La propriété de Haagerup pour des complexes localement symétriques

Sylvain Barré, Université de Bretagne-Sud, 56 000 Vannes ; Sylvain.Barre@univ-ubs.fr

19 avril 2001

Résumé. On donne un exemple de groupe G qui opère sur un complexe triangulaire qui admet un bon système de *murs* construits grâce à une propriété de symétrie locale. Ce système assure la propriété de Haagerup pour G. Ce résultat peut se généraliser à d'autres complexes symétriques.

Haagerup Property for locally symmetric complexes

Abstract. We present a group G which acts on a triangle 2-complex with compact quotient. A property of local symmetry of this complex gives rise a walls system which implies the Haagerup property for G. We can generalise for some symmetic complexes.

Abridged English Version

We can think about the complex we present in this note as a strange Euclidian building. Its singular link is a quotient of the 1-squeleton of the hexagonal tesselation (fig 2), as well as the more simple spherical Tits building (fig 1). But, it's not a building and we prove that the group (which is unique up to a finite bounded index), which acts cocompactly on it, has the haagerup property (theorem 1). This property is incompatible with property T : groups which act cocompactly on triangle Tits building have property T (see [Z]).

In [Ba4], we define a class of 2-complexes, negatively curved, related with some idea of tesselation. We think about them like "rank $\frac{3}{2}$" complexes. All the examples of such complexes we know (the example of this note is one of them) are at the same time, locally symmetic in the following sense :

Definition. A symmetry of a link L is given by a set of compact convex subsets of L, namely $\mathcal{L}$, and an application $S : \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{L})$ which takes values in the set of part of $\mathcal{L}$, such that : $\forall a \in \mathcal{L},\ \ a \cap A' = \emptyset$ where $A' = \displaystyle\bigcup_{a' \in S(a)} a'$ and which is *involutive* : $\forall a \in \mathcal{L}$, $\forall b \in S(a)$,
$\{a\} \cup S(a) \ = \ S(b) \ \cup \ \{b\}$. One more, two following axioms have to be true : $\forall a \in \mathcal{L}$,

1. the cone on $M := a \cup A'$ is a convex part in the cone on L;
2. M cuts the link L in two connex components.

Results of [HPV] on complexes which admits walls system can be used here because locally symmetry with some isotropy condition implies the existence of a good walls system and finally Haagerup property.

Introduction

Dans un note précédente, A. Żuk [Z] montrait que des critères géométriques locaux de complexes de dimension deux pouvaient assurer la propriété T de Kazhdan pour des groupes opérant sur ces complexes de façon cocompacte. En particulier, les exemples de groupes donnés dans [Ba2] et [Ba3] ont cette propriété. Le plus simple des links qui assure cette propriété est celui des immeubles triangulaires les plus simples (localement) à savoir : le graphe d'incidence du plan projectif $P^2(\mathbb{F}_2)$. Il est bon de penser à ce graphe comme à une *courbe elliptique discrète* : quotient du 1-squelette du pavage hexagonal du plan euclidien par le plus petit réseau qui laisse un tour de taille supérieur à 2π (les arêtes ayant pour longueur $\pi/3$) (fig 1).

