

# SUR LES IMMEUBLES TRIANGULAIRES ET LEURS AUTOMORPHISMES

Sylvain BARRÉ, Mikaël PICHOT<sup>1</sup>

Mai 2005

—

## Résumé

Les travaux de J. Tits ont conduit à la classification complète des immeubles euclidiens de dimension supérieure ou égale à 3. L'ensemble de ces immeubles à isomorphisme près est dénombrable et paramétré par les corps locaux qui leur correspondent. Dans cet article nous nous intéressons aux immeubles triangulaires, qui sont euclidiens de dimension 2 et pour lesquelles une paramétrisation analogue est impossible.

Nous construisons une lamination  $\Lambda$  sur un espace topologique localement compact séparé, dont l'espace des feuilles est l'ensemble des immeubles triangulaires à isomorphisme près. On considère ainsi les immeubles triangulaires comme points d'un espace dont  $\Lambda$  est une désingularisation naturelle.

Nous établissons des résultats de chirurgie sur les immeubles triangulaires à données locales fixées. Ils entraînent par exemple que  $\Lambda$  est topologiquement transitive. Nous montrons qu'un immeuble triangulaire générique au sens de Baire a un groupe d'automorphismes trivial et qu'il contient toutes les géométries locales possibles. L'espace des immeubles triangulaires à isomorphisme près est un nouvel exemple d'espace non commutatif.

## 1. INTRODUCTION

Soit  $\Delta$  un complexe simplicial simplement connexe de dimension 2 à faces euclidiennes, muni de la métrique linéaire par morceaux habituelle [6]. Supposons  $\Delta$  à courbure négative (au sens  $\text{CAT}(0)$  relativement à cette métrique) et appelons *plat* de  $\Delta$  toute image d'un plongement isométrique du plan euclidien dans  $\Delta$ . L'espace  $\Delta$  est un immeuble de Tits euclidien de dimension 2 si et seulement si deux faces quelconques se trouvent dans un même plat (voir [7, 2]). Tout segment géodésique de  $\Delta$  est alors contenu dans un plat.

Nous renvoyons à [7] et [16] pour la définition et les propriétés générales des immeubles de Tits.

Les immeubles de Tits euclidiens irréductibles de dimension 2 se classent en trois catégories, suivant le type de pavage régulier de leurs plats. Dans cet article nous

---

<sup>1</sup>Le second auteur a été en partie financé par JSPS.

études les *immeubles triangulaires*, aussi appelés immeubles de type  $\tilde{A}_2$ , qui correspondent au pavage par triangles équilatéraux.

En dimension strictement supérieure à 2 les travaux de J. Tits (voir [19]) ont permis une classification complète des immeubles euclidiens : *le groupe d'automorphismes d'un immeuble euclidien de dimension  $\geq 3$  est isomorphe à un groupe algébrique sur un corps local.*

Il est bien connu que l'énoncé correspondant en dimension 2 n'est plus vrai. Les « constructions libres » de Ronan [15] permettent de construire une infinité non dénombrable d'immeubles triangulaires et montrent qu'on dispose d'une liberté totale dans la prescription des données locales.

Le cadre de cet article est fixé par la définition suivante. Nous nous intéressons à l'ensemble des immeubles triangulaires *en tant qu'espace*.

**Définition 1.** *On appelle espace des immeubles triangulaires l'ensemble  $E$  de tous les immeubles triangulaires considérés à isomorphisme près.*

L'ensemble  $E$  a le cardinal du continu, notons aussi qu'il contient, entre autres, trois familles particulières d'immeubles :

- les immeubles dits classiques, qui sont associés à  $SL_3(K)$  où  $K$  est un corps local, ceux-là sont en nombre dénombrable (voir [19, 18]) ;
- les immeubles dits exotiques, qui ne correspondent pas à un groupe algébrique mais qui cependant ont un groupe d'automorphismes cocompact (voir [20, 24, 4]) ;
- d'autres immeubles très hétérogènes qui ne possèdent aucun automorphisme non trivial [15].

Dans un immeuble triangulaire, le nombre de triangles incidents à une même arête est constant et noté  $q + 1$ . On appelle  $q$  l'ordre de l'immeuble considéré. Le link en un sommet, i.e. la sphère de rayon combinatoire 1 de centre ce sommet, est codé par un plan projectif fini ayant  $q + 1$  points par droite. On pourra consulter [4] pour une description très détaillée des immeubles triangulaires (voir aussi [15, 16]). Par la suite nous supposons toujours l'entier  $q$  choisi de sorte qu'il existe au moins un plan projectif d'ordre  $q$ . On peut par exemple se restreindre aux entiers de la forme  $q = p^n$ , où  $p$  est un nombre premier (l'existence de plan projectif d'ordre  $q \neq p^n$  est une question ouverte). On note  $E_q \subset E$  le sous-ensemble des immeubles triangulaires d'ordre  $q$ . Si  $P$  est un plan projectif d'ordre  $q$ , ou plus généralement une famille de plans projectifs de même ordre  $q$ , on note  $E_P \subset E_q$  l'ensemble des immeubles triangulaires dont les links sont tous associés à  $P$  (donc  $E_P = E_q$  si  $P$  est l'ensemble de tous les plans projectifs d'ordre  $q$ ).

On dira que  $P$  est l'ensemble des *données locales* des immeubles de  $E_P$ .

Les résultats que nous exposons dans cet article reposent sur certaines propriétés géométriques des immeubles triangulaires énoncées dans le théorème suivant, que nous démontrons dans la partie 3. Nous renvoyons à cette partie, ainsi qu'à la partie 2, pour les détails terminologiques (notamment la notion de projection que nous considérons,

et « l'âme du cône issu d'un coin » qui lui correspond). Précisons simplement que pour un entier  $q \geq 2$ , une famille  $P$  de plans projectifs d'ordre  $q$ , et un entier  $R$  non nul, on appelle boule de  $E_P$  de rayon  $R$ , une boule simpliciale de rayon  $R$  d'un immeuble de  $E_P$ . Une telle boule est bien définie à isomorphisme près. Sauf mention du contraire on ne fera pas de distinction entre un immeuble triangulaire et sa classe d'isomorphisme dans  $E$ . On ne fait pas non plus de distinction entre un immeuble et sa réalisation géométrique. Dans le Théorème 2 ci-dessous l'énoncé 1 correspond au Lemme 22 de l'article et l'énoncé 2 au Lemme 23.

**Théorème 2.** *Soit  $P$  une famille de plan projectifs d'ordre fixé  $q \geq 2$ .*

1. Lemme de coloration. *Soient  $B^2$  une boule de  $E_P$  de rayon deux, qu'on suppose classique dans les cas  $q = 3$  et  $q = 4$ , et  $B_0$  une autre boule de  $E_P$  de rayon  $R \geq 1$  de centre  $O$ . Il existe une boule  $B_1$  de  $E_P$  de rayon  $R + 1$  contenant  $B_0$  et de même centre telle qu'aucune de ses boules de rayon deux centrées sur les sommets de la sphère de centre  $O$  de rayon  $R - 1$  ne soient isomorphes à  $B^2$ .*
2. Lemme de chirurgie. *Soit  $B$  une boule de  $E_P$ . Pour toute autre boule  $B'$  de  $E_P$ , il existe un immeuble  $\Delta \in E_P$  contenant à la fois  $B$  et  $B'$ . De plus, étant donné un coin  $s$  de  $B$ , on peut positionner  $B'$  de sorte que son centre soit sur l'âme du cône issu de  $s$  relativement à  $B$  dans  $\Delta$ .*

Dans l'énoncé 1 nous pouvons supposer que la boule  $B^2$  est classique pour  $q = 3$  ou  $q = 4$ , sans que cela n'apporte de restriction sur  $P$ , car il n'existe pas de plan projectif non arguésien dans ces deux cas (voir [1] et la section 2 pour la définition de la propriété de Desargues). On pourra consulter [11] pour une référence récente sur la classification des plans projectifs de petit ordre. Le lemme de coloration ci-dessus a été démontré pour  $q = 2$  par le premier auteur dans [4]. La preuve que nous donnons pour  $q = 3$  et  $q = 4$  s'applique également à des valeurs de  $q$  plus grandes, mais ne permet pas de couvrir les cas non arguésiens (il existe des plans projectifs non arguésiens dès que  $q \geq 9$ ). Pour ces cas nous donnons un argument, indépendant du caractère arguésien, et qui s'applique dès que  $q \geq 5$ . Il repose sur la notion de liaison projective.

Du théorème 2 on déduit dans un premier temps le résultat suivant (qui correspond au Théorème 27 dans le texte), démontré dans [4] lorsque  $q = 2$  (dans ce cas  $P$  est le plan de Fano, qui a 7 points et 7 droites).

**Corollaire 3.** *Pour tout plan projectif  $P$  l'ensemble  $E_P$  a le cardinal du continu.*

Dans [15] Ronan construit une infinité non dénombrable d'immeubles triangulaires en mélangeant des géométries locales différentes (arguésiennes et non arguésiennes) dans un même immeuble. De là provient l'idée (souvent exprimée, voir [15, 17, 23, 24, 12]) qu'il n'est pas envisageable de classifier tous les immeubles euclidiens. D'après le corollaire 3 les libertés de construction subsistent à données locales fixées, on ne se ramène pas à des ensembles dénombrables d'immeubles en fixant  $P$ . Ce phénomène contraste avec les résultats de classification en dimension  $\geq 3$ , et montre que le cas de la dimension 2 nécessite l'utilisation d'outils nouveaux.

