Donc

$$\cos(x) + \sin(x) = 1 + x - \frac{x^2}{2} + o(x^4).$$

2). On multiplie le développement limité de $\ln(1+x)$ par x. Cela donne :

$$x \ln(1+x) = x\left(x - \frac{x^2}{2} + o(x^4)\right)$$

$$= x^2 - \frac{x^3}{2} + x\, o(x^4)$$

Or $\frac{x^3}{2}$ et $x\, o(x^4)$ sont des $o(x^2)$. Donc

$$x \ln(1+x) = x^2 + o(x^2)$$

Exercice 5 : 1) $\displaystyle\int_0^1 x \cos(x^2)\, dx = \frac{1}{2}\int_0^1 (2x) \cos(x^2)\, dx$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 u'(x) \cos(u(x))\, dx \quad (\text{avec } u(x) = x^2)$$

$$= \frac{1}{2}\left[\sin(u(x))\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{2}\left[\sin(x^2)\right]_0^1 = \frac{\sin(1)}{2}$$

2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x) \sin x\, dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\sin x)(\cos(x))^2\, dx$

$$= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} (u'(x))\,(u(x))^2\, dx \quad (\text{avec } u(x) = \cos(x))$$

$$= -\left[\frac{1}{3}(u(x))^3\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\left[\frac{1}{3}(\cos(x))^3\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= -\frac{1}{3}(0 - 1) = \frac{1}{3}$$