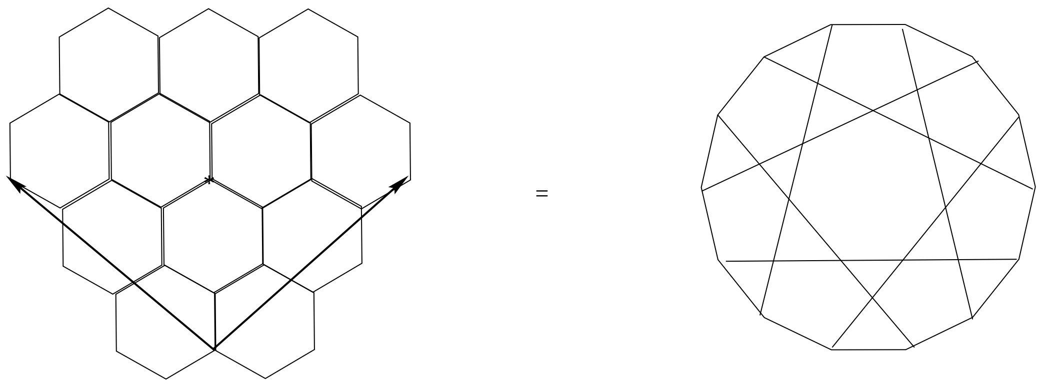

Fig 1 : Le graphe d'incidence de $P^2(\mathbb{F}_2)$

L'exemple de complexe que nous développons dans cette note aura pour link une autre courbe elliptique discrète (fig 2).

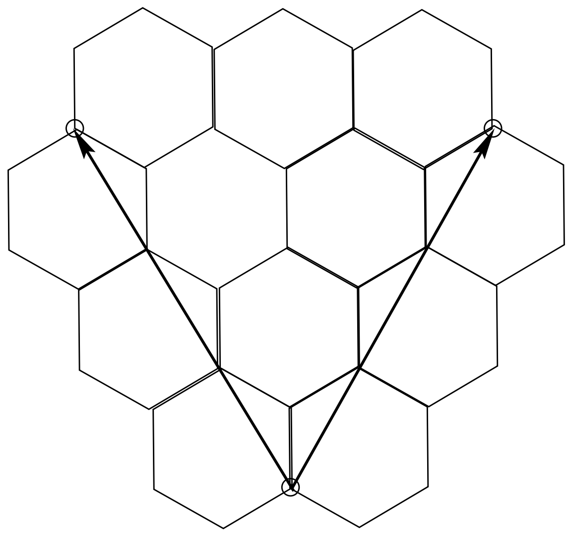

Fig 2 : Le link L du complexe paveur

Outre ce premier rapprochement entre complexes distincts du point de vue de la propriété T, il y en a un autre lié au caractère localement symétrique. Les espaces symétriques de type non compact, de rang supérieur à deux sont caractérisés parmi les variétés à courbure négative ou nulle par le fait qu'ils soient de rang supérieur. De même, les immeubles euclidiens de dimension deux sont caractérisés, parmi les complexes à courbure négative ou nulle, par le fait qu'ils soient de rang deux ([Ba1]). On parle alors d'analogie entre espaces symétriques et immeubles : l'analogie se fait via un théorème de rigidité. Mais la propriété de symétrie locale n'est pas bien définie dans les immeubles. Dans [Ba4], nous décrivons une classe de complexes *paveurs* à courbure négative ou nulle qui ne sont pas de rang deux, mais beaucoup plus que seulement de rang un : on parle de rang $3/2$. Tous les exemples de tels complexes que nous connaissons sont également localement symétriques en un sens qu'on précisera ici (paragraphe 2). L'exemple que nous décrivons dans cette note en fait partie. Il nous semble donc qu'il ne faut plus parler des immeubles euclidiens de dimension deux comme des analogues des espaces symétriques, mais seulement comme des analogues des espaces de rang supérieur à deux. La notion de symétrie locale, qui n'est pas définie dans les immeubles euclidiens irréductibles, l'est par contre dans d'autres espaces qui ont des propriétés opposées du point de vue de la représentation des groupes qui opèrent sur eux.

On montre dans cette note, sur un exemple, que cette symétrie locale donne naturellement un système de murs (elle est en partie inspirée par ces murs). Dans [CCJJV], il est montré que la propriété de Haagerup est toujours héritée, dans les exemples connus, de l'existence de murs (par exemple pour $SO(n,1)$ et $SU(n,1)$). Pour certains complexes paveurs (mais pas tous), on connaissait déjà des systèmes de murs parce qu'ils faisaient partie d'une autre classe de complexes (les complexes pairs voir [HP]). Dans ces cas, la symétrie donne de nouveaux systèmes de murs.

