Plongements complètement intégrables

Une submersion $\Phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ définit un feuilletage $\mathcal{F}_\Phi$ qui mérite le qualificatif de **simple**. Ses feuilles vérifient les trois propriétés suivantes:

1) chaque feuille est une sous-variété plongée et fermée dans $\mathbb{R}^n$,

2) chaque feuille est parallélisable et son fibré normal est trivial,

3) si $m = 1$, aucune feuille n'est compacte.

Inversement un plongement fermé $h : L \longrightarrow \mathbb{R}^n$ d'une variété quelconque L de dimension $n - m$ pouvant avoir à la fois des composantes compactes et d'autres non compactes, sera dit **complètement intégrable (CI)**[resp. **fortement complètement intégrable (FCI)**] s'il existe une submersion Φ telle que

$$h(L) \subset \Phi^{-1}(0) \qquad [\text{resp.} h(L) = \Phi^{-1}(0)].$$

L'objectif de ce travail est alors de répondre aux deux questions suivantes:

a) Quelles sont les variétés L qui admettent des plongements CI ? et dans quel espace $\mathbb{R}^n$? en particulier les trois conditions énumérées plus haut sont-elles suffisantes pour garantir l'existence d'un plongement CI ou FCI de L ?

b) Pour une telle variété, la complète intégrabilité dépend-elle ou non du plongement ? de la dimension de l'espace euclidien ?

Le principal outil utilisé est le h-principe de Philipps-Gromov complété par tous les résultats sur la classification des immersions et plongements remontant à la période 1950-80. Comme application nous obtiendrons des critères permettant de décider qu'une variété compacte L peut ou non être feuille d'un feuilletage (quelconque) d'un espace euclidien $\mathbb{R}^n$.

En particulier la sphère $\mathbb{S}^3$ peut-elle être feuille d'un feuilletage de dimension 3 dans $\mathbb{R}^5$ ou $\mathbb{R}^6$??