

LA PROPRIÉTÉ DE DÉCROISSANCE RAPIDE POUR LE GROUPE DE WISE

SYLVAIN BARRE AND MIKAËL PICHOT

RÉSUMÉ. On montre que le groupe G de presentation

$$\langle a, b, c, s, t \mid c = ab = ba, c^2 = sas^{-1} = tbt^{-1} \rangle$$

(introduit par D. Wise) a la propriété de décroissance rapide de Haagerup-Jolissaint, et qu'il vérifie donc la conjecture de Baum-Connes.

Le groupe G de presentation

$$\langle a, b, c, s, t \mid c = ab = ba, c^2 = sas^{-1} = tbt^{-1} \rangle$$

a été introduit par D. Wise dans [9]. Il montre que G est non Hopfien, et donc non résiduellement fini.

Notons ℓ la longueur des mots associée à la présentation de G donnée.

On dit que G a la *propriété de décroissance rapide* relativement à ℓ s'il existe un polynôme P tel que, pour tout $r \in \mathbb{R}_+$ et $f, g \in \mathbb{C}G$ tels que $\text{supp}(f) \subset B_r$, on a

$$\|f * g\|_2 \leq P(r) \|f\|_2 \|g\|_2$$

où $B_r = \{x \in G, \ell(x) \leq r\}$ est la boule de rayon r dans G , $\text{supp}(f)$ est l'ensemble des éléments $x \in G$ tels que $f(x) \neq 0$, et $\mathbb{C}G$ l'algèbre de groupe à coefficients complexes de G .

Nous renvoyons à l'article d'Alain Valette [8] pour une introduction à la propriété de décroissance rapide. Par exemple :

- { les groupes à croissance polynomiale, les groupes libres, les groupes hyperboliques, ainsi que certains réseaux uniformes (essentiellement dans SL_3) satisfont cette propriété,
- { les groupes moyennables à croissance non polynomiale, les réseaux non uniformes, tels que $SL_3(\mathbb{Z})$, ne la satisfont pas.

Une conjecture de Valette affirme que la propriété de décroissance rapide est satisfaite pour tout réseau uniforme dans un groupe de Lie semi-simple.

Respondant à une question de Mark Sapir, nous montrons :

Théorème 1. *Le groupe G a la propriété de décroissance rapide relativement à ℓ .*

Le corollaire suivant est une application immédiate des travaux de Laorgue [7].

Corollaire 2. *Le groupe de Wise G satisfait à la conjecture de Baum-Connes, i.e. l'application de Baum-Connes (sans coefficients)*

$$\mu_r : K_*^{\text{top}}(G) \rightarrow K_*(C_r^*(G))$$

est un isomorphisme.

La preuve du theoreme 1 repose sur l'etude des proprietes "de rang intermediaire" du groupe G (au sens ou nous l'entendons dans [5]). Il faut y ajouter un ingredient supplementaire, une propriete dite "de prolongment analytique" (decrite dans la section 3 ci-dessous), qui n'est pas satisfaite pour la plupart des groupes etudies dans [5].

Remarque 3. (1) Le present article est une mise a jour d'une courte note des auteurs (non publiee) portant le même titre [4], ecrite en 2007. Le contenu de la nouvelle version (2012) est essentiellement identique, mais la presentation est plus detaillee.

(2) Le probleme de determiner si G possede la propriete de decroissance rapide a ete souleve par exemple dans [1]. Comme mentionne dans [2], le groupe G n'est pas relativement hyperbolique et il n'est pas non plus un groupe CAT(0) cubique. Par ailleurs, n'etant pas residuellement fini, il n'est pas isomorphe a un sous groupe de type fini de SL_3 sur un corps (d'apres un theoreme de Malcev), et il ne satisfait donc pas aux criteres connus pour la propriete de decroissance rapide. Occasionnellement, le groupe G etait propose comme contre-exemple potentiel a cette propriete (voir par exemple la Question 6.6 de [2]).

Les sections qui suivent contiennent la preuve du theoreme. La propriete de decroissance rapide est obtenue aux sections 5 et 6 en appliquant les criteres connus. Les quatres premieres sections permettent de se ramener a ces criteres. Nous montrons en fait un resultat plus fort, qui affirme que *le groupe de Wise G est à branchement polynomial*, au sens de [5], de definition 16 (voir le theoreme 13 ci-dessous).

1. PROPRIÉTÉS DU LINK

La presentation de G donnee ci-dessus determine un complexe X a courbure negative (au sens CAT(0)) de dimension 2 et une action libre cocompacte de G avec une orbite de sommets (voir [9]).

On rappelle que le link en un sommet de X est le graphe metrique donnee par la trace sur X d'une sphere de petit rayon centree en ce sommet, munie de la metrique angulaire.

Le link L aux sommets de X est represente sur la figure suivante.

Le calcul du link se fait directement a partir de la presentation CAT(0) de X telle que donnee dans [9].

