3 constantes A, B et C telles que $At^2 + Bt + C$ soit une solution particulière de $y'' + 3y' + 4y = t^2$.
3) Donner la solution générale de l'équation différentielle suivante : $y'' + 3y' + 4y = t^2$.
4) Donner la solution de $y'' + 3y' + 4y = t^2$ telle que $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$.

Exercices avancés

Exercice a.1 - Donner l'ensemble des solutions $y(t)$ de l'équation différentielle ordinaire suivante :

$$y' - ty^2 = 0\,.$$

Exercice a.2 -

1. Donner l'ensemble des solutions $y(t)$ de l'équation différentielle ordinaire suivante :

$$y' + t^3y = 0\,,$$

2. En utilisant la méthode de la "variation de la constante", construire une solution particulière de l'équation différentielle ordiniaire suivante :

$$y' + t^3y = e^{-\frac{t^4}{4}}\,.$$

3. Donner la solution de l'équation différentielle ordinaire suivante :

$$y' + t^3y = e^{-\frac{t^4}{4}}\,,\ y(1) = 1.$$

Exercice a.3 - On suppose que l'on a affaire à une population d'une espèce en un lieu donné dont l'effectif à l'instant t est $y(t)$ et dont le taux de natalité est constant et égal à 1.5 et le taux de mortalité est variable au cours du temps. L'expression du taux de mortalité est $0.5\,(2 - \sin(t))$. D'autre part, une variation de population du à des migration possède une densité de $1 + \sin(t)$.

1. Écrire (E) l'edo satisfaite par y et (E') son équation sans second membre associée.
2. Donner l'ensemble des solutions de (E').
3. Trouver une solution particulière de (E).
4. Donner l'ensemble des solutions de (E).

5. Sachant que l'effectif de la population est de 100 à $t = 0$ donner l'expression de $y(t)$.

C Contrôle des connaissances

C.1 Contrôle des connaissances de base 1

Programme : Exercices sur droites du plan. Problème de programmation linéaire simples.

C.1.1 Occurrence 1

Exercice 1 - Soient les points $O(0,0)$, $A(-1,3)$, $B(-5,2)$ $C(-3,-3)$ et $D(1,1)$ et le vecteur $\vec{u}(1,1)$.

1. Placer ces points dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

2. Dessiner les vecteurs suivants : $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{AB}-\vec{i}$, $\overrightarrow{OC}-\vec{u}$, $\overrightarrow{OC}+\vec{j}$, puis donner leurs coordonnées.

3. Donner une équation de la droite (AB).

Exercice 2 - On considère le problème de biologie très simplifié d'un animal situé dans une zone où il dispose de deux types de ressource alimentaire R_1 et R_2. La zone contient 5 unités de R_1 et 10 unités de R_2. L'ingestion d'une unité de R_1 apporte à l'animal une quantité d'énergie de 1 ; et, l'ingestion d'une unité de R_2 lui apporte une quantité d'énergie de 2 . Pour ingérer une unité de R_1 l'animal met 2 minutes et pour ingérer une unité de R_2 l'animal met 5 minutes. L'animal dispose de 30 minutes.

Dans la suite, on appelle x_1 la quantité d'unités de R_1 ingérée par l'animal et x_2 la quantité d'unités de R_2.

1. Pour une quantité x_1 donnée et une quantité x_2 donnée d'unités ingérées, donner l'énergie acquise par l'animal.

2. Traduire les contraintes données ci-dessus en inéquations.

3. Représenter le polygone dont l'intérieur représente l'ensemble de (x_1,x_2) satisfaisant les contraintes.

4. Donner la quantité d'unités de R_1 et la quantité d'unités de R_2 qui maximisent l'énergie que l'animal peut acquérir.

Avec ces quantités, combien d'énergie obtient-il ?

C.1.2 Occurrence 2

Exercice 1 - Soient les points $O(0,0)$, $A(-2,4)$, $B(-6,2)$ $C(-4,-4)$ et $D(1,2)$ et le vecteur $\vec{u}(1,2)$.

1. Placer ces points dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

2. Dessiner les vecteurs suivants : $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{AB}+\vec{i}$, $\overrightarrow{OC}+\vec{u}$, $\overrightarrow{OC}+\vec{j}$, puis donner leurs coordonnées.

3. Donner une équation de la droite passant par B et de vecteur directeur $\vec{u}$.

Exercice 2 - On considère le problème de biologie très simplifié d'un animal situé dans une zone où il dispose de deux types de ressource alimentaire R_1 et R_2. La zone contient 7 unités de R_1 et 8 unités de R_2. L'ingestion d'une unité de R_1 apporte à l'animal une quantité d'énergie de 2 ; et, l'ingestion d'une unité de R_2 lui apporte une quantité d'énergie de 1 . Pour ingérer une unité de R_1 l'animal met 6 minutes et pour ingérer une unité de R_2 l'animal met 2 minutes. L'animal dispose de 50 minutes.

Dans la suite, on appelle x_1 la quantité d'unités de R_1 ingérée par l'animal et x_2 la quantité d'unités de R_2.

1. Pour une quantité x_1 donnée et une quantité x_2 donnée d'unités ingérées, donner l'énergie acquise par l'animal.

2. Traduire les contraintes données ci-dessus en inéquations.

3. Représenter le polygone dont l'intérieur représente l'ensemble de (x_1,x_2) satisfaisant les contraintes.

4. Donner la quantité d'unités de R_1 et la quantité d'unités de R_2 qui maximisent l'énergie que l'animal peut acquérir.

Avec ces quantités, combien d'énergie obtient-il ?

C.1.3 Occurrence 3

Exercice 1 - Soient les points $O(0,0)$, $A(-1,3)$, $B(-5,2)$ $C(-3,-3)$ et $D(1,1)$ et le vecteur $\vec{u}(1,1)$.

1. Placer ces points dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

2. Dessiner les vecteurs suivants : $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{AB}-\vec{i}$, $\overrightarrow{OC}-\vec{u}$, $\overrightarrow{OC}+\vec{j}$, puis donner leurs coordonnées.

3. Donner une équation de la droite (AB).

Exercice 2 - On considère le problème de biologie très simplifié d'un animal situé dans une zone où il dispose de deux types de ressource alimentaire R_1 et R_2. La zone contient 5 unités de R_1 et 10 unités de R_2. L'ingestion d'une unité de R_1 apporte à l'animal une quantité d'énergie de 1 ; et, l'ingestion d'une unité de R_2 lui apporte une quantité d'énergie de 2 . Pour ingérer une unité de R_1 l'animal met 2 minutes et pour ingérer une unité de R_2 l'animal met 5 minutes. L'animal dispose de 30 minutes.

C.1.4 Occurrence 4

Exercice 1 - Soient les points $O(0,0)$, $A(2,4)$, $B(4,-3)$ $C(4,4)$ et $D(-2,2)$ et le vecteur $\vec{u}(2,2)$.

1. Placer ces points dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

2. Dessiner les vecteurs suivants : $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{OC}-\vec{u}$, $\overrightarrow{OC}+\vec{j}$, puis donner leurs coordonnées.

3. Donner une équation de la droite passant par B et orthogonale à $\overrightarrow{OA}$.

Exercice 2 - On considère le problème de biologie très simplifié d'un animal situé dans une zone où il dispose de deux types de ressource alimentaire R_1 et R_2. La zone contient 9 unités de R_1 et 8 unités de R_2. L'ingestion d'une unité de R_1 apporte à l'animal une quantité d'énergie de 3 ; et, l'ingestion d'une unité de R_2 lui apporte une quantité d'énergie de 2 . Pour ingérer une unité de R_1 l'animal met 4 minutes et pour ingérer une unité de R_2 l'animal met 3 minutes. L'animal dispose de 48 minutes.

Dans la suite, on appelle x_1 la quantité d'unités de R_1 ingérée par l'animal et x_2 la quantité d'unités de R_2.

1. Pour une quantité x_1 donnée et une quantité x_2 donnée d'unités ingérées, donner l'énergie acquise par l'animal.
2. Traduire les contraintes données ci-dessus en inéquations.
3. Représenter le polygone dont l'intérieur représente l'ensemble de (x_1,x_2) satisfaisant les contraintes.
4. Donner la quantité d'unités de R_1 et la quantité d'unités de R_2 qui maximisent l'énergie que l'animal peut acquérir.

Avec ces quantités, combien d'énergie obtient-il ?

C.1.5 Occurrence 5

Exercice 1 - Soient les points $O(0,0)$, $A(3,4)$, $B(5,4)$ $C(-4,-4)$ et $D(1,3)$ et le vecteur $\vec{u}(3,-3)$.