En particulier l'extension à la dimension 2 (même partielle) de la classification de Tits des immeubles euclidiens de dimension  $\geq 3$  est une question délicate. Les travaux récents dans cette direction ont permis de donner une description complète des polygones de Moufang [22], c'est-à-dire la classification de certains immeubles sphériques qui apparaissent par exemple comme bord à l'infini dans les immeubles euclidiens de dimension 2. À défaut de considérer tous ces immeubles sphériques, ne sont classifiés que ceux qui ont *a priori* un groupe d'automorphismes suffisamment transitif. En fait une classification complète de tous les immeubles triangulaires est impossible, tout au moins au sens suivant : on ne peut pas construire d'invariant qui distingue les immeubles deux à deux, ou ce qui revient au même, de « fonctions coordonnées » paramétrisant l'espace  $E_P$  quel que soit le plan projectif  $P$ . Plus précisément, il n'existe pas de fonction Borélienne  $c : E_P \rightarrow \Omega$  à valeurs dans un espace polonais  $\Omega$ , qui soit injective.

L'approche présentée ici traduit le fait que, pour tout plan projectif  $P$  fixé, l'espace  $E_P$  des immeubles triangulaires dont les links correspondent à  $P$  est un espace singulier. (Il en va de même de  $E_q$  et  $E$ , a fortiori.) Nous prenons ici le terme « espace singulier » au sens utilisé par A. Connes dans [8]. La structure de  $E_P$  est très similaire à celle des espaces de feuilles de feuilletages. Dans un prochain article [5] nous étudierons cette structure plus en détails et nous montrerons en particulier l'existence d'immeubles triangulaires quasi-périodiques. Il en résultera que l'espace des immeubles triangulaires, même en tant qu'« espace de feuilles », est extrêmement compliqué.

L'une de nos motivations d'origine dans l'introduction de  $E$  est la construction de nouveaux groupoïdes (et algèbres d'opérateurs) exhibant des propriétés fortes de rigidité, suggéré notamment par la géométrie des links (voir [14]), ou par le fait que les immeubles triangulaires sont des objets de rang supérieur. Les techniques  $(*)$ -algébriques, notamment de  $K$ -théorie, et la géométrie non commutative, sont précisément adaptées à l'étude d'espaces tels que  $E$  et devraient permettre d'obtenir des résultats nouveaux.

Comme l'espace des immeubles triangulaires n'est pas standard, on ne peut pas le munir directement d'une structure supplémentaire usuelle, par exemple une structure topologique *séparée* (ou même une structure mesurée standard). Cependant on peut par une opération élémentaire, dite de désingularisation [8], le ramener à un espace classique (cf. aussi [13]). Dans notre cadre (topologique) il suffit, pour pouvoir déterminer la proximité relative de deux immeubles triangulaires, de pointer chaque immeuble en un sommet : deux immeubles triangulaires pointés sont dits proches s'ils sont isométriques sur une grosse boule centrée en leur point base. On est amené à considérer l'espace désingularisant suivant.

**Définition 4.** *On appelle espace des immeubles triangulaires pointés l'ensemble  $\Lambda$  des couples  $(\Delta, *)$  formés d'un immeuble triangulaire  $\Delta$  et d'un point  $*$  de  $\Delta$ , considérés à isomorphisme pointé près, et muni de la topologie définie ci-dessus qui en fait un espace topologique localement compact séparé.*

L'espace  $\Lambda$  est muni d'une « partition en feuilles » naturelle. Une feuille de  $\Lambda$  est par définition une classe d'isomorphisme d'immeuble triangulaire. Nous dirons par abus que

$\Lambda$  est une lamination ; l'espace des feuilles est l'espace  $E$  des immeubles triangulaires. Par exemple si un immeuble triangulaire a un groupe d'automorphismes cocompact, la feuille qui lui correspond dans  $\Lambda$  est compacte. On définit aussi  $\Lambda_P$  et  $\Lambda_q$  correspondant à  $E_P$  et  $E_q$ .

Cette construction met à jour des interactions entre géométrie et dynamique. Nous montrons dans [5] que  $\Lambda_q$  possède de nombreuses composantes minimales non réduites à une feuille compacte. Chacune de ces composantes présente *a priori* un comportement dynamique nouveau, et une géométrie intéressante pour les immeubles correspondants. Dans le présent article, nous utilisons le théorème 2 ci-dessus pour obtenir des renseignements sur la géométrie et la structure algébrique globale d'un immeuble *générique* de  $E_P$ , au sens de Baire. Par définition, une partie générique de  $E_P$  est une partie générique et saturée de la lamination  $\Lambda_P$ .

**Théorème 5.** *Soit  $P$  une famille de plan projectif d'ordre fixé  $q \geq 2$ .*

1. *Une feuille générique de  $\Lambda_P$  est dense dans  $\Lambda_P$ . Ainsi  $\Lambda_P$  est topologiquement transitive (il existe une feuille dense). De plus on peut construire concrètement une infinité non dénombrable de feuilles denses.*
2. *Le groupe d'automorphismes d'un immeuble générique de  $E_P$  est trivial.*

Cet article est présenté de la façon suivante. Dans la partie 2, on rappelle une construction de tous les immeubles triangulaires (voir [4] et [15]) et on prépare la démonstration du théorème 2. Dans la partie 3, on démontre le théorème 2 et son corollaire. La partie 4 décrit  $\Lambda$  et sa structure feuilletée, et démontre le point 1 du théorème 5. Les deux dernières parties sont consacrées à la fin de la preuve du théorème 5. On distingue les cas  $q = 2$  et  $q \geq 3$  car les outils utilisés pour chacun sont différents.

Nous tenons à remercier Étienne Ghys qui nous a invités à travailler ensemble et toujours encouragés, et Frédéric Haglund pour l'intérêt qu'il a porté à ce travail et pour ses nombreux commentaires qui ont permis d'améliorer la version préliminaire de ce texte.

## 2. PRÉLIMINAIRES

**1. Immeubles triangulaires.** Le link en un sommet dans un complexe simplicial est un graphe isomorphe à la sphère de rayon combinatoire 1 centrée en ce sommet. Dans un immeuble triangulaire les links s'identifient à un graphe d'incidence de plan projectif. La réciproque est vraie : tout complexe simplement connexe qui possède une géométrie locale d'immeuble est un immeuble en vertu du théorème suivant.

**Théorème 6** (Tits). *Un complexe simplicial simplement connexe de dimension 2 dont tous les links correspondent à des plans projectifs est un immeuble de Bruhat-Tits.*

On peut voir [2] pour une preuve de ce résultat. Comme nous l'avons mentionné en introduction les immeubles triangulaires sont naturellement munis d'une métrique géodésique (de Bruhat-Tits, voir [7] par exemple), euclidienne en restriction aux faces et à courbure négative en général (i.e. qui vérifie l'inégalité CAT(0)). Les géodésiques pour cette métrique sont toujours contenue dans un plat. On attribue la longueur  $\pi/3$  à chacune des arêtes des links, ce qui correspond à la longueur angulaire naturelle dans l'immeuble.

Soit  $\Delta$  un immeuble triangulaire et  $*$  un sommet de  $\Delta$ . Dans un plat passant par  $*$  une boule simpliciale de rayon  $n$  centrée sur  $*$  est un hexagone de centre  $*$  et de longueur de côtés  $n$ . Une boule simpliciale de centre  $*$  et de rayon  $n$  dans  $\Delta$  est la réunion de tous ces hexagones (notons que ces boules sont convexes pour la métrique CAT(0)), i.e. de tous les disques simpliciaux de rayon  $n$  de tous les plats passant par  $*$ . La sphère simpliciale de centre  $*$  et de rayon  $n$  est le bord de cette boule.

Soit  $s$  un sommet d'une sphère simpliciale  $S_n$  de centre  $*$  et de rayon  $n \geq 1$  de  $\Delta$ . On note  $K$  l'intersection de la boule  $B_n$  (de centre  $*$  et de rayon  $n$ ) et de la boule de rayon 1 de centre  $s$ . Soit aussi  $k = K \cap B_{n-1}$ .

**Lemme 7.** *L'ensemble  $K$  est un cône sur un arbre et  $k$  est un simplexe (un sommet ou un point).*

Démonstration. Le sommet  $s$  et une face quelconque de sa boule de rayon 1, sont toujours inclus dans plat contenant centre  $*$ . On voit alors que deux cas se produisent.

Cas 1 : la géodésique qui relie  $s$  à  $*$  passe par un sommet de  $S_{n-1}$ . Alors  $k$  est composé uniquement de ce sommet et  $K$  est le cône sur une étoile de valence  $q + 1$ .

Cas 2 : la géodésique qui relie  $s$  à  $*$  coupe  $S_{n-1}$  à l'intérieur d'une arête qui est exactement  $k$ . Notons alors  $g$  l'arbre à  $1 + 2q$  arêtes composé de l'arête  $k$  prolongée en ses deux extrémités de  $q$  arêtes. L'ensemble  $K$  est alors le cône sur  $g$ . ■

Ce lemme nous permet d'introduire la définition suivante :

**Définition 8.** *Le sommet  $s$  de  $S_n$  est un sommet coin si  $k$  est un point. On dira que c'est un sommet non coin si  $k$  est une arête.*

Par exemple, tous les sommets d'une sphère de rayon 1 sont des sommets coins.

**2. La tour des links.** Soit  $\Delta$  un immeuble triangulaire et  $*$  un sommet de  $\Delta$ . Dans [4], on définit un graphe intermédiaire entre deux sphères simpliciales consécutives de centre  $*$  : le link d'ordre  $n$ . Les sommets de ce graphe correspondent aux arêtes de  $B_n$  qui ont un sommet dans  $S_{n-1}$  et un autre  $S_n$ . Deux tels sommets  $a$  et  $b$  sont reliés par une arête s'il existe une face de l'immeuble qui contient les deux arêtes de l'immeuble correspondant à  $a$  et  $b$ . La figure 1 montre le link d'ordre 2 dans le cas  $q = 2$ . On peut vérifier que la donnée du link d'ordre  $n$  détermine entièrement la boule de rayon  $n$ .

