UNIVERSITÉ PARIS 7 - DENIS DIDEROT

Année : 2000 N° |_|_|_|_|_|_|_|_|_|

THÈSE

Spécialité : mathématiques

pour obtenir le grade de

DOCTEUR de L'UNIVERSITÉ PARIS 7

presentée par

Bertrand Patureau-Mirand

Caractères et fonctions de poids sur les catégories de diagrammes trivalents

Directeur de thèse : Pierre Vogel
Soutenue le *21 décembre 2000*

Rapporteurs :

Maxim Kontsevich

Thang Le

Jury :
Nathan Habegger
Bernhard Keller
Christine Lescop
Gregor Masbaum
Pierre Vogel

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier Pierre Vogel pour m'avoir fait partager son goût pour ce domaine de recherche. J'ai apprécié sa grande disponibilité et nos nombreuses discussions ont toujours été extrêmement stimulantes et utiles.

Je suis très reconnaissant envers Maxim Kontsevich et Thang Le d'avoir pris le temps d'évaluer mon travail.

Je remercie aussi Nathan Habegger, Bernhard Keller et Christine Lescop d'avoir accepté de faire partie de mon jury. Gregor Masbaum a longtemps été le seul regard extérieur sur ma thèse et je tiens tout particulièrement à le remercier pour ses conseils.

Je n'oublie pas toutes les personnes qui ont rendu ma soutenance possible dans des délais brefs.

Enfin, mes pensées vont à Camille, à mes parents et à mes frères dont l'affection m'a toujours été d'un grand soutient.

Table des matières

1 Les diagrammes trivalents **3**
- 1.1 Modules de diagrammes . . . 3
- 1.2 L'intégrale de Kontsevich . . . 4
- 1.3 L'algèbre Λ . . . 5

2 Fonction de poids associée à une algèbre de Lie quadratique **6**
- 2.1 Le foncteur Φ_L . . . 6
- 2.2 Propriétés communes à tous les foncteurs Φ_L . . . 8

3 Démonstration de l'existence de χ **10**
- 3.1 Les caractères fondamentaux . . . 10
- 3.2 Le caractère χ_1 pour les familles $\mathfrak{sl}$ et $\mathfrak{osp}$ . . . 11
  - 3.2.1 Le foncteur $\Phi_{\mathcal{M}}$ . . . 11
  - 3.2.2 Construction du caractère χ_1 pour les familles $\mathfrak{sl}$ et $\mathfrak{osp}$ 15
- 3.3 Le caractère χ_2 pour les familles $\mathfrak{sl}$, $\mathfrak{osp}$ et $\mathfrak{D}_{2\,1}$ . . . 17
- 3.4 Le caractère χ_3 pour les familles $\mathfrak{sl}$, $\mathfrak{osp}$, $\mathfrak{D}_{2\,1}$ et $\mathfrak{sl}_2$ . . . 19
  - 3.4.1 Théorème d'existence . . . 19
  - 3.4.2 Propriétés du caractère $\chi_{\mathfrak{D}_{2\,1}}$ . . . 21
  - 3.4.3 Propriétés du foncteur $\Phi_{\mathfrak{gl}}$ . . . 25
  - 3.4.4 Démonstration de l'existence du caractère χ_3 . . . 26
- 3.5 Les caractères exceptionnels et la relation du carré . . . 29
  - 3.5.1 Théorème d'existence . . . 29
  - 3.5.2 Unicité de χ_4 . . . 30
  - 3.5.3 χ_3 et les relations exceptionnelles : . . . 34

4 Les cas de $\mathfrak{g}(3)$, $\mathfrak{f}(4)$ et les branchements **36**

5 La série exceptionnelle : **40**
- 5.1 La catégorie $\mathcal{E}$ . . . 40
- 5.2 Relations "skein" dans $\widetilde{\mathcal{D}}$ . . . 48
  - 5.2.1 Les algèbres A_n . . . 48
  - 5.2.2 L'invariant universel de Vassiliev-Kontsevich . . . 50

6 Le cas de spin$_7$ **57**

7 Exemples de calculs **60**

Table des figures

1 Relations “skein” pour $\widetilde{Z}$ 55
2 Relation “skein” pour $\widetilde{Z}$ 55
3 Relation “skein” pour $\widetilde{Z}$ 56
4 Relation “skein” pour Z_{spin_7} 58

Introduction

On définit un nœud comme un plongement lisse du cercle dans l'espace $\mathbb{R}^3$. La théorie des nœud s'intéresse aux classes d'isotopies de ces plongements. K.W.F. Reidemeister est le premier en 1926 à s'intéresser à la classification des noeuds. Il utilise la représentation des nœuds par des graphes planaires et donne trois types de mouvements sur ces graphes. Il montre que deux nœuds sont isotopes si et seulement si il est possible de passer d'une représentation plane de l'un à celle de l'autre en appliquant un nombre fini de ces mouvements.