1. Placer ces points dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

2. Dessiner les vecteurs suivants : $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{OC}-\vec{u}$, $\overrightarrow{OC}-\vec{j}$, puis donner leurs coordonnées.

3. Donner une équation de la droite (AC).

Exercice 2 - On considère le problème de biologie très simplifié d'un animal situé dans une zone où il dispose de deux types de ressource alimentaire R_1 et R_2. La zone contient 10 unités de R_1 et 7 unités de R_2. L'ingestion d'une unité de R_1 apporte à l'animal une quantité d'énergie de 4 ; et, l'ingestion d'une unité de R_2 lui apporte une quantité d'énergie de 1 . Pour ingérer une unité de R_1 l'animal met 5 minutes et pour ingérer une unité de R_2 l'animal met 4 minutes. L'animal dispose de 48 minutes.

Dans la suite, on appelle x_1 la quantité d'unités de R_1 ingérée par l'animal et x_2 la quantité d'unités de R_2.

1. Pour une quantité x_1 donnée et une quantité x_2 donnée d'unités ingérées, donner l'énergie acquise par l'animal.
2. Traduire les contraintes données ci-dessus en inéquations.
3. Représenter le polygone dont l'intérieur représente l'ensemble de (x_1,x_2) satisfaisant les contraintes.
4. Donner la quantité d'unités de R_1 et la quantité d'unités de R_2 qui maximisent l'énergie que l'animal peut acquérir.

Avec ces quantités, combien d'énergie obtient-il ?

C.1.6 Occurrence 6

Exercice 1 - Soient les points $O(0,0)$, $A(-1,3)$, $B(-5,2)$ $C(-3,-3)$ et $D(1,1)$ et le vecteur $\vec{u}(1,1)$.

1. Placer ces points dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

2. Dessiner les vecteurs suivants : $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{AB}-\vec{i}$, $\overrightarrow{OC}-\vec{u}$, $\overrightarrow{OC}+\vec{j}$, puis donner leurs coordonnées.

3. Donner une équation de la droite (AB).

Exercice 2 - On considère le problème de biologie très simplifié d'un animal situé dans une zone où il dispose de deux types de ressource alimentaire R_1 et R_2. La zone contient 5 unités de R_1 et 10 unités de R_2. L'ingestion d'une unité de R_1 apporte à l'animal une quantité d'énergie de 1 ; et, l'ingestion d'une unité de R_2 lui apporte une quantité d'énergie de 2 . Pour ingérer une unité de R_1 l'animal met 2 minutes et pour ingérer une unité de R_2 l'animal met 5 minutes. L'animal dispose de 30 minutes.

Dans la suite, on appelle x_1 la quantité d'unités de R_1 ingérée par l'animal et x_2 la quantité d'unités de R_2.

1. Pour une quantité x_1 donnée et une quantité x_2 donnée d'unités ingérées, donner l'énergie acquise par l'animal.
2. Traduire les contraintes données ci-dessus en inéquations.
3. Représenter le polygone dont l'intérieur représente l'ensemble de (x_1,x_2) satisfaisant les contraintes.
4. Donner la quantité d'unités de R_1 et la quantité d'unités de R_2 qui maximisent l'énergie que l'animal peut acquérir.

Avec ces quantités, combien d'énergie obtient-il ?

C.2 Contrôle des connaissances avancées 1

Programme : Résolution de problèmes de biologie par programmation linéaire.

C.2.1 Occurrence 1

Exercice 1 - On considère le problème de biologie simplifié d'un animal situé dans une zone où il dispose de deux types de ressource alimentaire R_1 et R_2. La zone contient 124 unités de R_1 et 245 unités de R_2. L'ingestion d'une unité de R_1 apporte à l'animal une quantité d'énergie de 5 ; et, l'ingestion d'une unité de R_2 lui apporte une quantité d'énergie de 3 . Pour ingérer une unité de R_1 l'animal met 2 minutes et pour ingérer une unité de R_2 l'animal met 1 minutes. L'animal ne peut absorber que des quantités entières de R_1 et R_2. L'animal dispose de 400 minutes.

Dans la suite, on appelle x_1 la quantité d'unités de R_1 ingérée par l'animal et x_2 la quantité d'unités de R_2.

1. Pour une quantité x_1 donnée et une quantité x_2 donnée d'unités ingérées donner l'énergie acquise par l'animal.
2. Traduire les contraintes données ci-dessus en inéquations.
3. Représenter le polygone dont l'intérieur représente l'ensemble de (x_1, x_2) satisfaisant les contraintes.

4. Donner la quantité d'unités de R_1 et la quantité d'unités de R_2 qui maximisent l'énergie que l'animal peut acquérir.
Avec ces quantités, combien d'énergie obtient-il ?

C.2.2 Occurrence 2

Exercice 1 - On considère le problème de biologie simplifié d'un animal situé dans une zone où il dispose de deux types de ressource alimentaire R_1 et R_2. La zone contient 140 unités de R_1 et 197 unités de R_2. L'ingestion d'une unité de R_1 apporte à l'animal une quantité d'énergie de 5 ; et, l'ingestion d'une unité de R_2 lui apporte une quantité d'énergie de 3 . Pour ingérer une unité de R_1 l'animal met 2 minutes et pour ingérer une unité de R_2 l'animal met 1 minutes. Les caractéristiques physiologiques de l'animal l'oblige à manger au moins autant d'unités de R_1 que d'unités de R_2. L'animal dispose de 370 minutes.

Dans la suite, on appelle x_1 la quantité d'unités de R_1 ingérée par l'animal et x_2 la quantité d'unités de R_2.

1. Pour une quantité x_1 donnée et une quantité x_2 donnée d'unités ingérées donner l'énergie acquise par l'animal.
2. Traduire les contraintes données ci-dessus en inéquations.
3. Représenter le polygone dont l'intérieur représente l'ensemble de (x_1, x_2) satisfaisant les contraintes.

4. Donner la quantité d'unités de R_1 et la quantité d'unités de R_2 qui maximisent l'énergie que l'animal peut acquérir.
Avec ces quantités, combien d'énergie obtient-il ?

C.2.3 Occurrence 3

Exercice 1 - On considère le problème de biologie simplifié d'un animal situé dans une zone où il dispose de deux types de ressource alimentaire R_1 et R_2. La zone contient 124 unités de R_1 et 245 unités de R_2. L'ingestion d'une unité de R_1 apporte à l'animal une quantité d'énergie de 5 ; et, l'ingestion d'une unité de R_2 lui apporte une quantité d'énergie de 3 . Pour ingérer une unité de R_1 l'animal met 2 minutes et pour ingérer une unité de R_2 l'animal met 1 minutes. L'animal ne peut absorber que des quantités entières de R_1 et R_2. L'animal dispose de 400 minutes.

Dans la suite, on appelle x_1 la quantité d'unités de R_1 ingérée par l'animal et x_2 la quantité d'unités de R_2.

1. Pour une quantité x_1 donnée et une quantité x_2 donnée d'unités ingérées donner l'énergie acquise par l'animal.
2. Traduire les contraintes données ci-dessus en inéquations.
3. Représenter le polygone dont l'intérieur représente l'ensemble de (x_1, x_2) satisfaisant les contraintes.

4. Donner la quantité d'unités de R_1 et la quantité d'unités de R_2 qui maximisent l'énergie que l'animal peut acquérir.
Avec ces quantités, combien d'énergie obtient-il ?

C.2.4 Occurrence 4

Exercice 1 - On considère le problème de biologie simplifié d'un animal situé dans une zone où il dispose de deux types de ressource alimentaire R_1 et R_2. La zone contient 137 unités de R_1 et 232 unités de R_2. L'ingestion d'une unité de R_1 apporte à l'animal une quantité d'énergie de 2 ; et, l'ingestion d'une unité de R_2 lui apporte une quantité d'énergie de 3 . Pour ingérer une unité de R_1 l'animal met 2 minutes et pour ingérer une unité de R_2 l'animal met 1 minute. L'animal ne peut absorber que des quantités entières de R_1 et R_2. L'animal dispose de 408 minutes.

Dans la suite, on appelle x_1 la quantité d'unités de R_1 ingérée par l'animal et x_2 la quantité d'unités de R_2.

1. Pour une quantité x_1 donnée et une quantité x_2 donnée d'unités ingérées donner l'énergie acquise par l'animal.
2. Traduire les contraintes données ci-dessus en inéquations.
3. Représenter le polygone dont l'intérieur représente l'ensemble de (x_1, x_2) satisfaisant les contraintes.