Pour passer du link au link d'ordre 2, il faut d'une part, remplacer chaque sommet par le graphe d'incidence d'un plan affine (un plan projectif auquel on a enlevé tous les points d'une même droite, disons la droite à l'infini), d'autre part démultiplier chaque

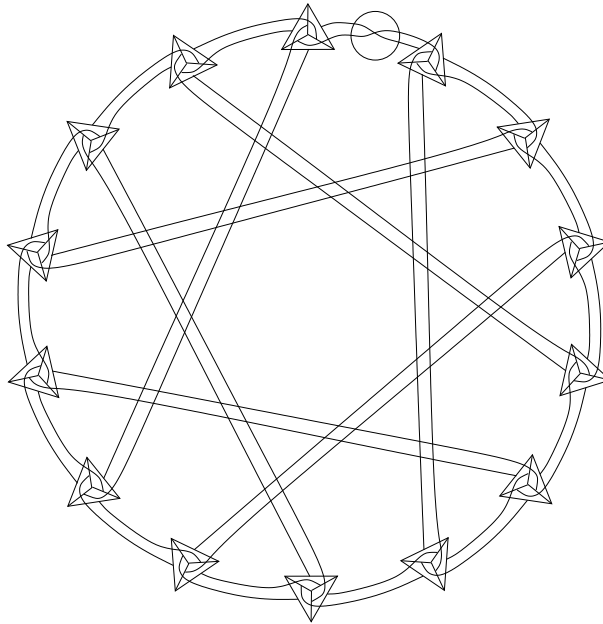


FIG. 1 – Le link d’ordre 2 dans le cas  $q = 2$

arête allant vers ce point en  $q+1$  arêtes, qui vont rejoindre le plan affine en des sommets qui correspondent à des droites parallèles (« elles se couperaient suivant un point de la droite à l’infini »). Cette construction se généralise pour passer d’une boule de rayon  $n$  à une boule de rayon  $n + 1$  en distinguant toutefois la nature des sommets (coin ou non coin).

On appelle *tour des links* la suite  $(L_n)_n$  de familles de graphes finis dont le  $n$ -ième terme  $L_n$  (appelée niveau  $n$  de la tour) est l’ensemble des links d’ordre  $n$  d’immeubles triangulaires à isomorphisme près. De façon équivalente  $L_n$  est l’ensemble des boules d’immeubles triangulaires de rayon  $n$  à isomorphisme près. L’étude des emboîtements entre links et sphères d’ordre supérieur permet de décrire explicitement une construction de tous les immeubles triangulaires (voir [4]).

**3. Prescription des links d’ordre 2 dans le cas  $q = 2$ .** Ce cas est déjà très significatif car il fait apparaître la souplesse dans la construction d’immeubles, ainsi que certaines rigidités.

**Théorème 9** (Tits, [21]). *Il existe exactement deux types de boules de rayon 2 dans le cas  $q = 2$ .*

Cependant, on montre dans [3] que l’invariant qui distingue ces deux types de boules (l’une est appelée boule blanche, l’autre boule noire) n’est pas « localisé ». Cela permet d’obtenir le résultat de prescription forte suivant (démonstré dans [4]) :

**Théorème 10.** *À toute boule  $B$  de rayon  $n$  munie d’une application de prescription de couleur (noir ou blanc) quelconque sur ses sommets de la sphère de rayon  $n - 1$ ,*

on peut associer une boule de rayon  $n + 1$  dont la boule concentrique de rayon  $n$  est isomorphe à  $B$  et respecte le type d'isomorphisme des sommets de la sphère de rayon  $n - 1$  prescrit par la couleur.

L'idée de la preuve de ce théorème est d'associer à chacun des sommets de la sphère de rayon  $n - 1$  au moins une « liaison » de la sphère de rayon  $n + 1$  qui n'interfère que sur la nature de son link d'ordre deux, pas sur celui des autres sommets de la sphère de rayon  $n - 1$ . Il s'agit là d'une méthode très spécifique au cas  $q = 2$ . Cependant cette même approche conduit à un résultat de prescription plus faible (« lemme de coloration ») décrit plus loin dans les cas où  $q \geq 3$ .

Plus précisément nous montrons à la section suivante qu'on peut construire des immeubles triangulaires dont les sommets ont une coloration en noir et blanc prescrite à l'avance, lorsqu'on définit ces deux couleurs comme suit.

**Définition 11.** Soit  $\Delta$  un immeuble triangulaire d'ordre  $q$  et  $s$  un sommet de  $\Delta$ . On dit que  $s$  est blanc si :

- pour  $q = 2$ , la sphère de rayon 2 de centre  $s$  est celle (par exemple) de l'immeuble de  $\mathrm{SL}_3(\mathbf{Q}_2)$  ;
- pour  $q = 3, 4$ , la sphère de rayon 2 de centre  $s$  est celle d'un immeuble classique fixé d'ordre  $q$  ;
- pour  $q \geq 5$ , la sphère de rayon 2 de centre  $s$  est celle d'un immeuble quelconque fixé (classique ou non) d'ordre  $q$ .

On dit que  $s$  est noir s'il n'est pas blanc.

Il est clair que la coloration des sommets d'un immeuble ainsi obtenue est invariante sous son groupe d'automorphismes. Dans les deux paragraphes qui suivent nous donnons les outils qui permettent de montrer le lemme de coloration pour  $q \geq 3$ .

**4. Liaisons projectives.** Dans ce paragraphe on pose  $q \geq 5$ . Soit  $\Delta$  un immeuble triangulaire d'ordre  $q$ .

Considérons une arête  $a$  de  $\Delta$  reliant deux sommets  $s$  et  $s'$ . L'ensemble  $F$  des faces contenant cette arête correspond dans chacun des links aux sommets  $s$  et  $s'$ , à une droite projective. Ainsi, sur  $F$  opèrent simultanément les transformations projectives (qui fixe l'arête  $a$ ) issues du sommet  $s$  et celles issues du sommet  $s'$ . Dès que le nombre de transformations projectives d'une droite est inférieur au nombre de bijections, il se peut que ces deux actions ne soient pas conjuguées par l'application entre les droites projectives déterminée par les faces contenant  $a$ . On dit alors que l'arête  $a$  détermine une *liaison* (entre deux droites projectives) *non projective*.

**Proposition 12.** Soit  $q \geq 5$  et  $P_1, P_2$  deux plans projectifs d'ordre  $q$ . Il existe des liaisons non projectives entre deux sommets dont les links sont associés à  $P_1$  et  $P_2$ .

La preuve de ce résultat repose sur le fait qu'il y a plus de bijections d'une droite affine que de transformations affines dès  $q \geq 5$  (voir [3]). Dans le cas des immeubles classiques une liaison correspond à la restriction d'une polarité (bijection du graphe d'incidence du plan projectif qui échange points et droites).



**5. Rappels de géométrie arguésienne sur la tour des links.** Cette propriété ne sera utilisée que dans les cas  $q = 3, 4$ . Elle pourrait bien sûr s'appliquer pour tout  $q \geq 3$ , mais cela apporterait des restrictions sur les données locales (l'ensemble  $P$  de plans projectifs dans le théorème 2) du type «  $P$  doit contenir un plan arguesien » à partir de  $q \geq 9$ .

Rappelons que l'ensemble des plans projectifs est divisé en deux catégories : les plans projectifs  $P^2(K)$  où  $K$  est un corps et les autres qui ne proviennent pas d'un corps. On a la caractérisation suivante qui permet de distinguer ces deux types de plans projectifs (voir [1]) :

**Théorème 13.** *Un plan projectif est isomorphe à un plan projectif  $P^2(K)$  pour un certain corps  $K$  (éventuellement non commutatif) si et seulement si il vérifie la propriété de Desargues.*

Ainsi étant donnés deux triangles  $ABC$  et  $A'B'C'$  en perspective (i.e. tels que les trois droites  $(AA')$ ,  $(BB')$  et  $(CC')$  soient concourantes) les trois points d'intersection  $(AB) \cap (A'B')$ ,  $(AC) \cap (A'C')$  et  $(CB) \cap (C'B')$  sont toujours alignés dans le cas d'un  $P^2(K)$ , mais pas en général. Cette propriété se traduit sur le graphe d'incidence associé au plan projectif par le fait que certains sous-graphes “se complètent symétriquement” (voir [4] pour plus de détails). Il se trouve qu'il est possible de s'assurer du caractère non arguésien du plan à l'infini, uniquement en connaissant une boule de rayon 2.

**Proposition 14.** *Supposons  $q \geq 3$ . Il existe alors des boules  $B_2$  de rayon 2 telles que tout immeuble contenant au moins une copie de  $B_2$  à pour bord à l'infini un plan projectif non arguésien.*

Une telle boule  $B_2$  sera qualifiée de non classique. L'un des points qui sera essentiel dans la suite est la possibilité de rendre non classique une boule de rayon 2 en ne modifiant qu'une seule de ses liaisons (voir [4]).

### 3. RÉSULTATS GÉOMÉTRIQUES

Fixons l'ordre  $q \geq 2$  des immeubles considérés.

**1. Le cône de définition d'une projection.** Soit  $\Delta$  un immeuble triangulaire. Considérons deux sommets distincts  $*$  et  $s$  (avec  $d = d(*, s)$ ) de  $\Delta$  et notons  $S_k$  la sphère de centre  $*$  de rayon  $k$ . On note  $Q = B_1 \cap S_{d+1}$  où  $B_1$  est la boule centrée sur  $s$  et de rayon 1. Enfin, on définit  $C_1$  comme l'union des faces de  $B_1$  qui contiennent une arête de  $Q$ .

**Définition 15.** *Avec les notations précédente on définit un ensemble  $C_s^*$  composé des points de  $C_1$  et des points  $a$  de  $\Delta$  qui n'appartiennent pas à la boule de centre  $*$  et de rayon  $d + 1$  tels que  $[s, a] \cap Q \neq \emptyset$ . On appellera cet ensemble  $C_s^*$  le cône de définition de la projection sur  $s$  relative à la sphère de centre  $*$  passant par  $s$ .*

Précisons la nature du link à la pointe de ce cône (i.e. au sommet  $s$ ).