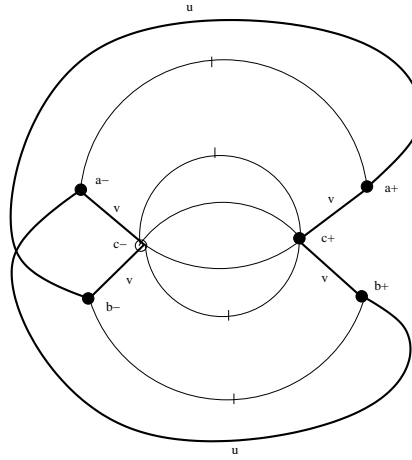


FIGURE 1. Le link du groupe de Wise

Les faces de X sont composées de triangles isocèles ayant deux côtés de longueur 1 et un de longueur $\frac{1}{2}$, et de carrés dont les côtés ont longueur 1. On note u et v les angles aux sommets des triangles, de sorte que $u + 2v = \pi$. Dans L la longueur des arêtes en gras est indiquée sur la Figure 1. Les autres arêtes sont de longueur π . Les cycles (i.e. courbes fermées simples) de longueur 2π de L sont de trois sortes :

- (1) le cycle gras, donné par le chemin $u + 2v + u + 2v$,
- (2) les cycles mixtes, donnés par les chemins $u + 2v + \pi$,
- (3) les cycles non gras, donnés par les chemins centraux de la forme $\pi + \pi$.

Le cycle gras correspond aux pavages du plan en triangles isocèles dans X . Les arêtes de longueur π viennent compléter ce cycle pour former le link tout entier. Notons que les cycles non gras se répartissent eux-mêmes en trois sous-catégories : le cycle de la forme $\pi + \pi$, les quatre cycles de la forme $(\pi/2 + \pi/2) + \pi$, et le cycle de la forme $(\pi/2 + \pi/2) + (\pi/2 + \pi/2)$.

Nous aurons besoin du lemme suivant.

Lemme 4. *Soient α, β deux points de L à distance $> \pi$. Alors α et β appartiennent à un cycle de L de longueur $2\pi + 2u$ ou de longueur $2\pi + 2v$. Ce cycle est alors l'unique plus petit cycle qui contient α et β .*

Démonstration. Il s'agit d'une vérification immédiate. □

2. CLASSIFICATION DES CHROMOSOMES

Nous introduisons une notion de "chromosome" pour le complexe X de Wise et classifions ces sous-structures de X .

Définition 5. On appelle *bande* dans le revêtement universel X l'adhérence d'une composante connexe non bornée du complémentaire du lieu singulier.

On voit que les bandes de X sont de largeur 1.

Lemme 6. *Dans X étant données deux bandes B_1 et B_2 il y a trois types d'intersections possibles :*

- (i) *soit B_1 et B_2 ont un bord commun,*
- (ii) *soit B_1 et B_2 ont un unique sommet commun $x \in X$, et elles définissent dans le link en x un cycle de longueur $2\pi + 2u$,*
- (iii) *soit B_1 et B_2 ont un unique sommet commun $x \in X$, et elles définissent dans le link en x un cycle de longueur $2\pi + 2v$,*

Démonstration. Soient deux bandes B_1 et B_2 et x un point commun à B_1 et B_2 . Deux cas se présentent.

Supposons dans un premier temps que x n'est pas l'unique point commun. Notons I le plus grand segment (possiblement in ni) contenant x et inclus dans $B_1 \cap B_2$. Par hypothèse, ce segment n'est pas réduit à x . Il s'agit de montrer que I est bi-in ni. Sinon, I a une extrémité y dans X . Il est facile de voir que cette extrémité est un sommet de X . De plus y est soit un sommet de carre, soit un milieu de carre dans B_1 et B_2 . Dans les deux cas, la trace de $B_1 \cup B_2$ sur le link L_y de y est un chemin non gras connexe de longueur 2π . Or, un tel chemin est nécessairement un *cycle* non gras de longueur 2π dans L_y , ce qui contredit la maximalité de I . Donc $I = B_1 \cap B_2$ est bi-in ni et nous obtenons l'assertion (i).

Supposons maintenant que $B_1 \cap B_2 = \{x\}$. Notons I_1 et I_2 les deux segments de longueur π dans L_x (le link de x) correspondant à B_1 et B_2 . Alors : soit I_1 et I_2 sont dans un cycle mixte de longueur $2\pi + 2u$, soit ils sont dans un cycle mixte de longueur $2\pi + 2v$. Ceci correspond aux deux cas (ii) et (iii) ci-dessus. \square