En 1928, J.W. Alexander publie le premier invariant polynômial des nœuds. Cet invariant est un polynôme à une variable ne dépendant que de la classe d'isotopie du nœud. Il est construit à l'aide de matrices mais dans les années soixante, J.H. Conway donne une procédure de calcul de cet invariant à l'aide de relations "skeins".

Il faut ensuite attendre les années quatre-vingt pour voir apparaître de nouveaux invariants polynômiaux. En 1984, V.F. Jones note que certaines équations en théorie des nœuds sont similaires à celles trouvées dans des algèbres d'opérateurs en mécanique quantique. En utilisant les algèbres de Von Neumann, il crée un invariant polynômial à une variable, calculable en utilisant des relations "skeins". En 1985, les six mathématiciens Hoste, Ocneanu, Millett, Freyd, Lickorish, et Yetter découvrent simultanément le polynôme à deux variables appelé "HOMFLY" (le nom provient de leurs initiales) qui est une généralisation du polynôme de Jones et en 1987, L.H. Kauffman découvre une autre généralisation du polynôme de Jones construit à partir d'un crochet polynômial qui est un invariant d'entrelacs en bande.

C'est en 1990 que V.A. Vassiliev publie, dans un article intitulé "Cohomology of knot spaces", une définition en termes cohomologiques des invariants de type fini. Il introduit une filtration décroissante sur l'espace vectoriel de base l'ensemble des nœuds. Les invariants de type finis sont ceux qui sont nuls sur l'un des termes de cette filtration. Par la suite, J. Birman et X-S. Lin ont montrés que les invariants de type fini sont plus puissants pour distinguer les nœuds que tous les invariants polynômiaux découvert jusqu'ici.

En 1992, M. Kontsevich donne une présentation combinatoire des invariants de type fini. Il construit une intégrale à valeurs dans un espace vectoriel engendré par des diagrammes de cordes qui est l'invariant de type fini universel. En fait cette intégrale réalise une bijection entre le gradué associé à la filtration de Vassilev et l'espace des diagrammes de corde. La question de savoir si ces invariants distinguent les noeuds est encore ouverte. L'inconvénient de l'invariant universel de type fini est qu'il prend ses valeurs dans des espaces de diagrammes trivalents (généralisant les diagrammes de

cordes) dont on ne connaît qu'une présentation. Même les dimensions de ces espaces restent aujourd'hui inconnues.

Toute variété de dimension trois peut être obtenue en faisant de la chirurgie le long d'un entrelacs en bande. Cette description est utilisée en 1995 par T. Le, H. et J. Murakami et T. Ohtsuki pour construire un invariant universel de type fini pour les variétés de dimension trois. Le logarithme de cet invariant prend ces valeurs dans un espace isomorphe au complété de l'algèbre Λ évoquée ci-après. L'année suivante, T. Le et J. Murakami donnent, en utilisant les travaux de Drinfield, une version algébrique de l'invariant universel de type fini.

D. Bar Nathan publie en 1995 un article dans lequel il utilise des algèbres de Lie quadratiques (munies de formes bilinéaires invariantes non dégénérées) pour détecter des éléments des modules de diagrammes. Il construit des fonctions de poids, qui sont des applications sur ces modules de diagrammes. Composées avec l'invariant universel, elles donnent des invariants de type fini à valeurs dans les tenseurs invariants d'une algèbre de Lie.

