Université Bretagne Sud
L1 SSI

24 juin 2014, 08 : 00

# MTH 1202 - Seconde session

Calculatrices autorisées - Documents interdits

Durée : 2h

Barème : $1,1$ points par question.

Exigence : Il n'y aura pas de demi-point accordé à une question : soit la réponse sera correcte et correctement rédigée et elle rapportera $1,1$ ; dans tous les autres cas la note de la question sera 0.

**Exercice 1 -** Sans utiliser la définition de la notion de limite :

**1.1** donnez $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2+1}{\sqrt{n^4+5}}$,

**1.2** donnez $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n-\sqrt{n}}-\sqrt{n+\sqrt{n}}$

**1.3** donnez $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^3+7}{\ln(n^4+7)}$.

**1.4** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0=1$ et $\forall n\geq 1, u_n=\dfrac{1}{2}\sin(n)\,u_{n-1}$. Donnez $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

**Exercice 2 -**

**2.1** Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Donnez la définition de $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=+\infty$.

**2.2** À l'aide de cette définition, démontrez que $\lim\limits_{n\to+\infty} n^5+1=+\infty$.

**2.3** A l'aide du "Théorème des gendarmes" et de la question précédente, démontrez

$$\lim_{n\to+\infty}(2+\sin(n^4))(n^5+1)=+\infty.$$

**2.4** En utilisant la notion de "suite équivalente" et la question précédente, donnez

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n^4+3}}{n^2+8}(2+\sin(n^4))(n^5+1)=+\infty.$$

**Exercice 3 -**

**3.1** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Écrivez ce que signifie : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas.

**3.2** En utilisant la question 3.1, démontrez que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n\in\mathbb{N}, w_n=(-1)^n+\frac{1}{4}\sin(n)$$

ne converge pas.

**Exercice 4 -**
**4.1** Soient $x \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, donnez la définition de "$f$ est dérivable en $x$".

Soit

$$\begin{aligned} g(x) &= \sin(x^2) \quad \text{si } x \leq 0 \\ &= \sin(x) \quad \text{si } x > 0, \end{aligned}$$

**4.2** En quels points est-il possible d'appliquer les théorèmes généraux pour calculer la dérivée de $g$ ?
**4.3** Étudiez, à l'aide des théorèmes généraux en les points où c'est possible, la dérivation de la fonction $g$ et donnez la dérivée de $g$.
**4.4** Étudiez la dérivation de la fonction $g$ en les autres points.

**Exercice 5 -**
Une fonction réelle de variable réelle $f$ est dite lipschitzienne sur $\mathbb{R}$ s'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}$, $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$.

**5.1** Soient $x \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, donnez la définition de "la limite de $f$ en $x$ existe".
**5.2** A partir de cette définition, démontrez que si une fonction $f$ est lipschitzienne sur $\mathbb{R}$, alors $f$ admet une limite en tout point de $\mathbb{R}$.
**5.3** En déduire que si $f$ est lipschitzienne sur $\mathbb{R}$, alors $f$ est continue en tout point de $\mathbb{R}$.

Soient $f$ une fonction réelle de variable réelle et $a \in ]0, 1]$, $f$ est dite $a$-hölderienne sur $\mathbb{R}$ s'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}$, $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|^a$.

**5.4** Démontrez que si une fonction $f$ est $a$-hölderienne sur $\mathbb{R}$, alors $f$ admet une limite en tout point de $\mathbb{R}$.