Licence 1 - Parcours Bio
Formulaire sur les suites

E. Frénod*

September 30, 2005

1 Définition de "suite réelle"

DÉFINITION 1.1 *Soit* n_0 *un entier naturel. On appelle* **suite rélle** *définie sur l'ensemble des indices* $D = \{n \in \mathbb{N}, n \geq n_0\}$ *une application de* D *dans* $\mathbb{R}$.
On la note $u = (u_n)_{n \geq n_0}$ *ou* (u_n).

On appelle **sous suite extraite** de la suite (u_n) toute suite (v_n) construite en prenant des termes u_n avec la propriété que si $v_n = u_m$ et $v_{n+1} = u_l$ alors $m < l$.

DÉFINITION 1.2 *La suite* (u_n) *est dite*

- *stationnaire si* $\forall n \geq n_0; u_{n+1} = u_n$;
- *croissante si* $\forall n \geq n_0; u_{n+1} \geq u_n$;
- *strictement croissante si* $\forall n \geq n_0; u_{n+1} > u_n$;
- *décroissante si* $\forall n \geq n_0; u_{n+1} \leq u_n$;
- *strictement décroissante si* $\forall n \geq n_0; u_{n+1} < u_n$;
- *alternée si les termes sont aternativement positifs et négatifs. (Cela se traduit par* $\forall n \geq n_0, u_{n+1}u_n < 0$*).*

2 Notion intuitive d'accumulation

On dira qu'une suite de points s'accumule en un point a si pour tout zoom centré en a qu'on effectue (quel que soit le grossissement) il y a un rang dans la suite à partir duquel on ne peut plus distinguer les points de la suite du point a.

3 Définition de la limite d'une suite

DÉFINITION 3.1 *Soit un réel* l *et une suite* (u_n). *On dit que* (u_n) *a pour limite* l *(et on note* $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$ *ou* $\lim u_n = l$ *) si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \geq n_0 \ t.q. \ (n \geq N \Rightarrow |u_n - l| \leq \varepsilon)$$

*Lemel, Université de Bretagne Sud, Centre Yves Coppens, Campus de Tohannic, F-56000, Vannes

DÉFINITION 3.2 *On dit que la suite* (u_n) *a pour limite* $+\infty$ *(et on note* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ *ou* $\lim u_n = +\infty$*) si :*

$$\forall A > 0, \exists N \geq n_0 \ t.q. \ (n \geq N \Rightarrow u_n \geq A)$$

On définit aussi $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

On dit qu'une suite est **convergente** si elle a une limite (finie). Dans les autres cas on dit que la suite est **divergente**.

4 Opérations sur les limites

PROPOSITION 4.1 *Les limites de suite s'additionnent, se multiplient et se divisent selon les règles suivantes :*

$+$	l	$+\infty$	$-\infty$
l'	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	??
$-\infty$	$-\infty$	??	$-\infty$

Somme

$\times$	$l \neq 0$	0	$+\infty$	$-\infty$
$l' \neq 0$	ll'	0	$sgn(l')\infty$	$-sgn(l')\infty$
0	0	0	??	??
$-\infty$	$-sgn(l)\infty$	??	$-\infty$	$+\infty$

Produit

lim	$\frac{1}{\lim}$
$l \neq 0$	$\frac{1}{l}$
$\pm\infty$	0
0	??

Inverse

(4.1)

Les **principales formes indéterminées** sont :

$$\text{“ } (+\infty) - (+\infty) \text{ ”}, \quad \text{“ } \frac{1}{0} \text{ ”}, \text{“ } 0 \times \infty \text{ ”}, \quad \text{“ } \frac{\infty}{\infty} \text{ ”}, \quad \text{“ } \frac{0}{0} \text{ ”}, \text{“ } \frac{\infty}{0} \text{ ”}, \text{“ } 0^{\infty} \text{ ”}, \text{“ } 0^0 \text{ ”}, \quad \text{“ } \infty^0 \text{ ”}.$$

5 Limites et inégalités

THÉORÈME 5.1 *Soient* (u_n) *et* (v_n) *deux suites et* l *et* l' *deux réels tels que* $\lim u_n = l$ *et* $\lim v_n = l'$.

- *Si* $l < l'$ *alors il existe* $N \in \mathbb{N}$ *tel que* $(n \geq N \Rightarrow u_n < v_n)$.
- *Si il existe* $N \in \mathbb{N}$ *tel que* $(n \geq N \Rightarrow u_n \leq v_n)$ *alors* $l \leq l'$.

THÉORÈME 5.2 *Soient* (u_n) *et* (v_n) *deux suites. Si* $\lim u_n = +\infty$ *et si il existe* $N \in \mathbb{N}$ *tel que* $(n \geq N \Rightarrow v_n \geq u_n)$ *alors* $\lim v_n = +\infty$

THÉORÈME 5.3 *Soient* (u_n), (v_n) *et* (w_n) *trois suites et* l *un réel. Si* $\lim u_n = \lim w_n = l$ *et si il existe* $N \in \mathbb{N}$ *tel que* $(n \geq N \Rightarrow u_n \leq v_n \leq w_n)$ *alors* $\lim v_n = l$

6 Composition

Soient (u_n) une suite, f une fonction et l et l' deux réels.