La même année, P. Vogel introduit des structures algébriques supplémentaires sur ces modules de diagrammes et commence une étude systématique de ces objets et des fonctions de poids qui y sont définies. En particulier, il définit une algèbre Λ qui agit sur plusieurs de ces modules. Les fonctions de poids provenant de superalgèbres de Lie simples induisent des caractères sur cette algèbre, à l'aide desquels il a été possible de montrer que les invariants de type fini sont plus vastes que ceux correspondant aux invariants polynômiaux. La compréhension de cette algèbre est centrale pour la connaissance globale des invariants de type fini. Pour une grande part, mon travail a été motivé par une conjecture disant que Λ serait un sous-anneau d'un anneau de polynôme à trois variables.

Les différentes parties de ce texte sont organisées de la manière suivante :

Dans la première partie, nous introduisons les modules de diagrammes et rappelons leurs liens avec l'intégrale de Kontsevich.

Dans la deuxième partie, nous introduisons les fonctions de poids associées aux superalgèbres de Lie et nous énonçons un théorème sur la cohérence des caractères : plus précisément, on construit dans la troisième partie un morphisme d'algèbre graduée entre Λ et un quotient d'un anneau de polynôme à trois variables qui factorise tous les caractères induits par les superalgèbres de Lie simples.

La catégorie des diagrammes trivalents est étroitement liée aux représentations des superalgèbres de Lie. Nous explorons, dans les quatres dernières parties, des foncteurs sur la catégorie des diagrammes inspirés des branchements entre superalgèbres de Lie.

En particulier, on présente dans la dernière partie un jeu de relations "skein" complet pour l'invariant d'entrelacs en bandes associé à la représentation des spineurs de l'algèbre de Lie spéciale orthogonale $\mathfrak{so}(7)$.

1 Les diagrammes trivalents

1.1 Modules de diagrammes

Dans tout ce qui suit, Γ sera une variété compacte de dimension un à bord et X dénote un ensemble fini. Un (Γ, X)-diagramme est un graphe fini K, dont tous les sommets sont trivalents ou monovalents, muni des données suivantes :

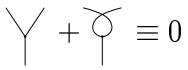
1. Un isomorphisme d'un sous-graphe de K vers $\Gamma \amalg X$ envoyant l'ensemble des sommets monovalents de K sur $\partial\Gamma \cup X$.

2. Pour chaque sommet trivalent x de K, un ordre cyclique sur l'ensemble des trois arêtes orientées arrivant en x.

La classe des (Γ, X)-diagrammes sera notée $\mathcal{C}(\Gamma, X)$. On peut représenter un (Γ, X)-diagramme par un graphe trivalent immergé dans le plan de manière à ce que l'ordre cyclique à chaque sommet soit donné par l'orientation du plan. On représentera d'un trait plus épais les arêtes appartenant à Γ.

Si $\mathcal{C}$ est une sous-classe de $\mathcal{C}(\Gamma, X)$ fermée pour le changement de l'ordre cyclique des sommets de ses diagrammes, on note par $\mathcal{A}(\mathcal{C})$ le quotient du $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $\mathbb{Q}\{\mathcal{C}\}$ de base $\mathcal{C}$ par les relations suivantes :

1. Si deux diagrammes de $\mathcal{C}$ ne diffèrent que par l'ordre cyclique de l'un de leurs sommets, leur somme est nulle (relation dite (AS) pour anti-symétrie).



2. la relation (IHX) fait intervenir trois diagrammes de $\mathcal{C}$ qui ne diffèrent qu'au voisinage d'une arète :

3. La relation (STU) qui est une variation de la relation (IHX) au voisinage de Γ :

En particulier, on note :

1. $\mathcal{A}(\Gamma, X)$ le module obtenu lorsque $\mathcal{C}$ est l'ensemble $\mathcal{C}(\Gamma, X)$;
2. $\mathcal{A}_c(\Gamma, X)$ le module obtenu lorsque $\mathcal{C}$ est l'ensemble $\mathcal{C}_c(\Gamma, X)$ des (Γ, X)-diagrammes K tels que $K \backslash \Gamma$ est connexe non vide ;
3. $\mathcal{A}_s(\Gamma, X)$ le module obtenu lorsque $\mathcal{C}$ est l'ensemble $\mathcal{C}_s(\Gamma, X)$ des (Γ, X)-diagrammes K tels que $K \backslash \Gamma$ est connexe et a au moins un sommet trivalent ;
4. $F(X) = \mathcal{A}_s(\emptyset, X)$, $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$ et $F_n = \mathcal{A}_s(\emptyset, [n])$.