**Lemme 16.** *Dans  $C_s^*$  le link en  $s$  est le complémentaire d'un arbre ayant  $(q + 1)^2$  arêtes si  $*$  est un coin et  $2q(q + 1) + 1$  sinon.*

Démonstration. En reprenant les notations du lemme 7, le complémentaire du link en  $s$  de  $C_s^*$  s'obtient en ajoutant  $q$  arêtes à l'extrémité des feuilles du link de  $K$ . En attribuant la longueur  $\pi/3$  aux arêtes des links de  $\Delta$ , ce complémentaire est exactement la boule de rayon  $2\pi/3$  centrée en un sommet si  $s$  est un coin et la boule de rayon  $5\pi/6$  centrée au milieu d'une arête sinon. Dans les deux cas ce graphe est un arbre avec le nombre d'arête annoncé. ■

Le cône  $C_s^*$  est une union de faces pour lesquelles toute arête est incidente à au moins deux faces. On distingue les arêtes intérieures de celles du bord comme suit.

**Définition 17.** *On note  $T_s^*$  l'ensemble des arêtes de  $C_s^*$  et de leurs extrémités qui sont incidentes dans  $\Delta$  à une face qui n'appartient pas à  $C_s^*$ .*

**Lemme 18.**  *$T_s^*$  est un arbre dont les sommets différents de  $*$  ont pour valence  $q^2 + 1$  et dont le sommet  $*$  a pour valence  $2q$ .*

Démonstration. Les arêtes de  $T_s^*$  sont incidentes à exactement une face qui n'est pas dans  $C_s^*$  et le segment géodésique entre un sommet de  $T_s^*$  et  $*$  est par définition une union d'arêtes de  $\Delta$ . Rappelons que dans un link de  $\Delta$  il y a exactement  $q^2$  sommets à distance  $\pi$  d'un sommet quelconque. Cela précise la valence des sommets de  $T_s^*$  différents de  $s$ , celle de  $s$  est immédiate à obtenir. Ainsi,  $T_s^*$  est un arbre qui se rétracte de façon géodésique sur le sommet  $s$ . ■

**Lemme 19.** *Le link dans  $C_s^*$  en un sommet de  $T_s^*$  différent de  $s$  est le complémentaire d'un arbre ayant  $q^2 + q + 1$  arêtes.*

Démonstration. Soit  $a$  un sommet de  $T_s^*$  différent de  $s$ . La géodésique qui relie  $a$  au point  $s$  est composée d'une succession d'arêtes. Celle qui contient  $a$  contient une seule face  $F$  de  $\Delta$  qui ne soit pas dans  $C_s^*$ . Dans le link en  $a$  de  $\Delta$  le complémentaire du link de  $C_s^*$  s'obtient en prolongeant l'arête qui correspond à  $F$  en un seul de ses sommets, sur une longueur totale de  $\pi$  (ajouter deux arêtes successives). Il s'agit bien là d'un arbre ayant  $1 + q(q + 1)$  arêtes. ■

**2. L'âme du cône de définition d'un coin.** Soit  $\Delta$  un immeuble triangulaire. Considérons le cône de définition  $C_s^*$  de la projection sur un sommet  $s$  relativement à une sphère  $S$  de centre  $*$  passant par  $s$ . Supposons que  $s$  soit un coin de  $S$ .

On considère l'ensemble

$$A_s^* \subset C_s^*$$

de toutes les demi-droites singulières issues de  $*$  et contenant le segment  $[*, s]$ .

**Définition 20.** On appelle  $A_s^*$  l'âme du cône  $C_s^*$  issu du coin  $s$ .

Il est clair que  $A_s^*$  est uniquement constitué de sommets coins de sphères centrées en  $*$ . Ainsi  $A_s^*$  est un arbre, dont la racine  $s$  a valence  $q^2$ , et les descendants  $q^2 + 1$ .

**Proposition 21.** Soient  $s_1$  et  $s_2$  deux sommets coins distincts de  $S$ . L'intersection de l'âme  $A_{s_1}^*$  et du cône  $C_{s_2}^*$  est vide. De plus, la distance de  $A_{s_1}^*$  à  $C_{s_2}^*$  est au moins égale au rayon de  $S$ .

Il suffit en effet de le vérifier dans les plats, pour lesquels le résultat est immédiat.

**3. Coloration des sommets d'immeuble triangulaire.** Dans ce paragraphe nous démontrons le premier point du théorème 2 de l'introduction.

**Lemme 22** (Lemme de coloration). Soient  $B^2$  une boule de  $E_P$  de rayon deux, qu'on suppose classique dans les cas  $q = 3$  et  $q = 4$ , et  $B_0$  une autre boule de  $E_P$  de rayon  $R \geq 1$  de centre  $O$ . Il existe une boule  $B_1$  de  $E_P$  de rayon  $R + 1$  contenant  $B_0$  et de même centre telle qu'aucune de ses boules de rayon deux centrées sur les sommets de la sphère de centre  $O$  de rayon  $R - 1$  ne soient isomorphes à  $B^2$ .

Démonstration. Le cas  $q = 2$  se déduit immédiatement du théorème de prescription rappelé à la section 2. Supposons donc  $q \geq 3$ . Partons d'une boule  $B_1'$  quelconque de centre  $*$ , contenant  $B_0$  et de même centre. On peut toujours satisfaire la contrainte des links qui doivent être du type  $P$  tout en conservant la liberté donnée par les vrilles au niveau  $R + 1$  (voir [4, page 594-595] pour ce point précis). On se fixe  $A$  un sommet de la sphère de rayon  $R - 1$  centrée sur  $*$ . Dans la construction des immeubles triangulaires via la tour des links, on constate qu'il est possible de modifier une seule liaison au niveau  $R + 1$  sans modifier aucun des types d'isomorphismes des boules de rayon deux du niveau  $R - 1$  sauf pour une d'entre elles : celle qui est centrée sur  $A$ . Il reste donc à vérifier que quel que soit l'ordre  $q$ , on peut modifier le type d'un link d'ordre deux en modifiant seulement l'une de ses liaisons.

Pour  $q \geq 5$ , on peut jouer sur le nombre de liaisons projectives du link d'ordre deux : il est possible de le modifier d'une unité en plus ou en moins.

Pour  $q = 3$  ou  $4$ , en modifiant une seule liaison, on peut transformer une configuration de Desargues classique en une configuration qui ne se complète plus symétriquement. Ainsi, on peut s'assurer du caractère non classique (voir la proposition 14) d'un link d'ordre deux en ne modifiant qu'une seule liaison. Nous avons pris soin de supposer la boule  $B^2$  classique, il est donc bien possible de rendre non classique celle qui se trouve au-dessus de  $A$ . ■

Nous dirons de façon plus concise qu'une boule  $B_0$  peut être *couronnée* (i.e. plongée dans une boule plus grosse de même centre) de telle sorte qu'aucune des 2-boules de sa périphérie ne soit du type  $B^2$  donné. Dans un immeuble, deux boules de rayon deux voisines peuvent s'intersecter sur une partie relativement grande. Malgré cela, dans le cas où  $q = 2$ , on peut prescrire les types des 2-boules. Pour  $q \geq 3$  il n'en est rien : il est très facile de vérifier cela pour  $q \geq 5$  en constatant qu'une 2-boule classique ne peut

pas s'intersecter avec une 2-boule dont aucune liaison n'est projective (cf. §2.). Les cas  $q = 3$  et  $q = 4$  sont intermédiaires et donc plus délicats.

**4. Plongement de boules dans un même immeuble.** Nous montrons maintenant le second point du théorème 2 de l'introduction. On se fixe toujours un ensemble de plans projectifs  $P$ .

**Lemme 23** (Lemme de chirurgie). *Soit  $B_1$  une boule d'immeuble triangulaire de  $E_P$ . Pour toute autre boule  $B_2$  de  $E_P$ , il existe un immeuble triangulaire  $\Delta \in E_P$  contenant à la fois  $B_1$  et  $B_2$ . De plus, étant donné un coin  $s$  de  $B_1$ , on peut positionner  $B_2$  de sorte que son centre soit sur l'âme du cône issu de  $s$  relativement à  $B_1$  dans  $\Delta$ .*

Démonstration. Nous construisons l'immeuble  $\Delta$  en recollant le long de leurs bords deux morceaux d'immeubles de  $E_P$  qui contiennent chacun l'une des boules  $B_1$  et  $B_2$ . Cette opération sera possible grâce en particulier, au fait que ces bords sont isomorphes et ne dépendent que de l'entier  $q$ . Soit  $B_1 \subset \Delta_1$  et  $B_2 \subset \Delta_2$  deux boules d'immeubles triangulaires, respectivement de centre  $*_1$  et  $*_2$  et de rayon  $r_1$  et  $r_2$ . Considérons un plat  $\Pi$  dans  $\Delta_2$  passant par  $*_2$  et fixons une droite  $d \subset \Pi$  passant par  $*_2$  et par un coin de la sphère  $S_2 = \partial B_2$ . Il est facile de trouver deux points  $*$  et  $s$  sur  $d$  tels que la trace  $B_2 \cap \Pi$  de  $B_2$  sur  $\Pi$  soit incluse dans  $C_s^* \cap \Pi$  (rappelons que  $C_s^*$  est le cône de définition de la projection sur  $s$  relative à  $*$ ). On a alors  $B_2 \subset C_s^*$ .

Par construction,  $s$  est un coin de la sphère centrée en  $*$  et passant par  $s$ , et le centre de  $B_2$  est sur l'âme de  $C_s^*$ .