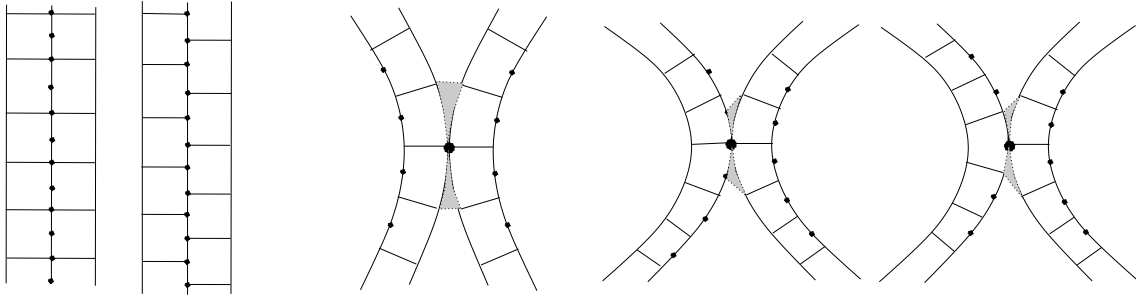
Définition 7. On appelle *chromosome* de X la réunion de deux bandes d'intersection non vide. Un chromosome est dit respectivement *collé*, *de type u* , ou *de type v* , suivant les cas (i), (ii) et (iii) du Lemme 6 ci-dessus. Dans les cas (ii) et (iii) le point x est appelé *centromère*.

Les trois types de chromosomes de X sont représentés sur la figure suivante (le troisième est de type u , les deux derniers de type v).

Soit γ un segment géodésique de X et soit B une bande. On dit que γ *rencontre* B s'il contient au moins un point intérieur à B . On dit que γ *rencontre successivement* deux bandes B_1 et B_2 de X si γ rencontre B_1 et B_2 et si l'intérieur de toute autre bande B de X , $B \neq B_1$, $B \neq B_2$, est disjoint du sous-segment géodésique γ_0 de γ entre compris entre B_1 et B_2 (i.e. γ_0 ne rencontre pas B).

Lemme 8. (i) *Soit Δ un plat de triangles isocèles de X . Une bande dans X dont l'intersection avec Δ est non vide, et non réduite à un point, contient une géodésique singulière de Δ .*

- (ii) *Soit γ un segment géodésique de X . Si γ ne rencontre aucune bande de X , alors γ est contenu dans un unique plat en triangles isocèles de X .*

FIGURE 2. Chromosomes collés, de type u , de type v

- (iii) Soit γ un segment géodésique et soient B_1, B_2 deux bandes de X d'intersection vide. Si γ rencontre successivement B_1 et B_2 , alors il existe un plat de triangles isocèles dans X tel que les intersections $\cap B_1$ et $\cap B_2$ sont deux droites singulières parallèles de \mathbb{R}^2 .

Démonstration. (i) Soit B une bande et \mathbb{R}^2 un plat en triangles isocèles tel que $I = B \cap \mathbb{R}^2$ contient au moins deux points. Par convexité, I est un segment du bord de B . Il suffit de montrer que I est biinfini. Sinon, notons x une extrémité de I dans X . Alors x est un sommet de X . De plus, nous avons un cycle de longueur $2\pi = 2(u + 2v)$ correspondant aux triangles isocèles et un chemin de longueur π d'origine sur ce cycle et correspondant à B . La section 1 montre que la singularité obtenue est de type livre, ce qui contredit le fait que x est extremal dans $B \cap \mathbb{R}^2$.

(ii) Si γ est un segment géodésique qui ne rencontre aucune bande, alors il est entièrement contenu dans une réunion de triangles isocèles. Il suffit donc de montrer que tout point d'un triangle isocèle est contenu dans un unique plat en triangle isocèle. Soit t un triangle isocèle le contenant un tel point, et soit x un sommet de t . Alors t détermine une arête grasse du link L_x , qui se complète d'une unique façon en un cycle d'arêtes grasses. Ce cycle gras détermine un disque simplicial plat D_1 dans X de centre x . On construit ensuite par récurrence une suite emboîtée $D_1 \subset D_2 \subset D_3 \subset \dots$ de disques simpliciaux plats en triangles isocèles de rayons (simpliciaux) respectifs $1, 2, 3, \dots$, de la façon suivante. Supposons D_i construit pour $i \geq 1$. Notons $x_i^1, \dots, x_i^{k_i}$ les sommets du bord de D_i organisés par ordre cyclique. Pour chaque entier $j \in [1, k_i]$, la trace de D_i dans $L_{x_i^j}$ est un chemin gras de longueur au plus π . Celui se complète d'une unique façon en un cycle gras de longueur 2π . En outre, il est facile de voir que ces complétions sont deux-à-deux compatibles. Ceci montre qu'il existe exactement une extension de D_i en un disque plat D_{i+1} en triangles isocèles de rayon simplicial $i + 1$. Par suite, $\mathbb{R}^2 = \bigcup_{i=1}^{\infty} D_i$ est l'unique plat en triangle isocèle contenant le point donné.

(iii) Notons C l'enveloppe convexe de B_1 et B_2 privée de B_1 et B_2 . Comme $B_1 \cap B_2 = \emptyset$, $C \neq \emptyset$. D'après (ii), C est inclus dans un (unique) plat en triangle isocèles.