- Si $\lim u_n = l$ et $\lim_{x\to l} f(x) = l'$, alors $\lim f(u_n) = l'$
- Si $\lim u_n = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l'$, alors $\lim f(u_n) = l'$.

7 Critère de convergence

Théorème 7.1 *Toute sous suite extraite d'une suite convergente est convergente (et converge vers la même limite).*

Théorème 7.2 *Soit une suite* (u_n). *Si* (u_{2n}) *et* (u_{2n+1}) *convergent vers la même limite* l *alors* (u_n) *converge vers* l.

Théorème 7.3 *Toute suite convergente est bornée.*

Définition 7.1 *Soient* (u_n) *et* (v_n) *deux suites. On dit qu'elles sont adjacentes si l'une est croissante et l'autre décroissante et si* $\lim(u_n - v_n) = 0$.

Théorème 7.4 *Si* (u_n) *et* (v_n) *sont deux suites adjacentes alors elles convergent toutes les deux et* $\lim u_n = \lim v_n$.

Définition 7.2 *Soit une suite* (u_n). *On dit que* (u_n) *est une suite de Cauchy si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \ t.q. \ (p \geq N \ et \ q \geq N \Rightarrow |u_p - u_q| \leq \varepsilon)$$

Théorème 7.5 *Toute suite de Cauchy est convergente.*

8 Suite définies par récurrence

8.1 Suite arithmétique

Soit r un réel, on dit qu'une suite (u_n) est arithmétique de raison r si pour tout n on a $u_{n+1} = u_n + r$.
Si $r = 0$, la suite arithmétique est stationnaire $(u_n = u_0, \forall n)$.
Si $r > 0$ la suite arithmétique diverge vers $+\infty$.
Si $r < 0$ la suite arithmétique diverge vers $-\infty$.
Formule : $u_n = u_0 + nr$.
Formule : $\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n-1} u_k = \frac{n(u_0 + u_{n-1})}{2}$.

8.2 Suite géométrique

Soit q un réel, on dit qu'une suite (u_n) est géométrique de raison q si pour tout n on a $u_{n+1} = qu_n$.
Si $q = 0$, la suite géométrique est stationnaire $(u_n = 0, \forall n \geq 1)$.
Si $|q| < 1$, la suite géométrique converge.
Si $|q| > 1$, la suite géométrique diverge.
Si $q = 1$, la suite géométrique est stationnaire $(u_n = u_0, \forall n)$.
Si $q = -1$ et $u_0 \neq 0$, la suite géométrique n'a pas de limite.
Formule : $u_n = q^n u_0$.
Formule : Si $q \neq 1$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n-1} u_k = u_0 \frac{1 - q^n}{1 - q}$.

8.3 Suite récurrente affine du premier ordre à coefficients constants

Soit a et b deux réels donnés, on dit qu'une suite (u_n) est récurrente affine du premier ordre à coefficients constants (ou arithmético-géométrique) si pour tout n on a $u_{n+1} = au_n + b$.
Si $a = 1$ la suite est arithmétique. Si $b = 0$ la suite est géométrique.
Si $a \neq 1$ la suite de terme général $v_n = u_n - \frac{b}{1-a}$ est géométrique.

8.4 suite récurrente linéaire du second ordre à coefficients constants

Soit a et b deux réels donnés, on dit qu'une suite (u_n) est récurrente linéaire du second ordre à coefficients constants si pour tout n on a $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$
L'équation (E) : $x^2 = ax + b$ est appelée équation caractéristique de la suite.
Si (E) a deux racines réelles r_1 et r_2, alors, il existe deux réels α et β tels que $\forall n$, $u_n = \alpha(r_1)^n + \beta(r_2)^n$.
Si (E) a une racine réelle double r_0, alors, il existe deux réels α et β tels que $\forall n$, $u_n = (\alpha + \beta n)(r_0)^n$.
Si (E) a deux racines complexes conjuguées, de module ρ et d'argument θ et $-\theta$, alors, il existe deux réels α et β tels que $\forall n$, $u_n = (\alpha \cos(n\theta) + \beta \sin(n\theta))(\rho)^n$.

8.5 Suite vérifiant une relation de récurrence du type $u_{n+1} = g(u_n)$

Pour qu'une suite définie par u_0 et une relation de récurrence $u_{n+1} = g(u_n)$ avec g définie sur I il faut que $g(I) \subset I$.

THÉORÈME 8.1 *Si g est continue et si (u_n) converge vers l alors $g(l) = l$. (un tel point tel que $g(l) = l$ s'appelle un point fixe de g.)*

THÉORÈME 8.2 *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et g une fonction définie sur I tel que $g(I) \subset I$. Si il existe un constante $k < 1$ telle que $\forall x \in I$ et $x' \in I$ on a $|g(x) - g(x')| \leq k|x - x'|$, alors g admet un unique point fixe a sur I. De plus toute suite définie par u_0 et la relation $u_{n+1} = g(u_n)$ converge vers a.*

9 Exemple de séries

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite on peut définir $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. Si S_n converge vers une limite on note :

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k = \lim S_n.$$

Quelques exemples de séries :

$$\begin{array}{ll} \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1; & \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e; \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty & \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}. \end{array}$$