Dans une première partie, on décrit explicitement notre exemple de complexe. Ensuite, on donnera une définition de la notion de complexe localement symétrique et on en donnera des exemples. Enfin, on décrira le système de murs pour notre exemple et on montrera qu'il assure, grâce aux résultats de F. Haglund, F Paulin et A. Valette, que le groupe de complexe paveur associé est a-T menable (i.e. vérifie la propriété de Haagerup).

1 Description du complexe paveur triangulaire.

Nous allons décrire un complexe polyédral P de dimension deux dont les faces maximales sont des triangles équilatéraux tous isométriques. Ce complexe n'a qu'un seul sommet et le link en ce sommet est la courbe elliptique discrète L décrite dans l'introduction (fig 2). Nous étiquetons les neuf faces de ce complexe par les trois lettres A, B, C et par les six chiffres 1,2,3,4,5 et 6. À une face correspondent trois arêtes du link (les trois angles de la face) reliées via les arêtes du complexe. Ces dernières sont représentées par des flèches sur le dessin ci-après (fig 3) qui détermine donc entièrement notre complexe.

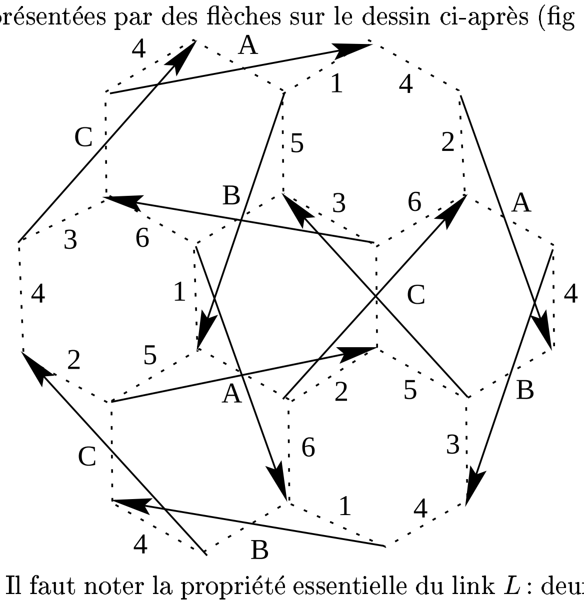

Fig 3 : Le polyèdre P

Il faut noter la propriété essentielle du link L : deux arêtes adjacentes sont toujours contenues dans un cycle de longueur 2π. C'est cette propriété locale, associée à une holonomie triviale autour des faces (ce qui est réalisé dans l'exemple que nous décrivons), qui assure que ce complexe est un complexe paveur (voir [Ba4]).

2 Symétrie locale

Dans une variété riemannienne, l'application exponentielle permet de définir une symétrie locale et on dit alors qu'un espace est localement symétrique lorsque cette symétrie est une isométrie locale. Pour des complexes singuliers, la symétrie locale ne sera pas définie comme un automorphisme du link L tout entier, mais seulement sur un ensemble de parties du link. Commençons par décrire une telle application sur l'exemple de cette note avant de donner une définition générale, et enfin d'autres exemples. Notons $\mathcal{L}$ l'ensemble des arêtes (segments fermés) de L, et $\mathcal{P}(\mathcal{L})$ l'ensemble des parties de $\mathcal{L}$. On définit une application $S : \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{L})$ qui à toute arête $a \in \mathcal{L}$ associe $\{a',a''\} \in \mathcal{P}(\mathcal{L})$ tel que a' et a'' soient les deux arêtes **les plus éloignées** de a (elles sont à distance π de a et à distance π l'une de l'autre) (fig 4).