Il est facile d'en deduire que $B_1 \cap C$ et $B_2 \cap C$ sont deux droites parralleles de ce plat. \square

3. ENVELOPPE ANALYTIQUE ET ENVELOPPE ANALYTIQUE RÉDUITE D'UN SEGMENT

Soit γ un segment geodesique de X . On appelle *enveloppe analytique* de γ la surface $H(\gamma)$ de X (eventuellement a bords, branchee, et non necessairement totalement geodesique) construite de la facon suivante.

- Si γ ne rencontre aucune bande de X , alors $H(\gamma)$ est soit :

- (1) l'enveloppe convexe simpliciale de γ dans le plat en triangles isocèles donne par le lemme 8 (ii) si γ est non singulier,
- (2) la reunion des chromosomes colles de X qui intersectent γ en au moins deux points si γ est singulier.

- Si γ rencontre au moins une bande de X , notons B_1, \dots, B_n les bandes de X que γ rencontrent successivement en partant de son origine (pour une orientation xee de γ) et procedons de la facon suivante. Soit $H_0(\gamma)$ la reunion des bandes B_i , $i = 1 \dots n$. Construisons par recurrence une suite emboitee de surfaces a bords

$$H_0(\gamma) \subset H_1(\gamma) \subset \dots \subset H_{n-1}(\gamma).$$

Supposons $H_{i-1}(\gamma)$ construite pour un entier $i \geq 1$ et construisons $H_i(\gamma)$ pour $i < n$. On distingue les cas suivant.

- (1) B_i et B_{i+1} ne s'intersectent pas : on applique la partie (iii) du Lemme 8 en posant $H_i(\gamma) = H_{i-1}(\gamma) \cup P$, ou P est la partie du plat entre les deux droites singulieres de nies dans (iii).
- (2) B_i et B_{i+1} ont un bord commun : on pose $H_i(\gamma) = H_{i-1}(\gamma)$.
- (3) B_i et B_{i+1} ont exactement un point commun $x \in X$: dans ce cas $B_i \cup B_{i+1}$ est un chromosome C non colle de X de centromere x . Par construction γ et C sont transverses, i.e. γ a une intersection non vide avec l'interieur des deux branches de C , et on complete en posant $H_i(\gamma) = H_{i-1}(\gamma) \cup P$, ou P est la reunion des deux secteurs de triangles d'angles u (ou v) en x , determines par le type u (ou v) du chromosome C .

D'apres le lemme 6 il n'y a pas d'autre possibilite d'intersection.

La construction ci-dessus determine une surface $H_{n-1}(\gamma)$ dans X . On pose alors $H(\gamma) = H_{n-1}(\gamma) \cup P_1 \cup P_2 \cup Q$ ou Q est la reunion des chromosomes colles de X qui intersectent γ en au moins deux points, et P_1, P_2 sont de nies comme suit : si l'origine de γ (resp. l'extremite de γ) n'est pas incluse dans H_{n-1} , alors P_1 (resp. P_2) est le demi-plan en triangles isocèles bordant B_1 et contenant l'origine (resp. l'extremite) de γ ; sinon on pose $P_1 = \emptyset$ (resp. $P_2 = \emptyset$).

Ceci termine la construction de $H(\gamma)$. On a choisi le terme 'analytique' en reference au prolongement analytique usuel : nous voyons l'enveloppe $H(\gamma)$ comme le "prolongement analytique" du segment γ dans X .

En n nous tronquons cette enveloppe :

Définition 9. Soit γ un segment geodesique de X . On appelle *enveloppe analytique reduite* de γ , et on note $H'(\gamma)$, l'ensemble des points de l'enveloppe analytique $H(\gamma)$ de γ qui sont a distance au plus $2|\gamma|$ du milieu de γ , ou $|\gamma|$ est la longueur CAT(0) de γ dans X .

4. RÉDUCTION DES TRIANGLES GÉODÉSIIQUES

Lemme 10. Soient A, B, C trois sommets de X et soit D le disque totalement géodésique de X de bord le triangle géodésique (ABC) . Alors l'une des deux possibilités suivantes est satisfaite :

(1) L'intersection

$$H'([AB]) \cap H'([BC]) \cap H'([AC])$$

est non vide.

(2) L'ensemble

$$D_0 = D \setminus (H'([AB]) \cup H'([BC]) \cup H'([AC]))$$

est un disque non vide inclus dans un plat en triangles isocèles, dont le bord $T = \partial D_0$ est un triangle isocèle géodésique simplicial de .

Dans la plupart des cas D_0 est vide, et c'est la situation (1) qui prevaut. Le lemme 10 se demontre en etudiant les positions possibles des chromosomes a l'interieur de D . On a represente un cas signi catif sur la gure 3 (les centromeres de D se trouvent sur les bords).

Avant d'aborder la demonstration du lemme 10, nous montrons deux resultats preliminaires. Le premier est elementaire et general :

Lemme 11. Soient A, B, C trois sommets de X et soit (ABC) le triangle géodésique correspondant. Alors les boules centrées aux milieux des cotés de (ABC) et de rayons respectifs le double de la longueur du coté correspondant à leur centre, ont une intersection commune contenant le petit coté de (ABC) .