Considérons un coin  $s_1$  de  $B_1$ . Les arbres  $T_{s_1}^* \subset \Delta_1$  et  $T_s^* \subset \Delta_2$  bordant chacun des cônes  $C_{s_1}^*$  et  $C_s^*$  sont isomorphes d'après le lemme 18. Découpons les immeubles  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$  le long de ces arbres, et recollons les complexes simpliciaux

$$\Delta_1 \setminus \overset{\circ}{C}_{s_1}^* \text{ et } C_s^*.$$

Nous devons vérifier qu'il y a un bon recollement le long de cet arbre qui permette de conserver des links au niveau de ses sommets, dans l'ensemble  $P$ . Plus précisément, on procède par récurrence en remontant le long de l'arbre en partant du sommet  $s$ . D'après le lemme 16, il est possible de recoller les arêtes contenant le sommet  $s$  pour reconstruire en  $s$  un link identique à celui de  $\Delta_2$  en  $s$  (qui est donc dans  $P$ ). On procède ainsi pour les autres sommets, étage après étage. D'après le lemme 19, il s'agit de reconstruire un link donné  $l$  dans  $P$  à partir du complémentaire  $\mu$  (de ce même link) d'un arbre  $\tau = l \setminus \mu$  et de cet arbre  $\tau$  qui est recollé à  $\mu$  suivant un seul sommet. Il n'y a donc aucune obstruction. Enfin, d'après le théorème 6, le polyèdre obtenu est bien un immeuble triangulaire de  $E_P$ . ■

**Corollaire 24.** *Toute suite de boule s'injecte dans un même immeuble.*

En particulier il existe un immeuble contenant tous les types d'isomorphismes de boules d'immeubles triangulaires.

**Corollaire 25** (Chirurgie des cônes). *Soit  $B$  une boule de rayon  $r$  centrée en  $*$ . Pour chaque coin  $s$  de la sphère  $S$  bordant  $B$ , considérons un immeuble triangulaire  $\Delta_s$  contenant  $B$  et notons  $C_s^*$  le cône de définition de la projection sur  $s$  relative à  $B$ . Il existe un immeuble triangulaire  $\Delta$  contenant  $B$  tel que, en notant  $C_s^*(\Delta)$  le cône de définition de  $s$  dans  $\Delta$ , le  $r$ -voisinage de l'âme de  $C_s^*(\Delta)$  dans  $C_s^*(\Delta)$  soit isomorphe au  $r$ -voisinage de l'âme de  $C_s^*$  dans  $C_s^*$ .*

Démonstration. Numérotons les sommets coin de  $S$  et répétons successivement l'opération de chirurgie décrite dans la démonstration précédente. Si  $s$  est un sommet coin de  $S$ , effectuer cette chirurgie sur un sommet coin  $s' \neq s$  ne modifie pas le type d'isométrie du  $r$ -voisinage dans  $C_s^*$  de l'âme au dessus de  $s$  (prop. 21). ■

**5. Une infinité non dénombrable d'immeubles à données locales fixés.** Nous sommes désormais en mesure de montrer le résultat suivant :

**Lemme 26.** *Soit  $P$  une famille de plan projectif fixé d'ordre  $q \geq 2$ . Toute boule  $B$  d'un immeuble de  $E_P$  peut se prolonger en deux boules  $B_1$  et  $B_2$  de même rayon de  $E_P$  qui ne sont pas isomorphes.*

Démonstration. Considérons une boule  $B^2$  de rayon 2 classique et une boule  $B$  quelconque de rayon  $R$ . D'après le lemme 23, il existe une boule  $B_1$  qui prolonge  $B$  de rayon  $R' > R$  et de même centre, qui fait apparaître le type de boule  $B^2$  parmi les sommets en dehors de la boule  $B$ . Or, d'après le lemme 22 (répété  $R' - R$  fois) il existe une autre boule  $B_2$  prolongeant  $B$ , de même centre que  $B$  et de même rayon  $R'$  que  $B_1$ , dont aucun des sommets hors de  $B$  ne soient du type  $B^2$ . Ainsi, les deux boules  $B_1$  et  $B_2$  ne peuvent pas être isomorphes. ■

**Remarque.** *Dans le cas  $q = 2$  ce lemme se déduit directement du théorème 10 de prescription. Aussi, dans le cas  $q \geq 5$ , jouer sur le nombre de liaisons projectives permet de montrer ce résultat sans faire appel au lemme 23.*

On en déduit le résultat suivant énoncé en introduction (Corollaire 3).

**Théorème 27.** *Soit  $P$  une famille de plans projectifs. Il existe une infinité non dénombrable d'immeubles deux à deux non isométriques dans  $E_P$ .*

Démonstration. En effet, d'après le lemme précédent, il existe une infinité non dénombrable de tours de links, à isomorphisme de tours près. Or à un immeuble ne peuvent correspondre qu'au plus un nombre dénombrable de tours (l'ensemble des sommets d'un immeuble étant bien sûr dénombrable), donc l'ensemble des immeubles qui correspondent à  $P$  est infini non dénombrable. ■

En faisant varier les corps locaux, tout en conservant le même corps résiduel  $\mathbb{F}_q$ , on peut montrer [19] qu'il existe une infinité d'immeubles classiques deux à deux non isométriques ayant même ordre  $q$ . Dans le cas des immeubles hyperboliques on peut consulter [9, 10].

#### 4. L'ESPACE DES IMMEUBLES TRIANGULAIRES

Cette section a pour but de construire l'espace  $\Lambda$  des immeubles triangulaires pointés à isomorphisme près. C'est un espace topologique séparé dont les points sont des classes d'isomorphisme d'immeubles pointés. La relation d'isomorphisme sur  $\Lambda$  définit une partition en feuille (à feuilles cellulaires) dont l'espace des feuilles est l'espace  $E$  des immeubles triangulaires. Cette lamination admet une transversale naturelle  $S \subset \Lambda$  formé par les sommets des feuilles de  $\Lambda$ . On décrit  $S$  comme une limite projective à l'aide de la tour des links.

Fixons l'ordre  $q \geq 2$  ainsi qu'une famille  $P$  de plan projectifs d'ordre  $q$ . Nous décrivons ci-dessous la topologie de  $\Lambda_P$ ; si  $P' \subset P$  est une sous-famille de plan projectifs alors  $\Lambda_{P'}$  est une partie compacte de  $\Lambda_P$ .

**1. L'espace compact  $\Lambda_P$ .** On appelle immeuble pointé la donnée d'un couple  $(\Delta, y)$  formé d'un immeuble triangulaire  $\Delta$  de  $E_P$  et d'un point  $y \in \Delta$ . Deux immeubles pointés  $(\Delta, y)$  et  $(\Delta', y')$  sont dits isomorphisme s'ils existe un isomorphisme de  $\Delta$  sur  $\Delta'$  envoyant  $y$  sur  $y'$ . On écrit  $[\Delta, y]$  pour la classe d'isomorphisme de  $(\Delta, y)$ .

Soit  $\Lambda_P$  l'ensemble des classes d'isomorphisme d'immeubles pointés. Considérons la valuation

$$v : \Lambda_P \times \Lambda_P \rightarrow [0, \infty]$$

définie par

$$v(Y, Y') = \sup\{r \in [0, \infty], B_Y(r) \simeq B_{Y'}(r)\},$$

où  $Y = [\Delta, y]$  et  $Y' = [\Delta', y']$  sont deux éléments de  $\Lambda_P$  et  $B_Y(r)$  est la boule fermée de centre  $y$  et de rayon  $r$  dans  $\Delta$  (pour la métrique CAT(0)). Le symbole «  $\simeq$  » signifie qu'il existe une isométrie entre  $B_Y(r)$  et  $B_{Y'}(r)$ . On munit  $\Lambda_P$  de la topologie pour laquelle une suite  $(Y_n)_n$  de points de  $\Lambda_P$  converge vers  $Y \in \Lambda_P$  si et seulement si, en notant  $Y = [\Delta, y]$  et  $Y_n = [\Delta_n, y_n]$ , il existe deux suites  $z_n^1 \in \Delta$  et  $z_n^2 \in \Delta_n$  telles que

$$d_\Delta(z_n^1, y) \rightarrow 0, \quad d_{\Delta_n}(z_n^2, y_n) \rightarrow 0, \quad \text{et } v((\Delta, z_n^1), (\Delta_n, z_n^2)) \rightarrow \infty.$$

**Proposition 28.** *L'espace topologique  $\Lambda_P$  est séparé, compact et sans point isolé.*

*Démonstration.* Montrons que  $\Lambda_P$  est séparé. Soient deux points distincts  $Y = [\Delta, y]$  et  $Y' = [\Delta', y']$  de  $\Lambda_P$ . Comme les immeubles pointés  $(\Delta, y)$  et  $(\Delta', y')$  ne sont pas isomorphes et que les boules de rayon 1 dans un immeuble d'ordre  $q$  sont compactes, il existe un nombre réel  $r > 0$  tel que pour tout  $z \in B_\Delta(y, 1)$  et tout  $z' \in B_{\Delta'}(y', 1)$  on ait  $B_\Delta(z, r) \not\simeq B_{\Delta'}(z', r)$ . Soit

$$V_Y = \{Z \in \Lambda_P, \exists z \in B_\Delta(y, 1), v([Y, z], Z) > r\}.$$

Il est clair que  $V_Y$  et  $V_{Y'}$  sont deux voisinages disjoints de  $Y$  et  $Y'$  respectivement.