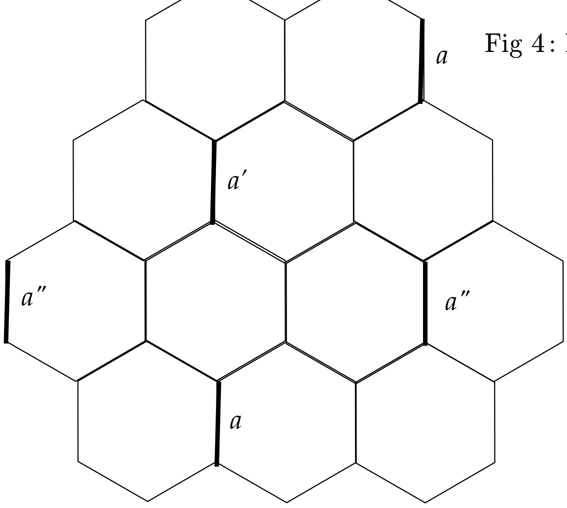

Fig 4 : L'application S

Donnons maintenant la définition générale d'une symétrie sur un link L quelconque.

Soit x un point d'un complexe polyédral à faces euclidiennes. Les arêtes du link ont pour longueur la mesure angulaire. On appellera symétrie en x la donnée d'un ensemble $\mathcal{L}$ de parties fermées connexes du link L en x et d'une application symétrie $S : \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{L})$ telle que $\forall a \in \mathcal{L},\ \ a \cap A' = \emptyset$ où $A' = \bigcup_{a' \in S(a)} a'$ et qui soit *involutive* :

$$\forall a \in \mathcal{L}, \forall b \in S(a),\ \ \{a\} \cup S(a) \ = \ S(b) \ \cup \ \{b\}\ .$$

De plus, les deux axiomes suivants doivent être vérifiés : $\forall a \in \mathcal{L}$,

1. le cône sur $M := a \cup A'$ est un convexe du cône sur L ;
2. M sépare le link L en deux composantes connexes.

Faire le cône sur un link est l'opération qui redonne le voisinage d'un sommet à partir de son link. Le premier axiome signifie que les composantes connexes de $M \subset L$ sont toutes convexes et à distances $\geq \pi$ les unes des autres. L'exemple le plus trivial se rencontre dans le cas où x est un point régulier. Alors le link L en x est un cercle de longueur 2π et on peut prendre $\mathcal{L} = L$ et $\forall a \in \mathcal{L},\ S(a) = \{-a\}$, le point apposé à a. Quand x est un point intérieur à une arête du complexe, le link L est composé de $k \geq 3$ arêtes de longueur π qui relient deux sommets. On choisit alors pour ensemble $\mathcal{L}$, l'ensemble des milieux des arêtes de L et $\forall a \in \mathcal{L},\ S(a) = \{b \in \mathcal{L},\ b \neq a\}$. Donnons encore deux autres exemples significatifs (fig 5) :

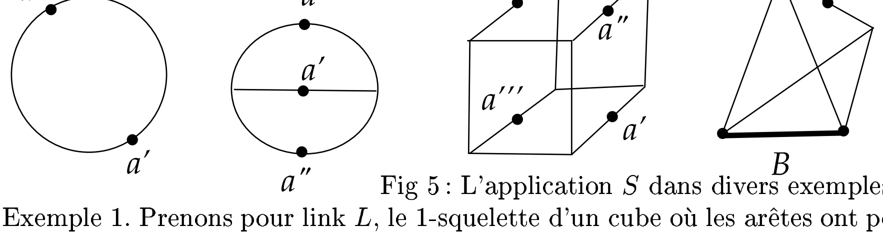

Fig 5 : L'application S dans divers exemples.

Exemple 1. Prenons pour link L, le 1-squelette d'un cube où les arêtes ont pour longueur $\pi/2$ et pour ensemble $\mathcal{L}$, l'ensemble des milieux des arêtes. On choisit alors $\forall a \in \mathcal{L},\ S(a) = \{a',a'',a'''\}$, où a' désigne le milieu du côté opposé à a, et a'',a''' les deux milieux à distance π de a et a'.

Exemple 2. Prenons pour link L le 1-squelette d'un tétraèdre où les arêtes ont pour longueur $2\pi/3$ et pour ensemble $\mathcal{L}$, l'ensemble des arêtes union l'ensemble des milieux des arêtes. On choisit alors, si A est une arête, $S(A) = \{b\}$ où b est le milieu de l'arête opposée à A ; et si a est un milieu, $S(a) = \{B\}$ où B

est l'arête qui est opposée au point a.

