

Calculatrice autorisée. Documents non autorisés
Durée : 1h30

Exercice 1. Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(x) dx$ 2. $\int_0^2 t^3 dt$

Exercice 2. Vérifier que la fonction $x \mapsto 3e^{2x}$ vérifie l'équation différentielle $y' = 2y$.

Exercice 3. On considère le problème de biologie très simplifié d'un animal situé dans une zone où il dispose de deux types de ressource alimentaire R_1 et R_2 . La zone contient 5 unités de R_1 et 10 unités de R_2 . L'ingestion d'une unité de R_1 apporte à l'animal une quantité d'énergie de 1 ; et, l'ingestion d'une unité de R_2 lui apporte une quantité d'énergie de 2. Pour ingérer une unité de R_1 l'animal met 2 minutes et pour ingérer une unité de R_2 l'animal met 5 minutes. L'animal dispose de 30 minutes.

Dans la suite, on appelle x_1 la quantité d'unités de R_1 ingérée par l'animal et x_2 la quantité d'unités de R_2 .

1. Pour une quantité x_1 donnée et une quantité x_2 donnée d'unités ingérées, donner l'énergie acquise par l'animal.
2. Traduire les contraintes données ci-dessus en inéquations.
3. Représenter le polygone dont l'intérieur représente l'ensemble de (x_1, x_2) satisfaisant les contraintes.
4. Donner la quantité d'unités de R_1 et la quantité d'unités de R_2 qui maximisent l'énergie que l'animal peut acquérir. Avec ces quantités, combien d'énergie obtient-il ?

Exercice 4. On rappelle que

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2), \quad \sin(x) = x + o(x^2) \quad \text{et} \quad \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

Calculer les développements limités en 0 à l'ordre 2 de :

1. $\cos(x) + \sin(x)$
2. $\ln(1+x) \times x$

Exercice 5. Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_0^1 x \cos(x^2) dx$ 2. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x) \sin(x) dx$

Exercice 6. Calculer par Intégration Par Partie (IPP) l'intégrale suivante : $\int_0^{\pi} x \sin(x) dx$

Exercice 7. Déterminer les deux valeurs a et b de sorte que la fonction $x \mapsto ae^{bx}$ soit solution l'équation différentielle $y' = 4y$ munie de la condition initiale $y(0) = 2$.