Montrons que  $\Lambda_P$  est compact. Soit  $Y_k = [\Delta_k, y_k]$  une suite d'éléments de  $\Lambda_P$ . Notons  $*_k$  le (ou l'un des) plus proche sommet de  $y_k$  dans  $\Delta_k$ . Pour tout  $r \geq 0$  fixé, les boules de rayon  $r$  et de centre  $*_k$  dans  $\Delta_k$  constituent un nombre fini de classes d'isomorphisme et, par procédé diagonal, la suite  $(\Delta_k, *_k)$  admet une valeur d'adhérence  $(\Delta, *)$ . Supposons, quitte à extraire, qu'il existe un isomorphisme  $\theta_k$  de  $B_{\Delta_k}(*_k, k+1)$  sur  $B_{\Delta}(*, k+1)$ , et que  $d_{\Delta}(y, \theta_k(y_k)) \leq \frac{1}{k}$  pour un point  $y \in \Delta$  (la boule de rayon 1 est compacte). Alors  $Y_k$  converge vers  $Y = [\Delta, y]$ .

Montrons que  $\Lambda_P$  n'a aucun point isolé. Soit  $Y = [\Delta, y]$  un point de  $\Lambda_P$  et  $r$  un nombre réel strictement positif. Il suffit de montrer l'existence d'un point  $Y' = [\Delta', y']$  de  $\Lambda_P$ , distinct de  $Y$ , et tel que  $v(Y, Y') \geq r$ . Or ceci est une simple traduction du fait qu'il existe un immeuble non isométrique à  $\Delta$  coïncidant avec lui sur la boule de centre  $y$  et de rayon  $r$  dans  $\Delta$  (voir la démonstration du Théorème 27). ■

**2. Structure de lamination (cellulaire) sur  $\Lambda_P$ .** Soit  $\Delta$  un immeuble triangulaire de  $E_P$ . On définit une application

$$\rho_{\Delta} : \Delta \rightarrow \Lambda_P$$

par

$$y \in \Delta \mapsto [\Delta, y] \in \Lambda_P.$$

Notons que si  $\theta : \Delta \rightarrow \Delta$  est un isomorphisme isométrique de  $\Delta$ , alors  $\rho_{\Delta}(y) = \rho_{\Delta}(\theta(y))$  par définition de  $\Lambda_P$ . Réciproquement si  $\rho_{\Delta}(y) = \rho_{\Delta}(y')$ , il existe un isomorphisme de  $\Delta$  qui envoie  $y$  sur  $y'$ . Ainsi  $\rho_{\Delta}$  passe au quotient en un homéomorphisme de  $\Delta/\text{Aut}(\Delta)$  sur son image. Notons que lorsque  $\Delta$  varie, les images de  $\rho_{\Delta}$  sont disjointes ou confondues. On appelle *feuille* de  $\Lambda_P$  chacune de ces images. Chaque feuille est munie d'une structure cellulaire qui en fait un quotient d'immeuble triangulaire.

L'espace  $\Lambda_P$  admet l'espace compact

$$S_P \subset \Lambda_P$$

des sommets des feuilles de  $\Lambda_P$  pour transversale totale (on rappelle que transversale signifie que l'intersection de  $S_P$  avec chaque feuille est dénombrable, et totale que  $S_P$  rencontre toutes les feuilles). La relation d'équivalence transverse  $R_P$  sur  $S_P$  est donné par la « dynamique du point base » : deux points  $X = [\Delta, *]$  et  $X' = [\Delta', *']$  de  $S_P$  sont équivalents si et seulement si il existe un isomorphisme entre  $\Delta$  et  $\Delta'$ . Dans cet article nous n'utiliserons pas la structure borélienne (ou même topologique) naturelle sur  $R_P$ .

Rappelons brièvement que les immeubles ont été introduits (par Tits) pour géométriser l'étude de certaines classes de groupes, qui apparaissent alors comme groupe d'automorphismes d'une structure géométrique donnée (les immeubles triangulaires sont associés à  $\text{SL}_3(K)$  où  $K$  est un corps local). En rang 2 il n'y a pas de bonne correspondance entre groupes et géométries, et de nombreux types d'immeubles se côtoient dans  $\Lambda_P$ . En particulier, des immeubles exotiques (cocompacts) donnent, comme les

immeubles classiques, des feuilles compactes. Comme nous le montrons plus bas, un immeuble générique se situe à l'extrême opposé, il a un groupe d'automorphismes trivial et contient toutes les géométries possibles (cf. prop. 30).

**Proposition 29.** *La lamination  $\Lambda_P$  est topologiquement transitive (il existe une orbite dense).*

En effet c'est équivalent à l'existence d'un immeuble triangulaire contenant une copie isométrique de chaque boule d'immeuble triangulaire, et ceci fait l'objet du lemme 23.

**3. L'espace transverse des sommets comme limite projective.** Soit  $P$  une famille de plan projectifs fixés. La *tour des links* de  $E_P$  est par définition la suite infinie  $(L_n)$  dont le  $n$ -ième terme  $L_n$  est l'ensemble des classes d'isomorphisme de boules de rayon  $n$  d'immeubles de  $E_P$  (voir la section 2.). Cette suite est en limite projective

$$* \xleftarrow{p_1} L_1 \xleftarrow{p_2} L_2 \xleftarrow{\quad} \dots$$

où  $p_n : L_n \rightarrow L_{n-1}$  applications associées aux rétractions canoniques qui envoient une boule de rayon  $n$  sur sa boule concentrique de rayon  $n - 1$ . L'espace

$$\tilde{S}_P = \varprojlim_n L_n$$

obtenu comme limite projective des niveaux est un espace topologique compact (une base d'ouverts pour cette topologie est constituée par la famille dénombrable des classes d'isomorphismes de boules de rayon fini).

Plus précisément  $\tilde{S}_P$  est l'espace des suites  $s = (x_0 = *, x_1, x_2, \dots)$  telles que  $x_i = p_{i+1}(x_{i+1}) \in F_i$  pour tout  $i \geq 1$ . Chaque point  $s \in \tilde{S}_P$  s'identifie avec une classe d'isomorphisme

$$(\Delta_s, *s) = \varinjlim x_i$$

d'immeuble pointé (où la limite est relative aux inclusions canoniques d'une réalisation géométrique). En effet il est clair que deux immeubles pointés isomorphes  $(\Delta, *)$  et  $(\Delta', *')$ , i.e. tels qu'il existe un isomorphisme isométrique  $\Delta \rightarrow \Delta'$  envoyant  $*$  sur  $*'$ , définissent le même point de  $S_P$ , et la réciproque s'obtient par procédé diagonal.

L'application  $s \mapsto (\Delta_s, *s)$  identifie  $\tilde{S}_P$  à l'ensemble  $S_P$  construit au paragraphe précédent. Il est facile de voir que cette application est un homéomorphisme. Notons que  $\tilde{S}_P$  est un espace de Cantor (du fait que  $\#F_i \rightarrow \infty$ , voir aussi la prop. 28). L'application

$$d(X, X') = e^{-v(X, X')}$$

définit une distance ultramétrique sur  $\tilde{S}_P$  compatible avec la topologie ambiante.



**4. Notion de généricité pour les immeubles triangulaires.** Une propriété d'immeuble triangulaire (e.g. avoir un groupe d'automorphismes trivial) définit un partie saturée de  $\Lambda_P$ . On dira que cette propriété est *générique au sens de Baire* si cette partie est intersection dénombrable d'ouverts denses de  $\Lambda_P$  (de façon équivalente, on peut remplacer  $\Lambda_P$  par la transversale  $S_P$  des sommets). On définit ainsi une notion de généricité sur l'espace quotient  $E_P$ . Donnons un exemple de propriété générique.

**Proposition 30.** *Une feuille générique de  $\Lambda_P$  est dense. En d'autres termes, un immeuble triangulaire générique au sens de Baire contient tous les types d'isomorphismes de boules de rayon fini.*

Démonstration. Soit  $B$  une boule d'immeuble triangulaire (centrée en un sommet). L'ensemble  $O(B)$  des immeubles pointés contenant la boule  $B$ , qui est clairement ouvert, est dense d'après le lemme 23. Par suite  $\cap_B O(B)$  est générique. ■

## 5. TRIVIALITÉ DU GROUPE D'AUTOMORPHISMES D'UN IMMEUBLE GÉNÉRIQUE – LE CAS $q = 2$

Les immeubles considérés dans ce paragraphe sont triangulaires d'ordre  $q = 2$  fixé. Rappelons que  $S_2 \subset \Lambda_2$  est l'espace des (classes d'isomorphismes d') immeubles pointés en un sommet. Il s'agit d'un espace ultramétrique compact : la distance entre deux immeubles pointés  $X = (\Delta, *)$  et  $X' = (\Delta', *')$  est  $e^{-d}$  où  $d$  est le plus grand entier tel que les boules de centre  $*$  et  $*'$  (de  $\Delta$  et  $\Delta'$  respectivement) soient isomorphes. Dans la suite, quand on parlera de boule de  $X$ , il s'agira par défaut de boule de centre  $*$  dans  $\Delta$ .

**1. Trivialité des sous-groupes d'isotropie.** Pour tout immeuble  $X \in S_2$  et pour  $i \leq j$ , on note  $G_j^i(X)$  le groupe des automorphismes de la boule de rayon  $j$  qui fixe point par point la boule de rayon  $i$ . On a clairement les inclusions  $G_j^{i+1}(X) \subset G_j^i(X)$ . Notons également que  $G_j^0(X)$  est le groupe de tous les automorphismes de la boule de rayon  $j$ .

Pour tous  $i \leq j$ , on définit :

$$O_j^i = \{X \in S_2, G_j^i(X) = G_j^0(X)\} \text{ et } O^i = O_\infty^i = \bigcup_{j \geq i} O_j^i.$$

En d'autres termes,  $O^i$  est l'ensemble des immeubles pointés dont le groupe des automorphismes qui fixent le point base  $*$  fixe aussi la boule de rayon  $i$ .

**Proposition 31.** *Les ensembles  $O^i$  sont ouverts et denses dans  $S_2$ .*

Démonstration. Il est clair que chacun des  $O_j^i$  est ouvert : en effet, soit  $X \in O_j^i$ , alors tout immeuble qui coïncide avec  $X$  au moins sur la boule de rayon  $j$  est dans  $O_j^i$ .