Contre-exemple. Il est intéressant de regarder le cas des immeubles euclidiens. L'axiome 1 et le fait que par deux points quelconques dans un link passe toujours un cycle de longueur 2π, interdisent pour $\mathcal{L}$ le choix de composantes autres que des points (à moins que $\mathcal{L}$ ne soit formé que d'une seule composante). On vérifie alors facilement dans le cas de la fig 1, que dans ces deux éventualités, l'axiome 2 de séparation ne peut pas être satisfait.

3 La propriété de Haagerup

Nous allons décrire un système de murs pour notre complexe paveur triangulaire. Il s'agit d'un passage d'une symétrie locale à une symétrie globale. Ce passage est assuré par une compatibilité entre les diverses applications symétrie en chacun des sommets. C'est cette compatibilité qui est évidente dans le cas des complexes pairs pour des applications symétries définies uniquement aux milieux des arêtes.

À toute face F de $\tilde{P}$, on associe un convexe de $\tilde{P}$ qui le sépare en deux composantes connexes : à l'angle au sommet S de la face F correspond une arête a du link au sommet S. À cette arête, on associe, via la symétrie, deux arêtes a' et a'' qui appartiennent respectivement aux faces F' et F'' du complexe $\tilde{P}$ (voir fig 4 et 6). Ainsi, à une face F, on associe six faces (deux collées à chacun de ses sommets). De même à chacune de ces faces sont associées d'autres faces, et ainsi de suite. La réunion de toutes ces faces est une partie convexe $C(F)$ de $\tilde{P}$ (la convexité est assurée par l'axiome 1 de la symétrie). Enfin, l'axiome 2 assure que ce convexe sépare globalement $\tilde{P}$ en deux composantes.

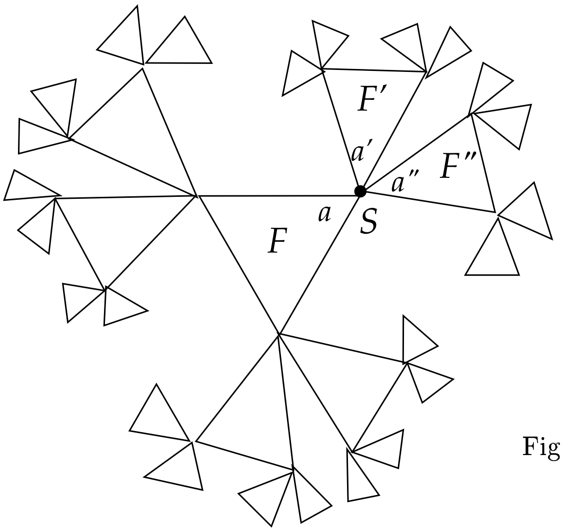

Fig 6 : Un mur dans $\tilde{P}$.

THÉORÈME 1 *Le groupe $G = \mathrm{Aut}(\tilde{P})$ possède la propriété de Haagerup.*

DÉMONSTRATION. Puisque $\tilde{P}$ est un complexe paveur, G opère proprement sur $\tilde{P}$ et à stabilisateurs finis (voir [Ba4]). Pour toute face F, le convexe $C(F)$ détermine trois classes de sommets dans $\tilde{P}$: S_1 et S_2 les ensembles de sommets de chacune des deux composantes de $\tilde{P} \setminus C(F)$; et S_3 l'ensemble des sommets de $C(F)$. À toute face F, on associe donc deux partitions de l'ensemble des sommets : $\{S_1\ ;\ S_2 \cup S_3\}$ et $\{S_2\ ;\ S_1 \cup S_3\}$. Le système de murs ainsi créé est bien G-invariant. Soient A et B deux sommets de $\tilde{P}$ et γ la géodésique qui les relie. Il est clair qu'il existe une face F telle que $C(F) \cap \gamma \neq \emptyset$ et telle que $C(F)$ ne contienne pas à la fois A et B (on note (*) cette propriété d'isotropie). Ainsi, l'ensemble des murs séparant A de B est non vide. De plus il est fini car pour qu'un convexe $C(F)$ détermine une partition qui sépare A de B, il faut qu'il rencontre γ. De tels convexes sont en nombre fini car déterminés par une quelconque de leur face. Finalement, on voit donc qu'on peut appliquer les résultats de [HPV] sur les espaces à murs pour conclure au théorème. $\square$

Pour conclure cette note, on donne une définition qui traduit une idée de l'analogie entre variétés localement symétriques de rang inférieur (< 2) et complexes de dimension deux du même nom.

