Université Bretagne Sud
L1 SSI

21 mai 2013, 14 : 00

MTH 1202 - Devoir Surveillé

Calculatrices autorisées - Documents interdits
Durée : 2h

Barème : Exercices 1, 2 et 4 : 1 point par question. Exercice 3 : 6 points
Exigence : Pour les exercices 1, 2 et 4, il n'y aura pas de demi-point accordé à une question : soit la réponse sera correcte et correctement rédigée et elle rapportera 1 ; dans tous les autres cas la note de la question sera 0. Pour l'exercice 3, une réponse partielle pourra être apportée. Pour que cette réponse partielle rapporte des points il faudra que ce qui est démontré soit clairement énoncé et que la démonstration soit bien rédigée.

Exercice 1 -
1.1 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle et l un réel. Donnez la définition de $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$.
1.2 À l'aide de cette définition, démontrez que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^2+4} = 0$.
1.3 A l'aide du "Théorème des gendarmes" et de la question précédente, démontrez $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\cos(n^2)}{n^2+4} = 0$.
1.4 En utilisant la notion de "suite équivalente" et la question précédente, donnez $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(n+3)^2\cos(n^2)}{(n^2+4)^2}$.
1.5 Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Donnez la définition de $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$.

Exercice 2 - Étudiez la convergence (ou la divergence) des suites (a_n), (b_n), (c_n) et (d_n) où :

$$a_n = \frac{n^2-4n+1}{n^2+1}, \qquad b_n = \frac{8^n+(-3)^n}{7^n+(-1)^n},$$
$$c_n = \frac{(n^2+1)\sin(\frac{1}{n})}{n\ln(n)}, \qquad d_n = \frac{1}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n-2}}.$$

Exercice 3 - déterminez le plus petit rang M tel que, pour tout $n \geq M$, l'inégalité ci-dessous soit vraie :

$$\frac{1}{\ln\left(\sqrt{n^2+n+1}\right)} \leq \frac{1}{1000}.$$

Exercice 4 -
Soit g une fonction réelle de variable réelle telle que $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, |g(x)-g(y)| \leq \frac{1}{2}|x-y|$ et soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la donnée de u_0 et la formule de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = g(u_n)$.
2.1 Etablissez, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une estimation de $|u_{n+1}-u_n|$ en fonction de $|u_n - u_{n-1}|$.

2.2 Déduisez-en une estimation de $|u_{n+1} - u_n|$ en fonction de $|u_1 - u_0|$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2.3 Démontrez que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy. Déduisez-en que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. (On appellera l sa limite)
2.4 Etablissez une relation caractérisant l.
2.5 Démontrez que la relation établie à la question 2.4 définit l de manière unique.