4. Donner la quantité d'unités de R_1 et la quantité d'unités de R_2 qui maximisent l'énergie que l'animal peut acquérir.
Avec ces quantités, combien d'énergie obtient-il ?

C.2.5 Occurrence 5

Exercice 1 - On considère le problème de biologie simplifié d'un animal situé dans une zone où il dispose de deux types de ressource alimentaire R_1 et R_2. La zone contient 123 unités de R_1 et 237 unités de R_2. L'ingestion d'une unité de R_1 apporte à l'animal une quantité d'énergie de 2 ; et, l'ingestion d'une unité de R_2 lui apporte une quantité d'énergie de 3 . Pour ingérer une unité de R_1 l'animal met 2 minutes et pour ingérer une unité de R_2 l'animal met 1 minute. L'animal ne peut absorber que des quantités entières de R_1 et R_2. L'animal dispose de 400 minutes.

Dans la suite, on appelle x_1 la quantité d'unités de R_1 ingérée par l'animal et x_2 la quantité d'unités de R_2.

1. Pour une quantité x_1 donnée et une quantité x_2 donnée d'unités ingérées donner l'énergie acquise par l'animal.
2. Traduire les contraintes données ci-dessus en inéquations.
3. Représenter le polygone dont l'intérieur représente l'ensemble de (x_1, x_2) satisfaisant les contraintes.

4. Donner la quantité d'unités de R_1 et la quantité d'unités de R_2 qui maximisent l'énergie que l'animal peut acquérir. Avec ces quantités, combien d'énergie obtient-il ?

C.2.6 Occurrence 6

Exercice 1 - On considère le problème de biologie simplifié d'un animal situé dans une zone où il dispose de deux types de ressource alimentaire R_1 et R_2. La zone contient 124 unités de R_1 et 245 unités de R_2. L'ingestion d'une unité de R_1 apporte à l'animal une quantité d'énergie de 5 ; et, l'ingestion d'une unité de R_2 lui apporte une quantité d'énergie de 3 . Pour ingérer une unité de R_1 l'animal met 2 minutes et pour ingérer une unité de R_2 l'animal met 1 minutes. L'animal ne peut absorber que des quantités entières de R_1 et R_2. L'animal dispose de 400 minutes.

Dans la suite, on appelle x_1 la quantité d'unités de R_1 ingérée par l'animal et x_2 la quantité d'unités de R_2.

1. Pour une quantité x_1 donnée et une quantité x_2 donnée d'unités ingérées donner l'énergie acquise par l'animal.
2. Traduire les contraintes données ci-dessus en inéquations.
3. Représenter le polygone dont l'intérieur représente l'ensemble de (x_1, x_2) satisfaisant les contraintes.

4. Donner la quantité d'unités de R_1 et la quantité d'unités de R_2 qui maximisent l'énergie que l'animal peut acquérir. Avec ces quantités, combien d'énergie obtient-il ?

C.3 Contrôle des connaissances de base 2

Programme : Suites. Démonstration par récurrence. Calculs simples de limites.

C.3.1 Occurrence 1

Exercice 1 - Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par u_0 et la formule de récurrence $u_{n+1} = u_n^2$.

1. Sur un graphique, tracer la courbe représentative de la fonction : $x \mapsto x^2$ dans un repère orthonormé. Sur ce graphique représenter les 3 premiers termes (u_0, u_1 et u_2) de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque $u_0 = 2$. Sur ce même graphique représenter les 3 premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque $u_0 = 1/2$.

2. Démontrer par récurrence que si $u_0 \geq 2$ alors, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 2$ et $u_n \geq n$.

3. Déduire de la question précédente $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$, lorsque $u_0 \geq 2$.

Remarque : La rédaction des réponses aux questions 2 et 3 est un élément d'appréciation très important.

Exercice 2 - Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 2$ et la formule de récurrence $u_{n+1} = 4u_n$.

1. Pour tout entier n, donner la formule exprimant u_n en fonction de n.

2. Trouver le rang à partir duquel les termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont supérieurs ou égaux à 75 .

C.3.2 Occurrence 2

Exercice 1 - Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par u_0 et la formule de récurrence $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2}{4}$.

1. Sur un graphique, tracer la courbe représentative de la fonction : $x \mapsto \dfrac{x^2}{4}$ dans un repère orthonormé. Sur ce graphique représenter les 4 premiers termes (u_0, u_1, u_2 et u_3) de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque $u_0 = 4{,}1$.

2. Démontrer par récurrence que si $u_0 \geq 8$ alors, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 8$ et $u_n \geq n$.

3. Déduire de la question précédente $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$, lorsque $u_0 \geq 8$.

Remarque : La rédaction des réponses aux questions 2 et 3 est un élément d'appréciation très important.

C.3.3 Occurrence 3

Exercice 1 - Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par u_0 et la formule de récurrence $u_{n+1} = u_n^3 + u_n$.

1. Sur un graphique, tracer la courbe représentative de la fonction : $x \mapsto x^3 + x$ dans un repère orthonormé. Sur ce graphique représenter les 3 premiers termes (u_0, u_1 et u_2) de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque $u_0 = 1$.

2. Démontrer par récurrence que si $u_0 \geq 1$ alors, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 1$ et $u_n \geq n$.

3. Déduire de la question précédente $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$, lorsque $u_0 \geq 1$.

Remarque : La rédaction des réponses aux questions 2 et 3 est un élément d'appréciation très important.

Exercice 2 - Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 3$ et la formule de récurrence $u_{n+1} = 3u_n$.

1. Pour tout entier n, donner la formule exprimant u_n en fonction de n.

2. Trouver le rang à partir duquel les termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont supérieurs ou égaux à 189.

C.3.4 Occurrence 4

Exercice 1 - Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par u_0 et la formule de récurrence $u_{n+1} = u_n^2 + u_n$.

1. Sur un graphique, tracer la courbe représentative de la fonction : $x \mapsto x^2 + x$ dans un repère orthonormé. Sur ce graphique représenter les 3 premiers termes (u_0, u_1 et u_2) de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque $u_0 = 1$.

2. Démontrer par récurrence que si $u_0 \geq 1$ alors, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 1$ et $u_n \geq n$.

3. Déduire de la question précédente $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$, lorsque $u_0 \geq 1$.

Remarque : La rédaction des réponses aux questions 2 et 3 est un élément d'appréciation très important.

Exercice 2 - Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 3$ et la formule de récurrence $u_{n+1} = 4u_n$.

1. Pour tout entier n, donner la formule exprimant u_n en fonction de n.

2. Trouver le rang à partir duquel les termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont supérieurs ou égaux à 760.

C.3.5 Occurrence 5

Exercice 1 - Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par u_0 et la formule de récurrence $u_{n+1} = u_n^2 + u_n$.

1. Sur un graphique, tracer la courbe représentative de la fonction : $x \mapsto x^2 + x$ dans un repère orthonormé. Sur ce graphique représenter les 3 premiers termes (u_0, u_1 et u_2) de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque $u_0 = 1$.

2. Démontrer par récurrence que si $u_0 \geq 1$ alors, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 1$ et $u_n \geq n$.

3. Déduire de la question précédente $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$, lorsque $u_0 \geq 1$.

Remarque : La rédaction des réponses aux questions 2 et 3 est un élément d'appréciation très important.

Exercice 2 - Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 4$ et la formule de récurrence $u_{n+1} = 7u_n$.

1. Pour tout entier n, donner la formule exprimant u_n en fonction de n.

2. Trouver le rang à partir duquel les termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont supérieurs ou égaux à 5077.

C.3.6 Occurrence 6

Exercice 1 - Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par u_0 et la formule de récurrence $u_{n+1} = u_n^3 + u_n$.

1. Sur un graphique, tracer la courbe représentative de la fonction : $x \mapsto x^3 + x$ dans un repère orthonormé. Sur ce graphique représenter les 3 premiers termes (u_0, u_1 et u_2) de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque $u_0 = 1$.

2. Démontrer par récurrence que si $u_0 \geq 1$ alors, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 1$ et $u_n \geq n$.

3. Déduire de la question précédente $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$, lorsque $u_0 \geq 1$.

Remarque : La rédaction des réponses aux questions 2 et 3 est un élément d'appréciation très important.

Exercice 2 - Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 4$ et la formule de récurrence $u_{n+1} = 7u_n$.
1. Pour tout entier n, donner la formule exprimant u_n en fonction de n.
2. Trouver le rang à partir duquel les termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont supérieurs ou égaux à 5077.

C.4 Contrôle des connaissances avancées 2

Programme : Manipulation des suites. Application à des calculs en biologie.