Définition 3.1 *On dit qu'un complexe polyédral P est localement symétrique s'il possède en tout point* *une application symétrie. De plus, on dira que P est symétrique si les décompositions en deux composantes déterminées localement par les applications symétries sont compatibles.*

Le théorème 1, énoncé pour l'exemple que nous avons décrit en détail, se généralise avec la même preuve aux complexes symétriques, pourvu qu'ils soient suffisamment isotropes pour que la propriété (*) soit satisfaite.

Je remercie les membres du laboratoire de mathématiques de l'Université de Bretagne-Sud et particulièrement Christian Blanchet et Gaël Meigniez pour leur écoute et leurs conseils. Merci aussi à Frédéric Paulin et à Frédéric Haglund pour leurs remarques.

Bibliographie

[Ba1] S. Barré, *Polyèdres finis de dimension 2 à courbure négative ou nulle et de rang 2*, Annales de l'Institut Fourier, T45, 1995.

[Ba2] S. Barré, *Polyèdre de rang deux*, thèse, ENS Lyon, décembre 1996.

[Ba3] S. Barré, *Immeubles de Tits triangulaires exotiques*, Annales de la Faculté des sciences de Toulouse, Vol. IX, n^o 4, 2000.

[Ba4] S. Barré, *Groupes de complexes paveurs et leurs bords de Poisson*, en cours

[Bro1] K.S. Brown, *Buildings*, Spinger-Verlag, New york 1989.

[BH] M. Bridson, A. Haefliger, *Métric Spaces of non-positive curvature*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 319, Berlin 1999.

[CCJJV] P-A. Cherix, M. Cowling, P. Jolissaint, P. Julg, A. Valette, *Locally compact groups with the Haagerup property* à paraître.

[CMSZ] D.I. Cartwright, A.M. Mantero, T. Steger, A. Zappa, *Groups acting simply transitively on the vertices of a building of type $\widetilde{A}_2$ I; The cases $q = 2$ and $q = 3$, II* Geom. Dedicata 47 (1993), n^o 2, 143-166-223.

[CMS] D.I. Cartwright, C. Mlotkowski, T. Steger, *Property (T) and $\widetilde{A}_2$ groups,* Ann. Inst. Fourier 44 (1994), n^o 1, 213-248.

[G] M. Gromov, *Spaces and questions*, Preprint November 1999.

[GS] Grunbaum, Shephard *Tilings and Patterns* W.H. Freeman and Co

[H] F. Haglund, *Les polyèdres de Gromov*, Thèse, ENS Lyon 1992.

[H] F. Haglund, *Existence, unicité et homogénéité de certains immeubles hyperboliques*, Preprint 99-51, Orsay.

[HP] F. Haglund, F. Paulin *Simplicité de groupes d'automorphismes d'espaces à courbure négative* , Geometry and Topologie Monographs, Vol 1 : The Epstein Birthday Schrift, p 181-248, 1998.

[T3] J. Tits, *On buildings and their Applications*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians ; Vancouver, 1974.

[T4] J. Tits, *Immeubles de type affine*, édité par L. A. Rosati, Buildings and the geometry of diagrams, Proceedings Como 1984, Lectures Notes in Mathematics 1181 (Springer-Verlag, 1986), 157-190.

[Z] A. Żuk *La propriété (T) de Kazhdan pour les groupes agissant sur les polyèdres,* C. R. Acad. Sc., Paris, Ser. I 323, No 5, 453-458 (1996).