Montrons que les  $O^i$  sont denses. On considère donc un immeuble  $X \in S_2$  et des entiers  $N > i$ . On va montrer que la boule (de  $S_2$ ) de centre  $X$  et de rayon  $e^{-N}$  rencontre  $O^i$ . Pour cela, il suffit de construire une boule d'immeuble  $B$  de rayon  $M > N$  qui contienne la boule  $B_0$  de  $X$  de rayon  $N$  telle qu'on ait :  $G_M^i(B) = G_M^0$ . Notons  $c$  le nombre de sommets coins de la sphère de  $X$  de rayon  $N - 1$  et désignons par  $A_k$  ces sommets,  $k = 1..c$ . Il existe alors un entier  $M > N$  (par exemple  $M = N + c$  convient) et une boule  $B \supset B_0$  de rayon  $M$  tel que dans la couronne de rayons  $N - 1 \leq M - 1$  la proportion  $p_k$  de sommets coins noirs de l'âme au-dessus de  $A_k$  soit dans l'intervalle  $]\frac{k-1}{c}, \frac{k}{c}[$  et cela pour tout  $k = 1..c$  (rappelons que dans le cas  $q = 2$  un sommet est dit blanc si sa boule de rayon deux est d'un type, et noir s'il est de l'autre type). Ceci est possible grâce au théorème 10 de prescription des types des boules de rayon deux.

Le groupe d'automorphismes d'une telle boule  $B \supset B_0$ , fixe alors tous les sommets coins de la sphère de rayon  $N - 1$  (un automorphisme permute les âmes et les âmes sont disjointes). Or un automorphisme qui fixe les sommets coins d'une sphère, fixe aussi tous ses disques plans et donc toute la boule point par point. Ainsi, tout automorphisme de  $B$  fixe la boule de rayon  $i$ .

Finalement, tout immeuble dont la boule de rayon  $M$  est  $B$  se trouve dans l'intersection de  $O^i$  et de la boule de centre  $X$  et de rayon  $e^{-N}$ . ■

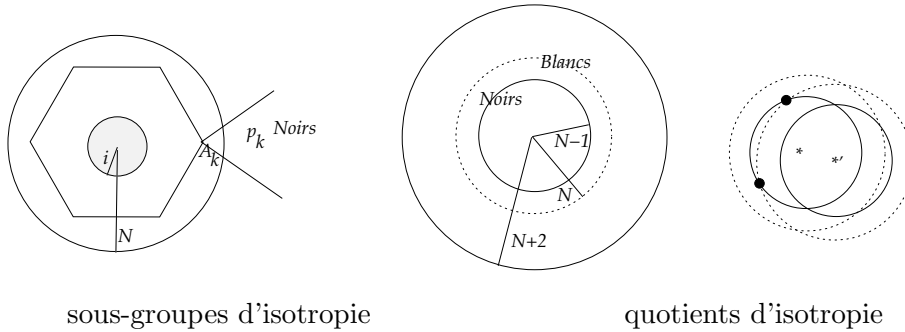


FIG. 2 – Trivialité du groupe d'automorphismes

**2. Trivialité des quotients d'isotropie.** On note  $U_k$ , l'ensemble des immeubles de  $S_2$  qui n'ont pas d'automorphisme  $\phi$  qui envoie le point base  $*$  sur un point  $\phi(*) \neq *$  à distance  $\leq k$ .

**Proposition 32.** *Les ensembles  $U_k$  sont ouverts et denses dans  $S_2$ .*

Démonstration. Soit  $X$  un point de  $U_k$ . Les immeubles obtenus à partir de  $X$  en déplaçant le point base  $*$  sur tous les sommets  $*' \neq *$  de la boule de  $X$  de centre  $*$  et de rayon  $k$  diffèrent tous de  $X$ . Ainsi, il existe un nombre  $M > 0$  tel que la boule de centre  $*$  et de rayon  $M$  de  $X$  soit différente de toutes les autres boules de  $X$  de centres  $*'$  et de rayon  $M$  (avec  $d(*, *) \leq k$ ).

On voit donc alors que la boule de  $S_2$  de centre  $X$  et de rayon  $e^{-M-k}$  est entièrement incluse dans  $U_k$ . Les ensembles  $U_k$  sont donc bien ouverts.

Pour voir qu'ils sont denses, considérons un immeuble  $X \in S_2$  et des entiers  $N > k$ . On va montrer que la boule (de  $S_2$ ) de centre  $X$  et de rayon  $e^{-N}$  rencontre  $U_k$ . On note  $B_0$  la boule de  $X$  de rayon  $N$ . On peut construire une boule  $B \supset B_0$  de rayon  $N + 2$  telle tous les sommets de sa sphère de rayon  $N - 1$  soient noirs alors que tous les sommets de sa sphère de rayon  $N$  sont blancs. Soit  $Y$  un immeuble dont la boule de rayon  $N + 2$  soit  $B$ , montrons que  $Y \in U_k$ . On considère donc un automorphisme de  $Y$  qui envoie  $*$  sur  $*' \neq *$  tel que  $d(*, *') \leq k$ . Puisque  $k < N$  la sphère de  $Y$  de centre  $*'$  et de rayon  $N$  ne peut pas être toute blanche car elle rencontre la sphère de centre  $*$  et de rayon  $N - 1$  qui est toute noire (on peut vérifier cela très facilement sur un plat passant par  $*$  et  $*'$ ). ■

### 3. Démonstration du théorème.

**Théorème 33.** *Dans l'espace des immeubles pointés d'ordre 2, génériquement au sens de Baire, le groupe de tous les automorphismes d'un immeuble est trivial.*

Démonstration. Les ouverts  $O^i$  et  $U_k$  pour  $i, k \in \mathbf{N}$  sont denses. Un immeuble qui est dans l'intersection  $\bigcap_{i \geq 0} O^i$  n'a pas d'automorphisme non trivial qui fixe le point base  $*$ . De plus, un immeuble qui est dans l'intersection dense suivante  $\bigcap_{k \geq 0} U_k$  n'a pas d'automorphisme qui déplace  $*$ . Ainsi tout immeuble de l'intersection

$$\bigcap_{i \geq 0} O^i \cap \bigcap_{k \geq 0} U_k$$

a un groupe d'automorphismes trivial. ■

## 6. TRIVIALITÉ DU GROUPE D'AUTOMORPHISMES D'UN IMMEUBLE GÉNÉRIQUE – LE CAS $q \geq 3$

Supposons maintenant l'ordre  $q \geq 3$  et fixons une famille  $P$  de plan projectifs d'ordre  $q$ . Dans cette section les sommets des immeubles considérés sont colorés au sens de la définition 11. Rappelons qu'on ne peut plus prescrire en toute liberté ces couleurs car les boules de rayon deux deviennent trop grosses et peuvent contenir localement des invariants non triviaux.

**Lemme 34.** *Étant donnée une boule  $B$  de centre  $*$  de rayon au moins 2 de  $E_P$ , on peut augmenter à volonté (par chirurgie dans le complémentaire de  $B$ ) le nombre de sommets noirs de l'âme  $A_s^*$  d'un sommet coin  $s$  du bord de  $B$  donné, sans modifier ce nombre pour les sommets des âmes des autres sommets coin du bord de  $B$ .*

Démonstration. En effet, les âmes au-dessus des sommets coin distincts de  $s$  sont alors à distance au moins 2 du cône issu de  $s$  (proposition 21). Par suite l'opération de chirurgie du lemme 23 ne modifie pas la couleur des sommets des âmes au-dessus des coins distincts de  $s$  dans l'immeuble de départ. On peut donc réaliser de cette façon le nombre maximum  $c_r$  de sommets noirs qu'il est possible de mettre au-dessus de  $s$  dans la boule centrée en  $*$  de rayon  $r$ . En fait, on réalise ainsi seulement  $c_r - q^2 - 1$  (a priori), du fait qu'on ne contrôle pas la couleur du sommet  $s$  et des sommets immédiatement au-dessus, mais ce sera amplement suffisant pour la suite. Notons que  $c_r$  tend vers l'infini avec  $r$  en vertu du lemme 23. ■

En particulier on peut alors, à l'aide du lemme 22, construire une boule de  $E_P$  prolongeant  $B$  ayant des sommets noirs *seulement* au-dessus de  $s$  (en quantité arbitrairement grande).

Dans les deux propositions suivantes on reprend les notations de la section 5. dans le cas de  $E_P$ . Ainsi  $O^i$  désigne l'ensemble des immeubles pointés de  $S_P$  dont le groupe des automorphismes qui fixent le point base  $*$  fixe aussi la boule de rayon  $i$ , et  $U_k$  est l'ensemble des immeubles de  $S_P$  qui n'ont pas d'automorphisme  $\phi$  qui envoie le point base  $*$  sur un point  $\phi(*) \neq *$  à distance  $\leq k$ .

Commençons par l'analogue de la proposition 31.

**Proposition 35.** *Les ensembles  $O^i$  sont ouverts et denses dans  $S_P$ .*

Démonstration. (Les notations sont celles de la proposition 31) Reprenons la même preuve que pour la proposition 31, mais plutôt que de jouer sur le pourcentage de boules d'un type, on construit une boule  $B$  dont les nombres de boules noires au-dessus de chacun des sommets coins de la boule  $B_0$  soient deux à deux distincts. Pour cela, on considère les sommets coin de  $B_0$ ,  $C_i$ ,  $i = 0..N$  les uns après les autres, et on crée des couronnes pour qu'il y ait au moins un sommet noir au-dessus du sommet  $C_1$ ; ceci sans ajouter de sommets noirs au-dessus des autres  $C_i$  (ce qui est possible d'après le lemme précédent). Si on note  $c_i$  le nombre de sommets noirs au-dessus du sommet  $C_i$ , on a alors  $c_0 = 0 < c_1$ . On construit ainsi successivement des couronnes de telle sorte que  $c_i < c_{i+1}$ . ■

Montrons maintenant l'analogue de la proposition 32.