On définit le degré d'un diagramme $K \in \mathcal{A}(\Gamma, X)$ par $a - s$ où a et s sont les nombres d'arêtes et de sommets trivalents de K. Ainsi, ces modules sont munis d'une graduation. On note d le diagramme de $\mathcal{A}(\emptyset, \emptyset)$ formé d'un seul cercle et on conviendra que son degré est nul.
Toute bijection entre des ensembles finis X et Y induit une bijection entre $\mathcal{A}(\Gamma, X)$ et $\mathcal{A}(\Gamma, Y)$. En particulier le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ opère sur F_n.
On dira qu'un diagramme K a n boucles si la dimension de son premier groupe d'homologie est n (i.e. $\dim(H_1(K)) = n$). Si n est un entier strictement positif, le degré d'un diagramme de F_n est égal à son nombre de boucles plus $n - 1$.
On a ici repris les notations de [Vo1] à l'exception des coefficients qui sont ici rationnels, de la définition du degré et des définitions de F_n qui n'entraîne des modifications que pour F_0 et F_2 qui sont ici pris nuls en degré respectifs zéro et un.

1.2 L'intégrale de Kontsevich

Il est facile de démontrer que le module gradué $\mathcal{A} = \mathcal{A}(S^1, \emptyset)$ peut être muni d'une structure d'algèbre de Hopf graduée, commutative et cocommutative, le produit (bien défini grâce aux relations (IHX)) de deux S^1-diagrammes trivalents K et K' étant donné par le S^1-diagramme trivalent obtenu en faisant la somme connexe du cercle de K avec celui de K' en un point des cercles distinct des sommets de K et K'. Le coproduit sur $\mathcal{A}$ est donné par la formule :

$$\begin{array}{rcl} \Delta : \mathcal{A}(S^1, \emptyset) & \longrightarrow & \mathcal{A}(S^1, \emptyset) \otimes \mathcal{A}(S^1, \emptyset) \\ K & \mapsto & \sum K' \otimes K'' \end{array}$$

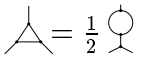
où K' est obtenu en enlevant un certain nombre de composantes connexes de $K\backslash\Gamma$ à K et K'' en enlevant les autres, la somme portant sur toutes ces possibilités.
L'algèbre $\mathcal{A}$ est donc l'algèbre symétrique du sous-module gradué $\mathcal{P}$ formé par ses éléments primitifs et ce module est relié aux modules F_n par l'isomorphisme :

$$\mathcal{P} \simeq \bigoplus_{n=2}^{+\infty} H^0(F_n, \mathfrak{S}_n)$$

$H^0(F_n, \mathfrak{S}_n)$ est en fait isomorphe au sous-espace vectoriel de F_n formé des éléments invariants sous l'action du groupe symétrique sur F_n.
Si on note Θ le $(S^1, \emptyset)$-diagramme représenté par le cercle et un de ses diamètres alors l'intégrale de Kontsevich associe à chaque nœud orienté son invariant de Vassiliev universel à valeurs dans l'algèbre $\hat{\mathcal{A}}_r$ qui est la complétée pour la graduation du quotient $\mathcal{A}_{/(\Theta)}$.
On appelle système de poids de degré n une forme linéaire sur $\mathcal{A}_n^r$. Tout système de poids de degré n fournit, via l'intégrale de Kontsevich, un invariant de Vassiliev d'ordre n.

1.3 L'algèbre Λ

Dans cette section est introduite l'algèbre graduée de diagramme Λ qui agit de manière naturelle sur les modules $\mathcal{A}_s(\Gamma, X)$.
Λ est définie comme le sous-espace vectoriel formé des éléments de F_3 totalement antisymétriques sous l'action du groupe symétrique.
Λ est naturellement munie d'une structure d'algèbre commutative et agit sur chaque module $\mathcal{A}_s(\Gamma, X)$. Si u appartient à Λ et $K \in \mathcal{A}_s(\Gamma, X)$ est un diagramme, un diagramme représentant $u.K$ est obtenu en insérant u au niveau d'un sommet trivalent de K. Afin de rendre cette action cohérente avec les graduations des modules, on convient de définir le degré d'un élément de Λ comme son degré dans F_3 moins deux (de sorte que l'unité de Λ est de degré nul).
On a la description suivante de F_n pour n petit : F_0 est un Λ-module libre de rang un engendré par l'unique diagramme (aux relations AS près) de degré un ; F_1 est nul ; F_2 est un Λ-module libre de rang un engendré par l'unique diagramme (aux relations AS près) de degré deux. De plus on ne connaît pas d'exemple d'élément de F_3 qui ne soit pas dans Λ. D'autre part, Λ possède un seul élément de degré 1 noté t qui est central et on peut construire la famille x_n d'éléments de Λ qui engendrent avec t une sous algèbre Λ_0 de Λ.