C.4.1 Occurrence 1

Exercice 1 - Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \geq 0$ et la formule de récurrence $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$.
1. Sur un graphique, tracer la courbe représentative de la fonction $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ définie par $g(x) = \sqrt{x}$ dans un repère orthonormé. Sur ce graphique représenter les 4 premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque $u_0 = 3$. Sur ce même graphique représenter les 4 premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque $u_0 = 1/3$.
2. Quels sont les nombres réels qui pourraient être limites de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
3. Quel est le comportement de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque $u_0 = 0$?
4. Résoudre sur $\mathbb{R}^+$ les deux inéquations suivantes : $\sqrt{x} \leq x$ et $\sqrt{x} \geq x$.
5. Démontrer que si $0 < u_0 \leq 1$, la suite est croissante et majorée par 1. Déduire qu'alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.
6. En vous inspirant du schéma de la démonstration suggéré dans la question précédente, déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ lorsque de $u_0 > 1$.

C.4.2 Occurrence 2

Exercice 1 - Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \geq 0$ et la formule de récurrence $u_{n+1} = 2\sqrt{u_n}$.
1. Sur un graphique, tracer la courbe représentative de la fonction $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ définie par $g(x) = 2\sqrt{x}$ dans un repère orthonormé. Sur ce graphique représenter les 4 premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque $u_0 = 5$. Sur ce même graphique représenter les 4 premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque $u_0 = 3$.
2. Quels sont les nombres réels qui pourraient être limites de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
3. Quel est le comportement de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque $u_0 = 0$?
4. Résoudre sur $\mathbb{R}^+$ les deux inéquations suivantes : $2\sqrt{x} \leq x$ et $2\sqrt{x} \geq x$.
5. Démontrer que si $0 < u_0 \leq 4$, la suite est croissante et majorée par 4. Déduire qu'alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.
6. En vous inspirant du schéma de la démonstration suggéré dans la question précédente, déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ lorsque de $u_0 > 4$.

C.4.3 Occurrence 3

Exercice 1 - Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \geq 0$ et la formule de récurrence $u_{n+1} = \frac{3}{2}\sqrt{u_n}$.
1. Sur un graphique, tracer la courbe représentative de la fonction $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ définie par $g(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x}$ dans un repère orthonormé. Sur ce graphique représenter les 4 premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque $u_0 = 3$. Sur ce même graphique représenter les 4 premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque $u_0 = 2$.
2. Quels sont les nombres réels qui pourraient être limites de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
3. Quel est le comportement de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque $u_0 = 0$?
4. Résoudre sur $\mathbb{R}^+$ les deux inéquations suivantes : $\frac{3}{2}\sqrt{x} \leq x$ et $\frac{3}{2}\sqrt{x} \geq x$.
5. Démontrer que si $0 < u_0 \leq \frac{9}{4}$, la suite est croissante et majorée par $\frac{9}{4}$. Déduire qu'alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.
6. En vous inspirant du schéma de la démonstration suggéré dans la question précédente, déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ lorsque de $u_0 > \frac{9}{4}$.

C.4.4 Occurrence 4

Exercice 1 - Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \geq 0$ et la formule de récurrence $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$.

1. Sur un graphique, tracer la courbe représentative de la fonction $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ définie par $g(x) = \sqrt{x}$ dans un repère orthonormé. Sur ce graphique représenter les 4 premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque $u_0 = 3$. Sur ce même graphique représenter les 4 premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque $u_0 = 1/3$.

2. Quels sont les nombres réels qui pourraient être limites de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

3. Quel est le comportement de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque $u_0 = 0$?

4. Résoudre sur $\mathbb{R}^+$ les deux inéquations suivantes : $\sqrt{x} \leq x$ et $\sqrt{x} \geq x$.

5. Démontrer que si $0 < u_0 \leq 1$, la suite est croissante et majorée par 1. Déduire qu'alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

6. En vous inspirant du schéma de la démonstration suggéré dans la question précédente, déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ lorsque de $u_0 > 1$.

C.4.5 Occurrence 5

Exercice 1 - Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \geq 0$ et la formule de récurrence $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$.

1. Sur un graphique, tracer la courbe représentative de la fonction $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ définie par $g(x) = \sqrt{x}$ dans un repère orthonormé. Sur ce graphique représenter les 4 premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque $u_0 = 3$. Sur ce même graphique représenter les 4 premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque $u_0 = 1/3$.

2. Quels sont les nombres réels qui pourraient être limites de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

3. Quel est le comportement de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque $u_0 = 0$?

4. Résoudre sur $\mathbb{R}^+$ les deux inéquations suivantes : $\sqrt{x} \leq x$ et $\sqrt{x} \geq x$.

5. Démontrer que si $0 < u_0 \leq 1$, la suite est croissante et majorée par 1. Déduire qu'alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

6. En vous inspirant du schéma de la démonstration suggéré dans la question précédente, déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ lorsque de $u_0 > 1$.

C.4.6 Occurrence 6

Exercice 1 - Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \geq 0$ et la formule de récurrence $u_{n+1} = \frac{3}{2}\sqrt{u_n}$.

1. Sur un graphique, tracer la courbe représentative de la fonction $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ définie par $g(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x}$ dans un repère orthonormé. Sur ce graphique représenter les 4 premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque $u_0 = 3$. Sur ce même graphique représenter les 4 premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque $u_0 = 2$.

2. Quels sont les nombres réels qui pourraient être limites de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

3. Quel est le comportement de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque $u_0 = 0$?

4. Résoudre sur $\mathbb{R}^+$ les deux inéquations suivantes : $\frac{3}{2}\sqrt{x} \leq x$ et $\frac{3}{2}\sqrt{x} \geq x$.

5. Démontrer que si $0 < u_0 \leq \frac{9}{4}$, la suite est croissante et majorée par $\frac{9}{4}$. Déduire qu'alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

6. En vous inspirant du schéma de la démonstration suggéré dans la question précédente, déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ lorsque de $u_0 > \frac{9}{4}$.

C.5 Contrôle des connaissances de base 3

Programme : Domaine de définition d'une fonction. Calculs simples de limites. Calculs simples de dérivées. Étude de fonctions simples.

C.5.1 Occurrence 1

Exercice 1 - Donner le domaine de définition et calculer la dérivée des fonctions suivantes :

$$1 : x \mapsto 5x^2 + \ln(x); \quad 2 : x \mapsto \frac{x^3+4}{x+1}; \quad 3 : x \mapsto \cos(x^5 - 2)$$

Exercice 2 - Calculer les limites suivantes :

$$1: \lim_{x\to -6} x^2+4+e^x; \quad 2: \lim_{x\to+\infty} 5x^2-x; \quad 3: \lim_{x\to+\infty} \frac{5x^6+5x^2+6}{-2x^2-1}; \quad 4: \lim_{x\to 4} \frac{x^2-16}{x-4};$$
$$5: \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} x^4\ln(x); \quad 6: \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2x}}{x^3}; \quad 7: \lim_{x\to-\infty} x^6e^x; \quad 8: \lim_{x\to+\infty} x^4e^{-x}$$

Exercice 3 - Étudiez la fonction suivante :

$$\begin{aligned} f: [0,\sqrt{2\pi}] &\to \mathbb{R}, \\ x &\mapsto \sin(x^2). \end{aligned}$$

C.5.2 Occurrence 2

Exercice 1 - Donner le domaine de définition et calculer la dérivée des fonctions suivantes :

$$1: x\mapsto 4x^2+\ln(x); \quad 2: x\mapsto \frac{x^3+3}{x+1}; \quad 3: x\mapsto \sin(x^5+2)$$

Exercice 2 - Calculer les limites suivantes :

$$1: \lim_{x\to 5} x^2+3+e^x; \quad 2: \lim_{x\to+\infty} 5x^2-x; \quad 3: \lim_{x\to+\infty} \frac{4x^6+4x^2+5}{-2x^2-1}; \quad 4: \lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x-3};$$
$$5: \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} x^3\ln(x); \quad 6: \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2x}}{x^3}; \quad 7: \lim_{x\to-\infty} x^5e^x; \quad 8: \lim_{x\to+\infty} x^3e^{-x}$$

Exercice 3 - Étudiez la fonction suivante :

$$\begin{aligned} f: [0,\sqrt{2\pi}] &\to \mathbb{R}, \\ x &\mapsto \cos(x^2). \end{aligned}$$