Le resultat suivant est propre au complexe X :

Lemme 12. Soient A, B, C trois sommets de X . Si $[A, B]$ rencontre une bande de X , alors soit $[B, C]$ soit $[A, C]$ rencontre cette même bande de X .

Démonstration. Supposons qu'il existe une bande que rencontre $[A, B]$ mais que ne rencontrent ni $[B, C]$, ni $[A, C]$. Alors les deux points x et y de son bord les plus eloignes de $[A, B]$ qui appartiennent au disque de bord le triangle (ABC) sont interieurs a ce disque D . Il en resulte que le segment $[x, y]$ est singulier. Mais cela contredit la definition d'une bande comme complementaire du lieux singulier. \square

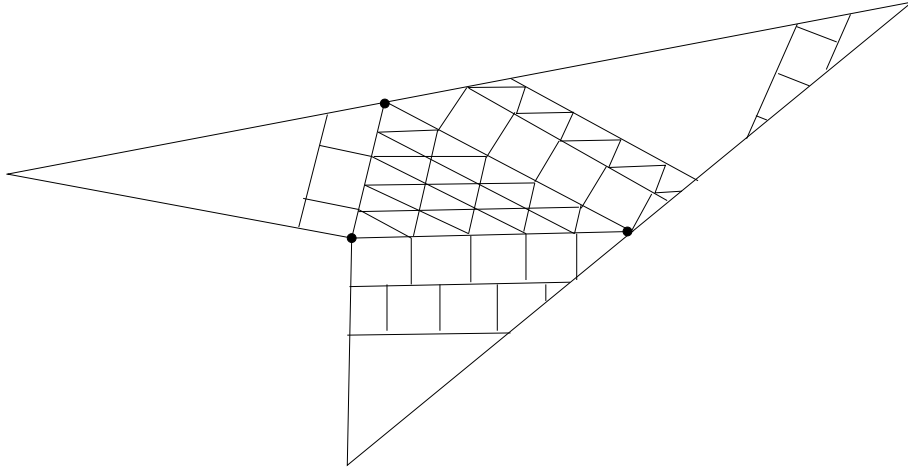


FIGURE 3. Reduction le long des enveloppes analytiques reduites

Démonstration du lemme 10. Nous distinguons plusieurs cas et sous-cas.

(1) Supposons d'abord que l'un des côtes, disons $[A, B]$ de ABC rencontre une bande de X . D'après le lemme 12, nous pouvons supposer, quitte à permuter les lettres, que $[A, C]$ rencontre cette bande également. Notons B_1 la bande de X la plus éloignée de A et qui rencontre à la fois $[A, B]$ et $[A, C]$, et x (resp. y) le sommet de $[A, B] \cap B_1$ (resp. $[A, C] \cap B_1$) le plus éloigné de A .

Deux cas se présentent :

- (1a) $[A, B]$ rencontre successivement B_1 et une autre bande B_2 plus proche de B que B_1 .
- (1b) $[x, B]$ ne rencontre aucune bande de X .

Traisons d'abord le cas (1a). Par maximalité de B_1 et d'après le lemme 12, la bande B_2 rencontre nécessairement $[B, C]$.

Alors :

(1a α) Si B_1 et B_2 sont disjointes, alors elles intersectent un plat en triangles isocèles suivant deux droites parallèles (cf. lemme 8 iii). Par construction, l'enveloppe convexe γ' de ces deux droites dans γ est incluse dans $H([A, B])$. De plus, il est facile de voir que γ' contient aussi $[y, C]$ et, et qu'elle est donc incluse dans $H([A, C])$. Par suite $H([A, B]) \cap H([A, C])$ contient γ' . Un raisonnement analogue montre que $H([B, A]) \cap H([B, C])$ contient également γ' . Nous en deduisons que $\gamma' \subset H([A, B]) \cap H([A, C]) \cap H([B, C])$. Il résulte alors du lemme 11 que $H'([A, B]) \cap H'([A, C]) \cap H'([B, C])$ est non vide.

(1a β) Si $B_1 \cap B_2 \neq \emptyset$, nous appliquons la classification des chromosomes (lemme 6) et distinguons deux sous-cas :

(1a β i) Si B_1 et B_2 forment un chromosome colle, alors B appartient à $d = B_1 \cap B_2$. Un raisonnement analogue au cas (1a α) permet de deduire que $d \subset H([A, B]) \cap$

$H([A, C]) \cap H([B, C])$ et il resulte du lemme 11 que $H'([A, B]) \cap H'([A, C]) \cap H'([B, C])$ est non vide.

(1a β ii) Sinon, B_1 et B_2 forment un chromosome χ non colle. Notons z le point le plus eloigne de B qui appartient a $[B, C] \cap B_2$. Alors $[y, z]$ est dans l'enveloppe convexe de χ et le triangle (xyz) est inclus dans l'un des deux cônes en triangles isocèles de χ issus de son centromere. Deux nouveaux cas se presentent.