$t =$  $= \frac{1}{2}$ $\qquad x_n =$

Il n'y a pas de contre-exemple à la conjecture suivante : $\Lambda = \Lambda_0$.

2 Fonction de poids associée à une algèbre de Lie quadratique

2.1 Le foncteur Φ_L

Soit L une superalgèbre de Lie sur un corps k de caractéristique nulle munie d'un élément de Casimir non dégénéré $\Omega \in L \otimes L$. Le Casimir fournit un isomorphisme de L-module entre L et son dual et la forme bilinéaire sur L supersymétrique invariante associée sera noté $< .,. >$. On construit une catégorie $\mathcal{D}$ de diagrammes et un foncteur noté $\Phi_{L,\Omega}$ de $\mathcal{D}$ vers $\mathcal{L}_L$ une sous-catégorie de celle des représentations de L.
Soit $\mathcal{D}$ la catégorie $\mathbb{Q}$-linéaire monoïdale définie par :

$$\mathrm{Obj}(\mathcal{D}) = \{[n], n \in \mathbb{N}\}$$

$$\mathcal{D}([p],[q]) = \mathcal{A}(\emptyset, [p] \amalg [q])$$

La composition d'un diagramme de $[p]$ vers $[q]$ avec un diagramme de $[q]$ vers $[r]$ est donnée par la réunion au dessus de $[q]$ des deux diagrammes (on les recolle en identifiant les sommets monovalents de même index des deux ensembles $[q]$).
Le produit tensoriel $[p] \otimes [q]$ vaut $[p+q]$ et celui de deux diagrammes est donné par l'image de leur réunion disjointe par l'isomorphisme de $[p] \amalg [q] \simeq [p+q]$ obtenu en augmentant de p chaque élément de $[q]$.
Soit $\mathcal{L}_L$ la catégorie $\mathbb{Q}$-linéaire monoïdale définie par :

$$\mathrm{Obj}(\mathcal{L}_L) = \left\{L^{\otimes n}, n \in \mathbb{N}\right\}$$

$$\mathcal{L}_L(L^{\otimes p}, L^{\otimes q}) = \mathrm{Hom}_L(L^{\otimes p}, L^{\otimes q})$$

Le bifoncteur Hom_L désigne les morphismes de L-modules.

Proposition 2.1 *Il existe un unique foncteur $\mathbb{Q}$-linéaire monoïdal $\Phi_{L,\Omega}$ de la catégorie $\mathcal{D}$ vers la catégorie $\mathcal{L}_L$ envoyant $[n]$ sur $L^{\otimes n}$ et les diagrammes suivant*

vers respectivement :

1. *Le Casimir* $\Omega \in L^{\otimes 2} \simeq \mathcal{L}_L(\mathbb{Q}, L^{\otimes 2})$
2. *Le crochet de Lie de* $L^{\otimes 2}$ *vers* L
3. *Le produit scalaire associé au Casimir de* $L^{\otimes 2}$ *vers* $\mathbb{Q}$
4. *Le dual du crochet de Lie de* L *vers* $L^{\otimes 2}$
5. *L'opérateur de symétrie* : $\begin{array}{ccc} L^{\otimes 2} & \longrightarrow & L^{\otimes 2} \\ x \otimes y & \mapsto & (-1)^{degré(x)degré(y)} y \otimes x \end{array}$

D'autre part, si L *est simple, il existe un caractère gradué :* $\chi_L : \Lambda \longrightarrow \mathbb{Q}[x]$ *vérifiant :*

$$\forall u \in \Lambda,\ \forall K \in \mathcal{A}_s(\Gamma, [p] \amalg [q]),\ \Phi_{L,\Omega}(uK) = \chi_L(u)_{|x=1} \Phi_{L,\Omega}(K)$$