C.5.3 Occurrence 3

Exercice 1 - Donner le domaine de définition et calculer la dérivée des fonctions suivantes :

$$1: x\mapsto 6x^2+\cos(x); \quad 2: x\mapsto \frac{x^3+5}{x+3}; \quad 3: x\mapsto \exp(x^5+2)$$

Exercice 2 - Calculer les limites suivantes :

$$1: \lim_{x\to 5} x^2+5+e^x; \quad 2: \lim_{x\to+\infty} 5x^2-x; \quad 3: \lim_{x\to+\infty} \frac{6x^6+6x^2+5}{-2x^2-1}; \quad 4: \lim_{x\to 5} \frac{x-5}{x^2-25};$$
$$5: \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} x^5\ln(x); \quad 6: \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2x}}{x^3}; \quad 7: \lim_{x\to-\infty} x^5e^x; \quad 8: \lim_{x\to+\infty} x^5e^{-x}$$

Exercice 3 - Étudiez la fonction suivante :

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\to \mathbb{R}, \\ x &\mapsto xe^{x^2}. \end{aligned}$$

C.5.4 Occurrence 4

Exercice 1 - Donner le domaine de définition et calculer la dérivée des fonctions suivantes :

$$1: x\mapsto 6x^2+\cos(x); \quad 2: x\mapsto \frac{x^3+3}{x+3}; \quad 3: x\mapsto \exp(x^5+2).$$

Exercice 2 - Calculer les limites suivantes :

$$1: \lim_{x\to 5} x^2+3+e^x; \quad 2: \lim_{x\to+\infty} 5x^3-x; \quad 3: \lim_{x\to+\infty} \frac{6x^6+6x^2+5}{-2x^2-1}; \quad 4: \lim_{x\to 3} \frac{x-3}{x^2-9};$$
$$5: \lim_{x \overset{>}{\to} 0} x^3\ln(x); \quad 6: \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2x}}{x^3}; \quad 7: \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^5}; \quad 8: \lim_{x\to+\infty} x^3e^{-x}.$$

Exercice 3 - Étudiez la fonction suivante :

$$f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}, \\ x & \mapsto & xe^{x^2}. \end{array}$$

C.5.5 Occurrence 5

Exercice 1 - Donner le domaine de définition et calculer la dérivée des fonctions suivantes :

$$1: x\mapsto 3x^2+\cos(x); \quad 2: x\mapsto \frac{x^3+2}{x+3}; \quad 3: x\mapsto \exp(x^4-2).$$

Exercice 2 - Calculer les limites suivantes :

$$1: \lim_{x\to 5} x^2+2+e^x; \quad 2: \lim_{x\to+\infty} 5x^3-x; \quad 3: \lim_{x\to+\infty} \frac{-3x^6+3x^2+5}{2x^2-1}; \quad 4: \lim_{x\to 2} \frac{x-2}{x^2-4};$$
$$5: \lim_{x \overset{>}{\to} 0} x^2\ln(x); \quad 6: \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2x}}{x^3}; \quad 7: \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^5}; \quad 8: \lim_{x\to+\infty} x^2e^{-x}.$$

Exercice 3 - Étudiez la fonction suivante :

$$f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}, \\ x & \mapsto & x^2e^{x}. \end{array}$$

C.5.6 Occurrence 6

Exercice 1 - Donner le domaine de définition et calculer la dérivée des fonctions suivantes :

$$1: x\mapsto 3x^2+\cos(x); \quad 2: x\mapsto \frac{x^3+3}{x+3}; \quad 3: x\mapsto \exp(x^3+2).$$

Exercice 2 - Calculer les limites suivantes :

$$1: \lim_{x\to 8} x^2+3+e^x; \quad 2: \lim_{x\to+\infty} 5x^3-x; \quad 3: \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^6+3x^2+8}{-2x^2-1}; \quad 4: \lim_{x\to 3} \frac{x-3}{x^2-9};$$
$$5: \lim_{x \overset{>}{\to} 0} x^3\ln(x); \quad 6: \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2x}}{x^3}; \quad 7: \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^8}; \quad 8: \lim_{x\to+\infty} x^3e^{-x}.$$

Exercice 3 - Étudiez la fonction suivante :

$$f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}, \\ x & \mapsto & x^2e^{x^2}. \end{array}$$

C.6 Contrôle des connaissances avancées 3

Programme : Calculs de limites. Calculs de dérivées. Étude de fonctions. Bijection réciproque.

C.6.1 Occurrence 1

Exercice 1 - Soit f la fonction définie par

$$\begin{aligned} f(x) &= x\sin(x) \text{ si } x < 0, \\ &= x^2 \text{ si } x \geq 0. \end{aligned}$$

1. Quel est le domaine de définition D_f de f.
2. En quels points de D_f la fonction f est-elle continue ?
3. La fonction f est-elle dérivable en tout point de $\mathbb{R}^*$? Pourquoi ?
4. La fonction f est-elle dérivable en 0 ? Si oui, donner la valeur $f'(0)$.

Exercice 2 - Calculer les limites suivantes

$$1: \lim_{x\to 0} \frac{3x}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}; \quad 2: \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\cos(x)} \sin\left(\frac{\cos(x)}{x}\right).$$

Exercice 2 - Calculer la dérivée de la fonction suivante : $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{\cos(x^3)+5}\, e^x$.

C.6.2 Occurrence 2

Exercice 1 - Soit f la fonction définie par $f(x) = \ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$.
1. Déterminer $\mathcal{D}_f$ l'ensemble de définition de f. Montrer que f est impaire.
2. Calculer les limites de f aux bornes de $\mathcal{D}_f$. En déduire l'existence d'éventuelles asymptotes.
3. Déterminer le(s) antécédent(s) de 2 par f. Déterminer le(s) antécédent(s) de -2 par f.

Exercice 3 - Soit la fonction

$$\begin{aligned} f : [0,1] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{1}{x^2+1} \end{aligned}$$

1. Calculer la dérivée de f sur $[0,1]$.
2. Déterminer l'intervalle I tel que f est une bijection de $[0,1]$ sur I.
3. Exprimer la bijection réciproque f^{-1} de f de I sur $[0,1]$.

C.6.3 Occurrence 3

Exercice 1 - Soit f la fonction définie par

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\sin(x^3)}{x} && \text{si } x < 0, \\ &= x^2 && \text{si } x \geq 0. \end{aligned}$$

1. Quel est le domaine de définition D_f de f.
2. En quels points de D_f la fonction f est-elle continue ?
3. La fonction f est-elle dérivable en tout point de $\mathbb{R}^*$? Pourquoi ?
4. La fonction f est-elle dérivable en 0 ? Si oui, donner la valeur $f'(0)$.

Exercice 2 - Soit la fonction

$$\begin{aligned} f : [0,1] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \ln(x^2+1) \end{aligned}$$

1. Calculer la dérivée de f sur $[0,1]$.
2. Déterminer l'intervalle I tel que f est une bijection de $[0,1]$ sur I.
3. Exprimer la bijection réciproque f^{-1} de f de I sur $[0,1]$.

C.6.4 Occurrence 4

Exercice 1 - Soit f la fonction définie par

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\sin(x^4)}{x^2} \quad \text{si } x < 0, \\ &= x^2 \qquad\quad \text{si } x \geq 0. \end{aligned}$$

1. Quel est le domaine de définition D_f de f.
2. En quels points de D_f la fonction f est-elle continue ?
3. La fonction f est-elle dérivable en tout point de $\mathbb{R}^*$? Pourquoi ?
4. La fonction f est-elle dérivable en 0 ? Si oui, donner la valeur $f'(0)$.

Exercice 2 - Soit la fonction

$$\begin{aligned} f : [0, 5] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \ln(x+1) \end{aligned}$$

1. Calculer la dérivée de f sur $[0, 5]$.
2. Déterminer l'intervalle I tel que f est une bijection de $[0, 5]$ sur I.
3. Exprimer la bijection réciproque f^{-1} de f de I sur $[0, 5]$.

C.6.5 Occurrence 5

Exercice 1 - Soit f la fonction définie par

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\sin(x^3)}{x} \quad \text{si } x < 0, \\ &= x^2 \qquad\quad \text{si } x \geq 0. \end{aligned}$$

1. Quel est le domaine de définition D_f de f.
2. En quels points de D_f la fonction f est-elle continue ?
3. La fonction f est-elle dérivable en tout point de $\mathbb{R}^*$? Pourquoi ?
4. La fonction f est-elle dérivable en 0 ? Si oui, donner la valeur $f'(0)$.