(1a β ii') $[A, C]$ recontre successivement B_1 et une autre bande de X , disons B_3 . Par maximalite de B_1 , le segment $[B, C]$ doit rencontrer successivement B_2 et B_3 . De plus, les bandes B_1 et B_3 (resp. les bandes B_2 et B_3) determinent un chromosome non colle χ' (resp. χ'') de X . On en deduit alors que le triangle (xyz) est inclus dans deux cônes en triangles isocèles de χ' et de χ'' issus de leurs centromeres. Donc (xyz) est inclus dans $H([A, B]) \cap H([A, C]) \cap H([B, C])$ et il resulte du lemme 11 que $H'([A, B]) \cap H'([A, C]) \cap H'([B, C])$ est non vide.

(1a β ii'') Si (1a β ii') n'est pas satisfait, alors les segments $[y, C]$ et $[z, C]$ ne rencontrent pas de bande de X . Par construction de nos enveloppes convexes, $H([A, B]) \cap H([A, C]) \cap H([B, C])$ contient (xyz) et il resulte encore du lemme 11 que $H'([A, B]) \cap H'([A, C]) \cap H'([B, C])$ est non vide.

Ceci termine la preuve dans le cas (1a).

Passons au cas (1b). Nous avons encore deux options :

(1b α) Supposons que $[A, C]$ rencontre successivement B_1 et une autre bande B_2 de X . D'apres le lemme 12, $[B, C]$ rencontre B_2 egalement. Ce cas est donc un symmetrique du cas (1a β ii'') et se traite de la même facon.

(1b β) Sinon, $[y, C]$ ne recontre aucune bande de X . Il en resulte que $[B, C]$ ne rencontre aucune bande de X . Dans ce cas, le segment $[B, C]$ est inclus dans $H([A, B]) \cap H([A, C])$ et le lemme 11 permet encore de conclure que $H'([A, B]) \cap H'([A, C]) \cap H'([B, C])$ est non vide.

Ceci termine la preuve dans le cas (1).

Dans le cas (2), aucun des segments $[A, B]$, $[B, C]$ et $[A, C]$ ne rencontre de bande de X . Il en resulte que le triangle (ABC) est inclus dans un plat en triangle isocèles. Dans ce cas, on montre directement que

$$D_0 = D \setminus (H'([AB]) \cup H'([BC]) \cup H'([AC]))$$

est un triangle isocèle (eventuellement vide) geodesique simplicial de D . (Une autre solution, sensiblement moins economique, est de deformer les triangles isocèles de D en des triangles equilateraux et d'appliquer le lemme 29 de [5].) \square

5. EN DÉDUIRE LA PROPRIÉTÉ DE DÉCROISSANCE RAPIDE

Ce qui precede permet de montrer que G veri e la propriete dite de "branchement polynomial" relativement a la metrique ℓ , au sens de la definition 16 de [5] (rappelee ci-dessous). La propriete de decroissance rapide (theoreme 1) resultera alors directement de la proposition 17 de [5].

Le resultat principal de cet article est le suivant :

Théorème 13. *Le groupe de Wise G est à branchement polynomial relativement à la métrique des mots.*

Commençons par des rappels terminologiques. Soit Γ un groupe dénombrable. Un β -chemin de l'identité e à $z \in \Gamma$ est un triplet $\gamma = (a_3, a_2, a_1)$ dans Γ^3 tel que $z = a_3 a_2 a_1$. Un triplet $(x, y, z) \in \Gamma^3$ tel que $xy = z$ est dit *triangle* de Γ . Notons $|\cdot|$ la longueur sur Γ .

Définition 14. Une famille Γ -indexée de 3-chemins dans Γ , disons $C = (C_z^r)_{z \in \Gamma; r \in \mathbb{N}^*}$ ou C_z^r un ensemble de 3-chemins de e à z dans Γ pour tout $z \in \Gamma$ et $r \in \mathbb{R}^*$, est dite à croissance polynomiale s'il existe un polynôme p_1 tel que pour tout $r \in \mathbb{R}_+$ et tout $z \in \Gamma$ on a $\#C_z^r \leq p_1(r)$.

Soient \mathfrak{s} et \mathfrak{s}^- deux ensembles de triangles de Γ et $C = (C_z^r)_{z \in \Gamma; r \in \mathbb{R}_+}$ une famille Γ -indexée de 3-chemins. Pour $(u, v, w) \in \mathfrak{s}^-$ et $r \in \mathbb{R}_+$ définissons $D_{(u,v,w)}^r$ comme l'ensemble des triplets (a, b, c) de Γ^3 tels que $(b^{-1}, u, a) \in C_{b^{-1}ua}^r$, $(c^{-1}, v, b) \in C_{c^{-1}vb}^r$ et $(c^{-1}, w, a) \in C_{c^{-1}wa}^r$.