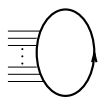
Si f est une bijection de $[p] \amalg [q]$ vers $[r] \amalg [s]$, alors f induit un isomorphisme de $\mathrm{Hom}_L(L^{\otimes p}, L^{\otimes q})$ vers $\mathrm{Hom}_L(L^{\otimes r}, L^{\otimes s})$ (par l'autodualité de L) mais aussi un isomorphisme de $\mathcal{A}(\emptyset, [p] \amalg [q])$ vers $\mathcal{A}(\emptyset, [r] \amalg [s])$ et il est facile de voir que $f_* \circ \Phi_L = \Phi_L \circ f_*$. En particulier, si $p + q = n$, on identifie souvent F_n à un sous-module de $\mathcal{A}(\emptyset, [p] \amalg [q])$.

On peut définir des variantes du foncteur Φ_L :

- On définit $\mathcal{D}_\Gamma$ comme la catégorie ayant les mêmes objets que $\mathcal{D}$ mais dont les morphismes sont donnés par

$$\mathcal{D}_\Gamma([p], [q]) = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{A}((S^1)^{\amalg n}, [p] \amalg [q])$$

  Si d'autre part E est un L-module, on peut encore montrer qu'il existe un unique foncteur $\Phi_{L,E} : \mathcal{D}_\Gamma \longrightarrow \mathcal{L}_L$ prolongeant Φ_L et envoyant



  sur $x_1 \otimes x_2 \otimes \ldots \otimes x_n \mapsto \mathrm{str}_E(x_1 x_2 \ldots x_n)$. La notation str_E désigne la supertrace sur le supermodule E et, par la suite, on notera $\mathrm{sdim}(E)$ la superdimension d'un module E (qui est égale à la dimension de la partie paire de E moins la dimension de sa partie impaire).

- Si L est une algèbre de lie sur une $\mathbb{Q}$-algèbre R munie d'un élément de Casimir $\Omega \in L \otimes_R L$ et si l'on considère $\mathcal{D}_b$ la sous-catégorie de $\mathcal{D}$ ayant les mêmes objets et dont les morphismes sont engendrés par les $(\emptyset, [p] \amalg$

$[q]$)-diagrammes dont toutes les composantes connexes rencontrent $[q]$, alors on peut définir de même un foncteur R-linéaire : $\Phi_L : \mathcal{D}_b \longrightarrow \mathcal{L}_L$ qui coïncide avec la restriction à $\mathcal{D}_b$ du foncteur Φ_L de la proposition si R et L satisfont aux hypothèses.

Enfin on se servira du

Lemme 2.1 *Soit $\psi : R \longrightarrow R'$ un morphisme entre deux $\mathbb{Q}$-algèbres commutatives, et $f : \mathfrak{h} \longrightarrow \mathfrak{g}$ un morphisme entre la R-superalgèbre de Lie $\mathfrak{h}$ et la R'-superalgèbre de Lie $\mathfrak{g}$; par ψ, $\mathfrak{g}$ est naturellement munie d'une structure de R-module et on suppose que f est un morphisme de R-algèbre de Lie. Si $\mathfrak{h}$ possède un élément de Casimir invariant $\Omega \in \mathfrak{h} \otimes \mathfrak{h}$ qui est envoyé par f sur $f_*(\Omega) \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ élément de Casimir $\mathfrak{g}$-invariant de $\mathfrak{g}$, alors l'application f_* induite par f et ψ entre la R-algèbre tensorielle de $\mathfrak{h}$ et la R'-algèbre tensorielle de $\mathfrak{g}$ vérifie pour tout $K \in \mathcal{D}_b([p],[q])$,*

$$f_* \circ \Phi_{\mathfrak{h},\Omega}(K) = \Phi_{\mathfrak{g},f_*\Omega}(K) \circ f_*$$

Ce lemme est une conséquence du fait que $\mathcal{D}_b$ est engendré comme catégorie $\mathbb{Z}$-linéaire monoïdale par les morphismes "crochet", "Casimir" et "symétrie" qui vérifient tous le lemme par hypothèse.