Exercice 2 - Soit la fonction

$$\begin{aligned} f : [1, 3] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sqrt{x^3+1} \end{aligned}$$

1. Calculer la dérivée de f sur $[1, 3]$.
2. Déterminer l'intervalle I tel que f est une bijection de $[1, 3]$ sur I.
3. Exprimer la bijection réciproque f^{-1} de f de I sur $[1, 3]$.

C.6.6 Occurrence 6

Exercice 1 - Calculer les limites suivantes

$$1: \lim_{x \to 0} \frac{4x}{\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x}}; \quad 2: \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\sin(x)} \sin\left(\frac{\sin(x)}{x}\right).$$

Exercice 2 - Soit la fonction

$$\begin{aligned} f : \left[0, \sqrt{\frac{\pi}{2}}\right[&\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \tan(x^2) \end{aligned}$$

1. Calculer la dérivée de f sur $[0, \sqrt{\frac{\pi}{2}}[$.
2. Déterminer l'intervalle I tel que f est une bijection de $[0, \sqrt{\frac{\pi}{2}}[$ sur I.
3. Exprimer la bijection réciproque f^{-1} de f de I sur $[0, \sqrt{\frac{\pi}{2}}[$.

Exercice 3 - La fonction $x \mapsto |x|$ est-elle dérivable en 0 ? (La réponse doit être justifiée.)

C.7 Contrôle des connaissances de base 4

Programme : Calcul d'intégrales simples. Manipulation de l'intégration par parties et des changements de variables sur des exemples simples. Calculs de limites avec des développements limités.

C.7.1 Occurrence 1

Exercice 1 - Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_3^6 \frac{1}{t}\,dt\,,\quad \int_{\sqrt{\pi/6}}^{\sqrt{\pi/3}} 2x\sin(x^2)\,dx\,,\quad \int_3^6 \frac{5}{1+t^2}\,dt\,,\quad \int_1^2 2x\sin(x^3)\,dx\,.$$

Exercice 2 - En effectuant une intégration par parties, calculer $\int_1^4 x\cos(x)\,dx$.

Exercice 3 - En effectuant le changement de variables : $x = e^s$, calculer

$$\int_1^4 \cos(e^s)\,e^s\,ds.$$

C.7.2 Occurrence 2

Exercice 1 - Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_3^6 \frac{-1}{t^2}\,dt\,,\quad \int_1^2 2x\exp(x^2)\,dx\,,\quad \int_3^6 \frac{6}{1+t^2}\,dt\,,\quad \int_{\sqrt{\pi/6}}^{\sqrt{\pi/3}} 7x\sin(x^2)\,dx\,.$$

Exercice 2 - En effectuant une intégration par parties, calculer $\int_1^4 x\sin(x)\,dx$.

Exercice 3 - En effectuant le changement de variables : $x = \cos(s)$, calculer

$$\int_1^4 \cos(\cos(s))\,\sin(s)\,ds.$$

C.7.3 Occurrence 3

Exercice 1 - Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_3^6 \frac{1}{t}\,dt\,,\quad \int_{\sqrt{\pi/6}}^{\sqrt{\pi/2}} 2x\cos(x^2)\,dx\,,\quad \int_3^6 \frac{3}{1+t^2}\,dt\,,\quad \int_0^1 7x\exp(x^2)\,dx\,.$$

Exercice 2 - En effectuant une intégration par parties, calculer $\int_1^2 x\cos(x)\,dx$.

Exercice 3 - En effectuant le changement de variables : $x = \cos(s)$, calculer

$$\int_1^2 \cos(\cos(s))\,\sin(s)\,ds.$$

C.7.4 Occurrence 4

Exercice 1 - Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_3^6 \frac{1}{t^3}\,dt\,,\quad \int_{\sqrt{\pi/6}}^{\sqrt{\pi/2}} 2x\sin(x^2)\,dx\,,\quad \int_3^6 \frac{8}{1+t^2}\,dt\,,\quad \int_0^1 7x\cos(x^2)\,dx\,.$$

Exercice 2 - En effectuant une intégration par parties, calculer $\int_1^2 xe^x\,dx$.

Exercice 3 - En effectuant le changement de variables : $x = \cos(s)$, calculer

$$\int_5^7 \cos(\cos(s))\,\sin(s)\,ds.$$

C.7.5 Occurrence 5

Exercice 1 - Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_3^6 \frac{1}{t}\,dt\,,\quad \int_3^6 \frac{1}{t^4}\,dt\,,\quad \int_{\sqrt{\pi/6}}^{\sqrt{\pi/2}} 2x\cos(x^2)\,dx\,,\quad \int_3^6 \frac{8}{1+t^2}\,dt\,,\quad \int_0^1 3x\sin(x^2)\,dx\,.$$

Exercice 2 - En effectuant une intégration par parties, calculer $\int_1^2 x\sin(x)\,dx$.

Exercice 3 - En effectuant le changement de variables : $x = \cos(s)$, calculer

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos(\cos(s))\,\sin(s)\,ds.$$

C.7.6 Occurrence 6

Exercice 1 - Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_3^6 \frac{1}{t}\,dt\,,\quad \int_3^6 \frac{1}{t^3}\,dt\,,\quad \int_{\sqrt{\pi/6}}^{\sqrt{\pi/2}} 2x\cos(x^2)\,dx\,,\quad \int_3^6 \frac{2}{1+t^2}\,dt\,,\quad \int_0^1 3x\cos(x^2)\,dx\,.$$

Exercice 2 - En effectuant une intégration par parties, calculer $\int_1^2 xe^x\,dx$.

Exercice 3 - En effectuant le changement de variables : $x = \cos(s)$, calculer

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin(\cos(s))\,\sin(s)\,ds.$$

C.8 Contrôle des connaissances avancées 4

Programme : Calculs d'intégrales. Étude d'extrema.

C.8.1 Occurrence 1

Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \ln(\frac{x+1}{x^2+3})\ .$$

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de f.

2. Montrer que $f'(x) = \frac{-x^2-2x+3}{(x^2+3)(x+1)}$.

3. Trouver 3 constantes A, B et C telles que : $\frac{-x^3-2x^2+3x}{(x^2+3)(x+1)} = \frac{A}{x^2+3} + \frac{B}{x+1} + C$.

4. Rappeler quelles sont les primitives de la fonction $\frac{1}{x^2+1}$.

5. Si F est une primitive de f, si a est un réel non nul, montrer que la fonction G définie par

$$G(x) = \frac{1}{a}F(ax),$$

est une primitive de la fonction g définie par

$$g(x) = f(ax).$$

6. Déduire des questions 4 et 5 une primitive de $\frac{6}{x^2+3}$.

7. En déduire $\int_0^1 f(x)\,dx$ en effectuant une intégration par parties.

C.8.2 Occurrence 2

1. Trouver 3 constantes A, B et C telles que : $\dfrac{-x^3-2x^2+3x}{(x^2+3)(x+1)} = \dfrac{A}{x^2+3} + \dfrac{B}{x+1} + C$.

2. Rappeler quelles sont les primitives de la fonction $\dfrac{1}{x^2+1}$.

3. Si F est une primitive de f, et si a et b sont deux réels non nuls, montrer que la fonction G définie par

$$G(x) = \frac{b}{a} \times F(ax),$$

est une primitive de la fonction g définie par

$$g(x) = b \times f(ax).$$

4. Déterminer les deux constantes a et b telles que $\dfrac{6}{x^2+3} = b \times \dfrac{1}{(ax)^2+1}$.

5. Déduire des questions 2, 3 et 4 une primitive de $\dfrac{6}{x^2+3}$.

6. En déduire $\displaystyle\int_0^1 \frac{-x^3-2x^2+3x}{(x^2+3)(x+1)}\,dx$.

C.8.3 Occurrence 3

Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \ln(\frac{x+1}{x^2+3}) .$$

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de f.

2. Montrer que $f'(x) = \dfrac{-x^2-2x+3}{(x^2+3)(x+1)}$.

3. Trouver 3 constantes A, B et C telles que : $\dfrac{-x^3-2x^2+3x}{(x^2+3)(x+1)} = \dfrac{A}{x^2+3} + \dfrac{B}{x+1} + C$.

4. Rappeler quelles sont les primitives de la fonction $\dfrac{1}{x^2+1}$.

5. Si F est une primitive de f, et si a et b sont deux réels non nuls, montrer que la fonction G définie par

$$G(x) = \frac{b}{a} \times F(ax),$$

est une primitive de la fonction g définie par

$$g(x) = b \times f(ax).$$

6. Déterminer les deux constantes a et b telles que $\dfrac{6}{x^2+3} = b \times \dfrac{1}{(ax)^2+1}$.

7. Déduire des questions 2, 3 et 4 une primitive de $\dfrac{6}{x^2+3}$.

8. En déduire $\displaystyle\int_0^1 \frac{-x^3-2x^2+3x}{(x^2+3)(x+1)}\,dx$.

9. En déduire $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ en effectuant une intégration par parties.

C.8.4 Occurrence 4

Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \ln(\frac{x+1}{x^2+3}) .$$

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de f.

