1. But du TP :

Le but de ce TP est de résoudre, numériquement, à l'aide du logiciel R, une équation différentielle de la forme :

$$y'(t) = f(t, y(t))$$

2. Installer un package sous R :

Certaines commandes du logiciel **R** nécessitent l'installation de packages supplémentaires. Il existe plusieurs manières de télécharger un package :
1) Aller dans le terminal de **R** et taper la commande

```
install.packages("nom du package")
```

2) Directement à partir d'un logiciel de script (Rgui, Rstudio), aller dans le menu

```
\tools\Install Packages ...
```

La résolution d'équations différentielles sous **R** nécessite l'installation du package "deSolve".

3. Modèle de résolution d'une équation différentielle :

L'exemple suivant résout numériquement l'équation différentielle $y' = y$ avec contition initiale $y(0) = 1$ sur $[0, 5]$:

```
f <- function(t, y, parms){
        list(y)
}
yini = 1
library(deSolve)
times <- seq(from = 0, to = 5, by = 0.02)
sol <- ode(y = yini, times = times, func = f, parms = NULL)
plot(sol)

# Commentaires:
-f: fonction de l'équation différentielle.
-times: vecteur temps (abscisse) qui sont les points de tracé de la fonction.
-yini: valeur initiale de y pour la première valeur de temps times.
-library(deSolve): fait appel au package "deSolve".
-parms: liste de paramètres.
-ode: commande résolvant l'équation différentielle.
 Elle prend en paramètres: yini, times, f, parms.
```

Exercice 1 : Résolution d'équations différentielles

Résoudre les équations différentielles suivantes et tracer leurs courbes sur $[t_0, 10]$:
- $y' = y$ avec a) $y(0) = 0$, b) $y(0) = 1$, c) $y(0) = 2$.
- $y' = y\cos(t)$ avec $y(0) = 1$
- $y' = y/(1 + y)$ avec $y(0) = 1$
- $y' = y^2$ avec $y(1) = 1$
- $y' = y^2\cos(t)$ avec $y(0) = 1$

Exercice 2 : Modèle de Malthus

On considère une population de bactéries se développant dans une gélose et l'on désire vérifier si la croissance de cette population peut être modélisée par le modèle de croissance exponentiel de Malthus :

$$y'(t) = ry(t), \quad \text{avec } r = 1 \quad \text{et } y(0) = 2$$

Les données expérimentales sont regroupées sous forme d'un vecteur T représentant le temps en heures et N représentant le nombre de bactéries à la date T.

```
T=c(0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10)
N=c(2, 5, 20, 50, 150,  200, 900, 1600, 4000, 6400, 7900)
```

- Résoudre l'équation différentielle précédente et tracer le graphique sur $[0, 10]$.
- Tracer graphiquement sur **R** l'évolution du nombre de bactéries N en fonction du temps T, et superposer ce graphique sur le précédent.
- Le modèle est-il en adéquation avec les données ? Quelles sont les limites de ce modèle ?

Exercice 3 : Modèle de Verhulst

On considère alors que la croissance de population des bactéries est modélisée par l'équation différentielle suivante :

$$y'(t) = ry(t)\left(1 - \frac{y(t)}{K}\right)$$

où r et K sont des paramètres du modèle à déterminer.

- Résoudre l'équation différentielle avec les paramètres $r = 1$ et $K = 10000$. Tracer le graphique jusqu'au temps $T = 10$.
- Que représentent les paramètres r et K ?
- Superposer la courbe solution avec les données expérimentales. Le modèle est-il en adéquation avec la réalité ?
- Tracer la courbe de l'équation différentielle du modèle de Verhulst jusqu'au temps $T = 20$. Au bout de combien d'heures (approximativement) la population aura atteint sa taille limite ?

Graphiques des exercices 2 et 3 :