Définition 15. On dit que \mathfrak{s}^- est un *retract de \mathfrak{s} le long de C* s'il existe un polynôme p_2 tel que pour tout $(x, y, z) \in \mathfrak{s}$ il existe $(u, v, w) \in \mathfrak{s}^-$ avec $|u| \leq p_2(|x|)$ et $(a, b, c) \in D_{(u,v,w)}^{|x|}$ tel que $b^{-1}ua = x$ and $c^{-1}wa = z$.

Rappelons la définition 16 de [5]. Un 3-chemin (a_3, a_2, a_1) dans Γ est dit (κ, δ) -géodésique si $|a_1| + |a_2| + |a_3| \leq \kappa|a_3 a_2 a_1| + \delta$, où $\kappa \geq 1$, $\delta \geq 0$ sont données.

Définition 16. On dit que Γ est à *branchement polynomial* relativement à $|\cdot|$ s'il existe $\kappa \geq 1$, $\delta \geq 0$, une famille $C = (C_z^r)_{z \in \Gamma; r \in \mathbb{N}^*}$ d'ensembles C_z^r de 3-chemins (κ, δ) -géodésiques de e à z à croissance polynomiale, un ensemble \mathfrak{s} de triangles dans Γ qui sont des retracts le long de C de l'ensemble de tous les triangles de Γ , et un polynôme p_3 tel que pour tout z dans Γ et tout $r \in \mathbb{R}_+$, le nombre de triangles dans \mathfrak{s} de la forme (x, y, z) avec $|x| \leq r$ est au plus $p_3(r)$ (on dit alors que \mathfrak{s} est à croissance polynomiale).

On a alors :

Proposition 17 (Voir la prop. 17 de [5]). *Soit Γ un groupe dénombrable et $|\cdot|$ une longueur sur Γ . Si Γ est à branchement polynomial relativement à $|\cdot|$, alors Γ satisfait à la propriété de décroissance rapide relativement à $|\cdot|$.*

Nous montrons maintenant que le groupe de Wise G est à branchement polynomial.

Soit $z \in G$ et $r \geq 0$. Voyons G comme l'ensemble des sommets de X et notons $H'[z]$ l'enveloppe convexe réduite du segment géodésique de e à z dans X . Nous considérons la famille C_z^r des 3-chemins $(8,0)$ -géodésiques (a_3, a_2, a_1) de e à z tels que $a_1, a_2 a_1 \in H'[z]$ et, si $|z| \geq r$, tels que $|a_1| \leq 3r$ et $|a_2| \leq r$.

Nous avons alors :

Lemme 18. *La famille $(C_Z^r)_{z,r}$ est à croissance polynomiale.*

Démonstration. Nous montrons qu'il existe une constante $K > 0$ tel que, pour tout segment géodésique γ de X et tout $r > 0$, le nombre de sommets de $H'(\gamma)$ à distance au plus r est de l'origine de γ est majoré par Kr^3 . Ceci entraîne que le cardinal de C_Z^r est au majoré par un polynôme (de degré 6), ce qu'il faut démontrer.

Si γ ne rencontre pas de bande de X , alors il est inclus dans un plat en triangles isocèles de X et le résultat est clair (le polynôme cherché peut être choisi de degré 2).

Sinon, soit B_1, \dots, B_n la suite des bandes que rencontre (successivement) γ et qui sont à distance au plus r de l'origine de γ . Comme les bandes sont de largeur 1, $n \leq r$. De plus il existe une constante K' de sorte que l'ensemble B_i^r des sommets de B_i à distance au plus r de γ soit borné par $K'r$. Notons C_i l'ensemble des sommets de $H(\gamma)$ situés entre les bandes B_i et B_{i+1} . Définissons également C_0 et C_n les plats en triangles contenant l'origine de γ et, respectivement : son extrémité si $|\gamma| \leq r$, ou bien le point de γ à distance r de son origine si $|\gamma| \geq r$. Comme C_i est inclus dans un plat en triangle pour tout $i = 0 \dots n$, il est facile de voir qu'il existe une constante K'' tel que l'ensemble C_i^r des sommets de C_i à distance au plus r de l'extrémité de γ soit de cardinal au plus $K''r^2$. Par suite, l'ensemble des points de $H'(\gamma)$ à distance au plus r de l'origine est borné par

$$|C_0| + \sum_{i=1}^n |B_i^r| + |C_i^r| \leq K''r^2 + (K'r + K''r^2) \frac{n(n+1)}{2} \leq Kr^3$$

ou K ne dépend que de K' et K'' . Ceci prouve le lemme 18. □

Lemme 19. *La famille iso des triangles simpliciaux géodésiques inclus dans un plat en triangles isocèles de X est à croissance polynomiale.*

Démonstration. Le lemme 8 (ii) montre que nous pouvons en fait choisir p_3 constant. □

Le théorème 13 résulte alors immédiatement des lemmes 18, 19 et du lemme suivant :

Lemme 20. *La famille iso des triangles simpliciaux géodésiques inclus dans un plat en triangles isocèles est un rétract de la famille de tous les triangles de longueur au plus r de $(C_Z^r)_{z,r}$.*

Démonstration. Ce résultat est une conséquence directe du lemme 10, compte tenu de la définition de la famille $(C_Z^r)_{z,r}$. □

6. SATURATION AU SENS DES PLATS EN TRIANGLES ISOCÈLES

En n , nous notons que (comme suggère par les lemmes 8 (ii) et 10) nous aurions également pu "saturer" l'enveloppe analytique au sens des plats en triangles isocèles. Cette observation permet de réduire tous les triangles sur des points, même dans

le cas où les points A, B, C sont dans un même plat en triangles isocèles. Nous décrivons la réduction correspondante dans le lemme 23 ci-dessous.