2. Montrer que $f'(x) = \dfrac{-x^2-2x+3}{(x^2+3)(x+1)}$.

3. Trouver 3 constantes A, B et C telles que : $\dfrac{-x^3-2x^2+3x}{(x^2+3)(x+1)} = \dfrac{A}{x^2+3} + \dfrac{B}{x+1} + C$.

4. Rappeler quelles sont les primitives de la fonction $\dfrac{1}{x^2+1}$.

5. Si F est une primitive de f, et si a et b sont deux réels non nuls, montrer que la fonction G définie par

$$G(x) = \frac{b}{a} \times F(ax),$$

est une primitive de la fonction g définie par

$$g(x) = b \times f(ax).$$

6. Déterminer les deux constantes a et b telles que $\dfrac{6}{x^2+3} = b \times \dfrac{1}{(ax)^2+1}$.

7. Déduire des questions 2, 3 et 4 une primitive de $\dfrac{6}{x^2+3}$.

8. En déduire $\displaystyle\int_0^1 \frac{-x^3-2x^2+3x}{(x^2+3)(x+1)}\,dx$.

9. En déduire $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ en effectuant une intégration par parties.

C.8.5 Occurrence 5

Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x^2+3}\right).$$

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de f.

2. Montrer que $f'(x) = \dfrac{-x^2-2x+3}{(x^2+3)(x+1)}$.

3. Trouver 3 constantes A, B et C telles que : $\dfrac{-x^3-2x^2+3x}{(x^2+3)(x+1)} = \dfrac{A}{x^2+3} + \dfrac{B}{x+1} + C$.

4. Rappeler quelles sont les primitives de la fonction $\dfrac{1}{x^2+1}$.

5. Si F est une primitive de f, si a est un réel non nul, montrer que la fonction G définie par

$$G(x) = \frac{1}{a}F(ax),$$

est une primitive de la fonction g définie par

$$g(x) = f(ax).$$

6. Déduire des questions 4 et 5 une primitive de $\dfrac{6}{x^2+3}$.

7. En déduire $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ en effectuant une intégration par parties.

C.9 Contrôle des connaissances de base 5

Programme : Résolution d'équations différentielles simples du premier et du second ordre.

C.9.1 Occurrence 1

Exercice 1 - On considère l'équation différentielle ordinaire suivante :

$$y' + (1+t)y = t^3 + t^2 + 2t, \tag{C.9.1.1}$$

et son edo sans second membre associée :

$$y' + (1+t)y = 0. \tag{C.9.1.2}$$

1. Donner l'ensemble des solutions de (C.9.1.2).

2. Démontrer que la fonction $t \mapsto t^2$ est une solution particulière de (C.9.1.1).

3. Donner l'ensemble des solutions de (C.9.1.1)

4. Donner la solution $y(t)$ de (C.9.1.1) tel que $y(0) = 2$.

Exercice 2 - Démontrer que la fonction $t \mapsto e^{-2t}$ (définie sur $\mathbb{R}$) est une solution de l'équation différentielle ordinaire suivante :

$$2y'' + 5y' + 2y = 0\,.$$

C.9.2 Occurrence 2

Exercice 1 - On considère l'équation différentielle ordinaire suivante :

$$y' + (1 - t^2)y = -e^t(t^3 - 2t - 1), \tag{C.9.2.1}$$

et son edo sans second membre associée :

$$y' + (1 - t^2)y = 0. \tag{C.9.2.2}$$

1. Donner l'ensemble des solutions de (C.9.2.2).
2. Démontrer que la fonction $t \mapsto te^t$ est une solution particulière de (C.9.2.1).
3. Donner l'ensemble des solutions de (C.9.2.1)
4. Donner la solution $y(t)$ de (C.9.2.1) tel que $y(0) = 2$.

Exercice 2 - Donner l'ensemble des solutions de l'équation différentielle ordinaire suivante :

$$2y'' + 5y' + 2y = 0\,.$$

C.9.3 Occurrence 3

Exercice 1 - On considère l'équation différentielle ordinaire suivante :

$$y' - \cos(t)y = \sin(t) + t\cos(t)(1 - \sin(t)), \tag{C.9.3.1}$$

et son edo sans second membre associée :

$$y' - \cos(t)y = 0. \tag{C.9.3.2}$$

1. Donner l'ensemble des solutions de (C.9.3.2).
2. Démontrer que la fonction $t \mapsto t\sin(t)$ est une solution particulière de (C.9.3.1).
3. Donner l'ensemble des solutions de (C.9.3.1).
4. Donner la solution $y(t)$ de (C.9.1.1) tel que $y(0) = 2$.

Exercice 2 - Donner l'ensemble des solutions de l'équation différentielle ordinaire suivante :

$$y'' + 2y' + y = 0\,.$$

C.9.4 Occurrence 4

Exercice 1 - On considère l'équation différentielle ordinaire suivante :

$$y' + (1 + t)y = t\cos(t) - \sin(t) + \cos(t), \tag{C.9.4.1}$$

et son edo sans second membre associée :

$$y' + (1 + t)y = 0. \tag{C.9.4.2}$$

1. Donner l'ensemble des solutions de (C.9.4.2).
2. Démontrer que la fonction $t \mapsto \cos(t)$ est une solution particulière de (C.9.4.1).
3. Donner l'ensemble des solutions de (C.9.4.1)
4. Donner la solution $y(t)$ de (C.9.4.1) tel que $y(0) = 2$.

Exercice 2 - Donnez l'ensemble des solutions de l'équation différentielle ordinaire suivante :

$$y'' + 4y' + 2y = 0\,.$$

C.9.5 Occurrence 5

Exercice 1 - On considère l'équation différentielle ordinaire suivante :

$$y' + \frac{1}{2}t^2\,y = \frac{1}{2}t^4 + \frac{1}{2}t^2 + 2t, \tag{C.9.5.1}$$

et son edo sans second membre associée :

$$y' + \frac{1}{2}t^2\,y = 0. \tag{C.9.5.2}$$

1. Donner l'ensemble des solutions de (C.9.5.2).
2. Démontrer que la fonction $t \mapsto t^2 + 1$ est une solution particulière de (C.9.5.1).
3. Donner l'ensemble des solutions de (C.9.5.1)
4. Donner la solution $y(t)$ de (C.9.5.1) tel que $y(0) = 2$.

Exercice 2 - Donnez l'ensemble des solutions de l'équation différentielle ordinaire suivante :

$$y'' + 4y' + y = 0\,.$$

C.9.6 Occurrence 6

Exercice 1 - On considère l'équation différentielle ordinaire suivante :

$$y' + 2t\,y = 2t^4 + 3t^2 + 2t\sin(t) + \cos(t). \tag{C.9.6.1}$$

et son edo sans second membre associée :

$$y' + 2t\,y = 0. \tag{C.9.6.2}$$

1. Donner l'ensemble des solutions de (C.9.6.2).
2. Démontrer que la fonction $t \mapsto t^3 + \sin(t)$ est une solution particulière de (C.9.6.1).
3. Donner l'ensemble des solutions de (C.9.6.1)
4. Donner la solution $y(t)$ de (C.9.6.1) tel que $y(0) = 2$. **Exercice 2 -** Donnez l'ensemble des solutions de l'équation différentielle ordinaire suivante :

$$y'' + 3y' + 2y = 0\,.$$

C.10 Contrôle des connaissances avancées 5

Programme : Résolution d'équations différentielles. Utilisation de la variation de la constante.

C.10.1 Occurrence 1

Exercice 1 - Donner la solution de l'équation différentielle ordinaire suivante :

$$y' + \sin(t)y = e^{\cos(t)},\ y(0) = 1.$$

Exercice 2 - Donner l'ensemble des solutions de l'équation différentielle ordinaire suivante :

$$y'' + y' + y = 0.$$

C.10.2 Occurrence 2

Exercice 1 - Donner la solution de l'équation différentielle ordinaire suivante :

$$y' - 2t\cos(t^2)y = t^2 e^{\sin(t^2)},\ y(0) = 1.$$

Exercice 2 - Donner l'ensemble des solutions de l'équation différentielle ordinaire suivante :

$$y'' + 2y' + 2y = 0.$$

C.11 Contrôle des connaissances avancées 6

Programme : Résolution de problème.