2.2 Propriétés communes à tous les foncteurs Φ_L

On connaît la liste complète des superalgèbres de Lie simples complexes quadratiques (cf [Ka] et [Vo2]). Elle est formée des superalgèbres $\mathfrak{sl}(V)$ où V est un superespace de superdimension non nulle, des superalgèbres $\mathfrak{psl}(V)$ si V est de superdimension nulle, des superalgèbres $\mathfrak{osp}(V)$ lorsque V est muni d'une forme bilinéaire supersymétrique non dégénérée, les superalgèbres $\mathfrak{D}_{2\,1,\delta}$ où δ est un paramètre complexe différent de 0 et de 1, les cinq algèbres exceptionnelles, les deux superalgèbres $\mathfrak{g}(3)$ et $\mathfrak{f}(4)$ et enfin les superalgèbres hamiltoniennes. Nous exclurons ces dernières qui induisent sur Λ le caractère trivial (cf [Vo2]).

L'action du Casimir Ω de L sur $L^{\otimes n}$ s'exprime comme l'image par Φ_L d'un diagramme de $\mathcal{A}(\emptyset, [n] \amalg [n])$. Sous l'action du Casimir, $L^{\otimes n}$ se scinde en espaces caractéristiques. En particulier, il est facile de voir que Ω agit par $2t$ sur L (où l'on note encore t l'élément $\chi_L(t)_{|x=1}$).
Sur $L^{\otimes 2}$, Ω agit comme $4t - 2\Psi$ où

$$\Psi = \Phi_L(\text{ })$$

On peut toujours décomposer $L^{\otimes 2}$ de la manière suivante :

$$L^{\otimes 2} = \Lambda^2 L \oplus S^2 L$$

De plus si $t \neq 0$, $\Lambda^2 L$ se décompose en la somme directe $L \oplus X_2$, Ψ agit par t sur L et par 0 sur X_2. Si L est l'une des superalgèbre de Lie de la famille $\mathfrak{D}_{2\,1,\delta}$ alors $t = 0$ et $\Lambda^2 L$ est une extension généralement non scindée de X_2 (noyau du crochet de Lie) par L.

Enfin, dans tous les cas, $S^2 L$ s'écrit $\mathbb{Q} \oplus E$ (le module trivial étant engendré par le Casimir) et le module E se décompose en trois espaces propres, les valeurs propres associées α, β, γ ont pour somme t. Certains des modules cités ci-dessus peuvent éventuellement être nuls mais il existe toujours des éléments $u(L) = -\frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{2}$ et $v(L) = \frac{\alpha\beta\gamma}{2}$ tels que sur E on ait la relation

$$\Psi^3 = t\Psi^2 + 2u\Psi + 2v \tag{1}$$

Le triplet $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{C}^3$ sera dit admissible pour (L, Ω) si l'équation (1) est vérifiée. La correspondance entre superalgèbres et triplets n'est pas univoque : Par exemple, pour $\mathfrak{sl}_2$, E est simple, Ψ y vaut $-t$ et il existe donc une infinité de triplets admissibles ; mais encore, des superalgèbres distinctes peuvent avoir les mêmes triplets admissibles, c'est le cas pour $\mathfrak{sl}_2$ et $\mathfrak{g}(3)$ et pour $\mathfrak{sl}_3$ et $\mathfrak{f}(4)$. Cependant, on peut remarquer que l'ensemble de tous les triplets admissibles se trouve sur cinq réunions de droites de $\mathbb{P}(\mathbb{C}[\alpha, \beta, \gamma])$:

- Si L est l'algèbre $\mathfrak{sl}(V)$ où V est un supermodule de superdimension quelconque alors à permutation des racines de Ψ près, on a $\alpha + \beta = 0$ donc le polynôme défini par $P_{\mathfrak{sl}} = v + ut$ est nul.

- Si L est l'algèbre $\mathfrak{osp}(V)$ où V est un supermodule muni d'une forme bilinéaire supersymétrique non dégénérée de superdimension quelconque alors à permutation des racines de Ψ près, on a $\alpha + 2\beta = 0$ donc le polynôme défini par $P_{\mathfrak{osp}} = 27v^2 + 18vut + 2vt^3 - 8u^3 + 8u^2t^2$ est nul.

- Si L est une des superalgèbres de Lie $\mathfrak{D}_{2\,1,\delta}$ où δ est un nombre complexe quelconque alors la somme des racines de Ψ est nulle et on pose $P_{\mathfrak{D}_{2\,1}} = t$.