Notons également que le caractère isolé de des plats en triangles isocèles n'est pas essentiel pour établir la propriété de décroissance rapide : même si les plats en triangles isocèles branchent, on peut quand même se servir du lemme 15 de [5] (plutôt que de la proposition 17), pour réduire les produits de convolution à des convolutions partielles le long de triangles isocèles, et appliquer alors les techniques de [5] (adaptées au cas isocèle).

L'enveloppe analytique saturée est définie par :

Définition 21. Soit γ un segment géodésique de X . On appelle *enveloppe analytique saturée* de γ , et on note $H'_{\text{sat}}(\gamma)$, la réunion de l'enveloppe analytique $H(\gamma)$ de γ et de tous les plats en triangles isocèles qui ont une intersection non vide avec $H(\gamma)$.

Nous tronquons cette enveloppe également :

Définition 22. Soit γ un segment géodésique de X . On appelle *enveloppe analytique saturée réduite* de γ , et on note $H'_{\text{sat}}(\gamma)$, l'ensemble des points de l'enveloppe analytique saturée $H_{\text{sat}}(\gamma)$ de γ qui sont à distance au plus $2|\gamma|$ du milieu de γ , où $|\gamma|$ est la longueur CAT(0) de γ dans X .

Ceci fournit une approche alternative pour la propriété RD, qui repose sur le critère de I. Chatterji et K. Ruane [3] pour la propriété RD, plutôt que sur la notion de branchement polynomial pour G . Cette autre approche n'est cependant pas sensiblement différente à celle présentée pour le théorème 13 : les deux articles [3] et [5] présentent leurs critères respectifs comme des modifications immédiates de la proposition 2.3 de V. Latorgue [6] ; ces deux approches appartiennent à un même cercle d'idées.

Plus précisément, la démonstration du lemme 10 s'adapte (immédiatement) au cas saturé et implique que :

Lemme 23. Soient A, B, C trois sommets de X et soit D le disque totalement géodésique de X de bord le triangle géodésique (ABC) . Alors l'intersection

$$H'_{\text{sat}}([AB]) \cap H'_{\text{sat}}([BC]) \cap H'_{\text{sat}}([AC])$$

est non vide

Ce lemme, combiné avec les arguments de la Section 5, montre alors que la proposition 1.7 de [3] s'applique, en choisissant pour ensembles $C(x, y)$ l'ensemble des sommets de l'enveloppe analytique saturée réduite du segment $[x, y]$ de X .

RÉFÉRENCES

- [1] The property of rapid decay, AIM workshop summary, by Indira Chatterji and Laurent Salo - Coste, <http://www.aimath.org/pastworkshops/rapiddecayrep.pdf>

- [2] List of open problems from the workshop held at the AIM, Palo Alto, California (2006). Organized by I. Chatterji and L. Salo -Coste. Available at <http://www.aimath.org/WWN/rapiddecay>.
- [3] Chatterji I., Ruane, K. Some geometric groups with rapid decay. *Geom. Funct. Anal.* 15 (2005), no. 2, 311{339.
- [4] Barre S., Pichot M., Propriete de decroissance rapide pour le groupe de Wise, note non publiee (2007), <http://web.univ-ubs.fr/lmam/barre/> ou <http://www.math.mcgill.ca/~pichot>.
- [5] Barre S., Pichot M., Intermediate rank and property RD, preprint, <http://arxiv.org/abs/0710.1514>.
- [6] La orgue, Vincent A proof of property (RD) for cocompact lattices of $SL(3, \mathbf{R})$ and $SL(3, \mathbf{C})$. *J. Lie Theory* 10 (2000), no. 2, 255{267.
- [7] La orgue, Vincent, K -theorie bivariante pour les algebres de Banach et conjecture de Baum-Connes. (French) [Bivariant K -theory for Banach algebras and the Baum-Connes conjecture] *Invent. Math.* 149 (2002), no. 1, 1{95.
- [8] Valette, Alain, Introduction to the Baum-Connes conjecture. With an appendix by Guido Mislin. *Lectures in Mathematics ETH Zurich*. Birkhauser Verlag, Basel, 2002
- [9] Wise, Daniel T., A non-Hop an automatic group. *J. Algebra* 180 (1996), no. 3, 845{847.