Questions préliminaires :

1. Déterminer a et b tels que $\dfrac{1}{u^2-1} = \dfrac{a}{u-1} + \dfrac{b}{u+1}$
2. En effectuant le changement de variable $u = \sqrt{y}$, calculer $\displaystyle\int_1^x \frac{1}{2\sqrt{y}(y-1)}\,dy$.

   (Remarque importante pour la suite : $\displaystyle\int_1^x \frac{1}{2\sqrt{y}(y-1)}\,dy$ est une primitive de $\dfrac{1}{2\sqrt{x}(x-1)}$.)

Résolution d'équation différentielle ordinaire :

On cherche les solutions $y(x)$, définies sur $]1;+\infty[$, de l'équation différentielle ordinaire suivante :

$$2x(x-1)y' + (x-1)y = 1 \qquad (E)$$

1. Résoudre sur $]1;+\infty[$ l'équation différentielle :

   $$y' + \frac{1}{2x}y = 0 \qquad (E_0)$$

   Simplifier l'expression des solutions.

2. Soit f la fonction définie sur $]1;+\infty[$ par :
$$f(x) = \frac{g(x)}{\sqrt{x}}$$
où g est une fonction définie sur $]1;+\infty[$.
Montrer que f est solution de (E) si et seulement si $g'(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{2x(x-1)}$.
3. Déduire de ce qui précède une solution particulière de (E).
4. Résoudre (E).
5. Déterminer la solution f de (E) vérifiant $f(4) = 0$ et calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

D Contrôle continu et examen de l'année précédente

D.1 Contrôle continu de novembre

Exercice 1 - Dans un plan muni d'un repère orthonormé, on considère les points suivants : A(1,2) et B(-1,1).
1) Donner l'équation de la droite (AB).
2) Donner l'équation d'une droite orthogonale à (AB).

Exercice 2 - Le gouvernement d'un petit pays décide de faire l'acquisition d'une flotte de pêche. Il dispose de 10 millions d'Euros pour acheter des navires. Deux tailles de bateaux existent. Les grands bateaux coûtent 80 000 Euros, et les petits 10 000. Le nombre total de bateaux ne peut excéder 150, qui est le nombre de capitaines vivant dans le pays. On estime qu'au cours des premières saisons de pêche, chaque petit bateau rapportera 50 tonnes de poissons, contre 300 tonnes pour chaque grand. On appelera respectivement x le nombre de petits bateaux achetés et y le nombre de grands bateaux.
1) Représentez à l'aide d'inéquations les différentes contraintes.
2) Représentez ces contraintes graphiquement dans le plan (x, y).
3) En vous aidant du graphique, déterminez les nombres de petits et de grands bateaux qu'il faudra acheter pour répondre aux contraintes, tout en maximisant le profit de la pêche au cours des premières saisons.

Exercice 3 -
1) Deux populations comptent respectivement, initialement, 2000 et 3000 individus. L'effectif de la première population augmente de 3% chaque jour. Celui de la seconde augmente de 2%. L'effectif de la première population va-t-il dépasser celui de la seconde. Si oui, dans combien de temps cet événement se produira-t-il ?
2) Etudier, en fonction du paramètre a, réel positif, le comportement de la suite (U_n), définie par :
$$U_0 = 1.$$
$$U_{n+1} = a \cdot U_n + 1$$

D.2 Examen de décembre

Exercice 1. Soit la fonction f définie par
$$f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x}.$$

1. Quel est le domaine de définition D_f de f ?
2. Quel est le domaine $D_{f'}$ où le nombre dérivé de f existe ?
3. Calculer f' en tout point de $D_{f'}$.
4. Dresser le tableau de variation de f.
5. Calculer les limites de f en 0 à gauche, en 0 à droite, en $+\infty$ et en $-\infty$.
6. Le graphe de f admet-il des asymptotes verticale. Si oui lesquelles ?
7. Montrer que, pour tout $x \in D_f$, $f(x) = x - 1 + \dfrac{1}{x}$. Le graphe de f admet-il des asymptotes obliques en $+\infty$ et en $-\infty$. Si oui lesquelles ?
8. Tracer le graphe de f dans un repère orthonormé.
9. Montrer que si $x > 0$ alors $f(x) \geq 1$.
10. Chercher la solution $y > 0$ de $y = f(y)$.

    Soit la suite $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 > 0$ et la formule de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.

11. Sur la figure où est tracé le graphe de f, représenter la suite $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ pour $u_0 = 1/2$ puis pour $u_0 = 2$.
12. Graphiquement, que peut-on conclure concernant la limite de la suite $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$.
13. Montrer que, quelle que soit la valeur de u_0, on a : $u_1 \geq 1$.
14. Montrer que, quelle que soit la valeur de u_0, on a : $u_n \geq 1$ pour tout $n \geq 1$.

15. Calculer $u_{n+1} - u_n$ pour $n \geq 1$. Que peut-on en déduire ?
16. Montrer que la suite $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et calculer sa limite.

Exercice 2.

Questions préliminaires :

1. Déterminer a et b tels que $\dfrac{1}{y^2-1} = \dfrac{a}{y-1} + \dfrac{b}{y+1}$
2. Montrer que
$$\int_1^x \frac{1}{2\sqrt{y}(y-1)}\,dy = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}\right).$$
On pourra effectuer le changement de variable $u = \sqrt{y}$

Résolution d'équation différentielle :

On cherche les solutions $y(x)$, définies sur $]1;+\infty[$, de l'équation différentielle ordinaire suivante :

$$2x(x-1)y' + (x-1)y = 1 \qquad (E)$$

1. Résoudre sur $]1;+\infty[$ l'équation différentielle :
$$y' + \frac{1}{2x}y = 0 \qquad (E_0)$$
Simplifier l'expression des solutions.
2. Soit f la fonction définie sur $]1;+\infty[$ par :
$$f(x) = \frac{g(x)}{\sqrt{x}}$$
où g est une fonction définie sur $]1;+\infty[$.
Montrer que f est solution de (E) si et seulement si $g'(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{2x(x-1)}$.
3. Déduire de ce qui précède une solution particulière de (E).
4. Résoudre (E).
5. Déterminer la solution f de (E) vérifiant $f(4) = 0$ et calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

E Liste des étudiants ayant participé à cette expérimentation

AMOSSE QUENTIN
AUDO MYLENE
BARON FLORENT
BELLEC KAREN
BESLIC SONIA
BEVIERE JEREMY
BOULARD MARION
BOUSQUET ROMAIN
BRUNO ANNE-CLAIRE
CAPELLE THOMAS
CAUDAL GUILLAUME
CEYZERIAT KELLY
CHARPENTIER ANTOINE
COSTA MANUEL
DACQUAY NATHALIE
DEGORRE CHARLOTTE
DEKEISTER MARION
DERRIEN FLORENCE
DISSAIS MARGAUX
DJAFFRI DJAMILA
DORANT YANN
DROUIN GAETAN
DURIEZ OCEANE
ERMEL ANTHONY
ESPOSITO VIRGINIE
ESPOSITO ELODIE
EVANNO LAETITIA
EVEN FLORINE
EYMOND WILLIAM
FERNANDES SANDY
GAMBEE MATHILDE
GENESTE VINCENT
GOOLAERTS CAROLINE
GOUSSET BENOIT
GRANÇON ISABELLE
GRATON FLORIANE
GUEGAN ELENA
GUILLOUZIC MARINE
GUTIERREZ MIKAEL
HILARY BERANGERE
HUDIER FABIEN
JONCOUR BARBARA
JUHEL AMANDINE
KERMORVANT JONATHAN
KERRAND MARINE
LAUNAY NADÈGE
LE BECHEC JONAS
LE BLANC MAXIME
LE COQ JIMMY
LE DUIGOU AUDREY
LE GAL JEAN-MARIE
LE GUENNEC AURELINE
LE HINGRAT NICOLAS
LE JOLY JONAS
LE MOELLIC BRENDAN
LOGNONE GREGOIRE
MACE MAEVA
MAGGIO CHARLOTTE
MAHE AURELIE
MANTEAU CLEMENCE
NAUDIN AGATHE
PARANTHOEN LOMIG
PENDELIO LEO

PERION MELISSA
PERVIER ALIX
POIRIER BENJAMIN
PROVOST MAGALI
RAIMBAULT BAPTISTE
RECHER D.-LAWRENCE
RONSIN PAULINE
RUAL COLINE
SAMSON MARIANNE
SCHERHAG ARNAUD
SCHONHERR SOPHIA
THOMAS EMELINE
VALOIS AMANDA
VERON AURELIE