**Proposition 36.** *Les ensembles  $U_k$  sont ouverts et denses dans  $S_P$ .*

Démonstration. Reprenons l'idée de la preuve de la proposition 32. Le point clé était de border une boule de telle sorte qu'une couronne soit entièrement blanche alors que la suivante est entièrement noire. Il n'est pas possible d'en faire autant pour  $q \geq 3$ .

Començons par dégager un lemme très simple sur les links des immeubles triangulaires qui sont considérés ici comme des graphes métriques dont la longueur des arêtes est fixée à  $\pi/3$  (la longueur angulaire) :

**Lemme 37.** *Dans un link, on considère  $a$  un point et  $C$  un petit cycle de longueur  $2\pi$ . Alors il existe dans  $C$  un point  $b$  à distance  $\pi$  de  $a$ .*

Démonstration. Si  $a \in C$  alors le point  $b$  est unique, c'est l'opposé dans le cycle  $C$ . Sinon, la géodésique  $\gamma$  dans le link qui relie  $a$  au cycle est de longueur  $\leq \pi$ . Si cette longueur est exactement  $\pi$  le lemme est alors démontré et on peut aussi vérifier qu'en fait 3 sommets de  $C$  sont à distance  $\pi$  de  $a$ . Si la géodésique  $\gamma$  a une longueur  $< \pi$  alors elle se prolonge dans le cycle  $C$  de deux façons en un chemin simple de longueur  $\pi$  pour déterminer alors deux points de  $C$  à distance  $\pi$  de  $a$ . Il existe donc 1, 2 ou 3 points  $b$  suivant les situations. ■

On se donne maintenant une boule  $B_0$  d'un immeuble  $X$  de centre  $*$  et de rayon  $N_0 \geq 2$ . On se fixe un hexagone plat  $H_0$  de même centre que  $B_0$  et de même rayon. On peut construire une boule  $B \supset B_0$  de rayon  $N \geq N_0 + 4$ , qui contient un hexagone plat  $H$  de rayon  $N - 2$  qui prolonge  $H_0$  tel que ses six sommets coins soient noirs (Corollaire 25).

Il suffit maintenant de couronner  $B$  de sommets blancs. Plus précisément, il existe une boule  $B'$  de rayon  $> 2N$  qui prolonge  $B$  dont tous les sommets en dehors de la boule  $B''$  de rayon  $N - 2$  sont blancs (on peut grâce au Lemme 22). Considérons donc un automorphisme d'un immeuble  $Y$  qui contient  $B'$  et qui envoie le sommet  $*$  sur un sommet  $*' \neq *$  à distance au plus  $N - 2$ .

**Affirmation.** *Au moins l'un des six sommets de  $H$  doit être envoyé dans la couronne  $B' \setminus B''$ .*

Démonstration. En effet, la géodésique qui relie  $*$  à  $*'$  peut être prolongée dans l'hexagone  $H$  en vertu du lemme précédent. Cela assure qu'au moins un des sommets de  $H$  est en dehors de la boule  $B''$  tout en restant dans la boule  $B'$  car les deux sommets  $*$  et  $*'$  sont à distance  $\leq N - 2$ . ■

Or cela n'est pas compatible avec les types des 2-boules. Ainsi le raisonnement de la preuve de la proposition 2 peut bien s'appliquer dans le cas  $q \geq 3$ . ■

On en déduit le résultat suivant qui, avec l'énoncé correspondant pour  $q = 2$  démontré à la section 5., constitue le point 2 du théorème 5 annoncé en introduction.

**Théorème 38.** *Soit  $q \geq 3$  et  $P$  une famille de plan projectifs d'ordre  $q$ . Dans l'espace  $E_P$ , génériquement au sens de Baire, le groupe de tous les automorphismes d'un immeuble est trivial.*

Pour terminer la preuve du théorème 5 il nous reste à justifier la dernière phrase du point 1 : on peut construire concrètement une infinité non dénombrable d'immeubles dans  $E_P$  sans automorphisme. Nous l'expliquons sur la figure 3, qui schématise un immeuble triangulaire sans automorphisme.

Sur cette figure la structure simpliciale de l'immeuble est représentée par les cercles et les segments. Reprenant la terminologie de la section 3., les traits obliques en pointillé dans les couronnes représentent les cônes de définitions des projections sur les coins (qui s'intersectent), et les pointes noircies (de différentes façons) sont les âmes de ces

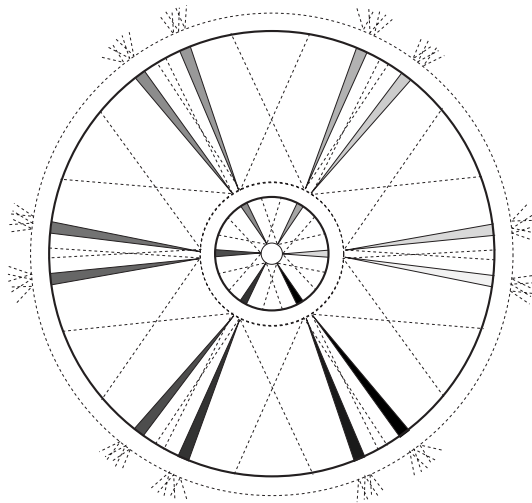


FIG. 3 – Un immeuble triangulaire sans automorphisme

cônes. Les couleurs de ces pointes sont déterminées par les densités de sommets (disons noir) qui ont une boule de rayon 2 d'un type donné (comme dans la Définition 11). Un cercle dont tous les sommets sont noirs, puis un cercle dont tous les sommets sont blancs, succèdent à ces pointes. La possibilité de faire ces prescriptions a été démontrée dans les sections ci-dessus. On itère ensuite ces constructions. Un automorphisme de l'immeuble obtenu doit respecter ces colorations et ne peut qu'être trivial.

En faisant varier les paramètres, on obtient ainsi une infinité non dénombrable d'immeubles sans automorphisme non isomorphes.

#### RÉFÉRENCES

- [1] Artin E., « Algèbre géométrique », Paris, 1978.
- [2] Barré S., « Polyèdres finis de dimension 2 à courbure négative ou nulle et de rang 2 » Ann. de l'Inst. Fourier, T45, 1995.
- [3] Barré S., « Polyèdres de rang deux », Thèse, ENS Lyon, 1996.
- [4] Barré S., « Immeubles de Tits triangulaires exotiques », Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6) 9, no. 4, 575–603, 2000.
- [5] Barré S., Pichot M., « Existence d'immeubles triangulaires quasi-périodiques », en préparation.
- [6] Bridson M., Haefliger A. « Metric Spaces of non-positive curvature », Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 319, Berlin 1999.
- [7] Brown K.S., « Buildings », Springer Verlag, 1989.
- [8] Connes A., « Sur la théorie non commutative de l'intégration », Algèbres d'opérateurs (Sém., Les Plans-sur-Bex, 1978), pp. 19–143, Lecture Notes in Math., 725, Springer, Berlin, 1979.

- [9] Haglund F. « Existence, unicité et homogénéité de certains immeubles hyperboliques », *Math. Z.* 242, no. 1, 97–148, 2002
- [10] Haglund F., Paulin F. « Construction arborescente d'immeubles », *Math. Ann.* 325, 137-164, 2003
- [11] Moorhouse, « On projective planes of order less than 32 ». (English summary) *Finite geometries, groups, and computation*, 149–162, Walter de Gruyter, Berlin, 2006.
- [12] Pansu P. « Formules de Mathusalem, de Garland et propriété (T) pour des groupes agissant sur des espaces symétriques ou des immeubles », *Bull. Soc. math. France*, 126, 1998, p. 107-139.
- [13] Pichot M., « Espaces mesurés singuliers fortement ergodiques et structures métriques-mesurées », prépublication.
- [14] Pichot M., « Sur la théorie spectrale des relations d'équivalence mesurées », prépublication.
- [15] Ronan, M. A., « A construction of buildings with no rank 3 residues of spherical type », *Buildings and the geometry of diagrams (Como, 1984)*, 242-248, *Lectures Notes in Math.*, 1181, Springer, Berlin, 1986.
- [16] Ronan, M. A., « Lectures on buildings », *Persp. Math.* 7, Academic Press, 1989.
- [17] Ronan, M. A., Tits J., « Building Buildings », *Math. Ann.* 278, 291-306 1987.
- [18] Serre, J.P. « Corps locaux », Hermann, Paris 1968.
- [19] Tits J. « Lecture Notes in mathematics 386 », Springer Verlag, 1974.
- [20] Tits J. « Buildings and group amalgamations », *Proceedings of groups—St. Andrews 1985*, 110–127, *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, 121, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1986.
- [21] Tits J. « Sphere of Radius 2 in Triangle Buildings, I. », *Finite Geometries buildings and related Topics. Pingrie Park Conference 1988*.
- [22] Tits J., Weiss R.M. « Moufang Polygons », Springer 2002.
- [23] Van Maldeghem, H. « Automorphisms of nonclassical triangle buildings », *Bull. Soc. Math. Belg. Sér.B* 42 1990 no.2, 201-237 .
- [24] Van Maldeghem, H. « Nonclassical triangle buildings », *Geom. Dedicata* 24 1987 no.2, 123-206.

Sylvain Barré  
 Université de Bretagne Sud, BP 573,  
 Centre Yves Coppens, Campus de Tohannic,  
 56017 Vannes, France.  
 sylvain.barre@univ.ubs.fr

Mikaël Pichot  
Tokyo University  
Mathematical Sciences  
3-8-1 Komaba, Tokyo 153-8914  
mpichot@umpa.ens-lyon.fr, pichot@ms.u-tokyo.ac.jp.