- L'algèbre $\mathfrak{sl}_2$ est un cas particulier : E est alors simple et Ψ y vaut $-t$ et on peut unifier ce cas avec les précédents en imposant deux autres valeurs propres (d'espaces propres associés nuls) β et γ de somme $2t$ (de sorte que la somme des racines de Ψ reste égale à t). On donne ainsi à (t, u, v) n'importe quelles valeurs pourvu que le polynôme $P_{\mathfrak{sl}_2} = v - ut + t^3$ soit nul.

- Si L est une algèbre de Lie exceptionnelle, Ψ à deux valeurs propres de somme $\frac{t}{3}$ et on rajoute arbitrairement une troisième valeur propre égale à $\frac{2t}{3}$ toujours pour unifier ce cas avec les précédents ; alors $P_{\mathfrak{e}_7} = 27v + 18ut + 2t^3$ est nul.

Dans la suite on note $S = \mathbb{Q}[t, u, v]$ l'anneau des polynômes à trois indéterminées de degré respectif 1, 2 et 3. Pour chaque superalgèbre de Lie quadratique munie d'un triplet admissible L, on pose $I_L = Ker(f_L)$ où f_L est le morphisme d'algèbre graduée de S dans $\mathbb{Q}[x]$ qui envoie les indéterminées t, u et v sur leurs valeurs respectives $t(L)x$, $u(L)x^2$ et $v(L)x^3$ dans $\mathbb{Q}[x]$. Nous allons montrer le

Théorème 2.1 *Soit $I = \bigcap_L I_L$ alors il existe un unique caractère gradué $\chi : \Lambda \longrightarrow S/I$ tel que pour toute superalgèbre de Lie L de la liste ci-dessus, on ait :*

$$\chi_L = f_L \circ \chi$$

Remarque : D'autre part les calculs de [Kn1] montrent l'existence d'un morphisme d'algèbre surjectif :

$$\mathbb{Q}[t] \oplus P_{\mathfrak{sl}_2}.S \longrightarrow \Lambda_0$$

dont la composée avec χ est le morphisme quotient.
De plus l'application $\mathbb{Q}[t] \oplus P_{\mathfrak{sl}_2}.S \longrightarrow \Lambda$ est un isomorphisme en degré inférieur ou égal à dix.

3 Démonstration de l'existence de χ

3.1 Les caractères fondamentaux

Dans [Vo2], huit caractères gradués fondamentaux sont construits et tout caractère provenant d'une des superalgèbres de Lie simple mentionnée se déduit de l'un d'eux ; ces huit caractères sont :

- $\chi_{\mathfrak{sl}} : \Lambda \longrightarrow \mathbb{Q}[\delta, \beta]$ (degré(δ)= 1, degré(β)= 2).
- $\chi_{\mathfrak{osp}} : \Lambda \longrightarrow \mathbb{Q}[\delta, \alpha]$ (degré(δ)= 1, degré(α)= 1).
- $\chi_{\mathfrak{D}_{2\,1}} : \Lambda \longrightarrow \mathbb{Q}[\sigma_2, \sigma_3]$ (degré(σ_2)= 2, degré(σ_3)= 3).
- les cinq caractères χ_L à valeurs dans $\mathbb{Q}[t]$ pour les algèbres de Lie exceptionnelles $L = \mathfrak{g}_2$, $\mathfrak{f}_4$, $\mathfrak{e}_6$, $\mathfrak{e}_7$ et $\mathfrak{e}_8$.

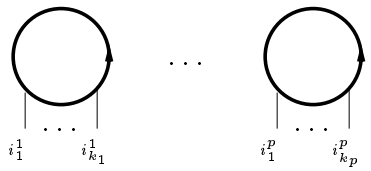
On construit des caractères à valeurs dans des quotients de S à l'aide de ces huit caractères.

3.2 Le caractère χ_1 pour les familles $\mathfrak{sl}$ et $\mathfrak{osp}$

3.2.1 Le foncteur $\Phi_{\mathcal{M}}$

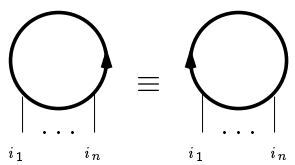
En reprenant les constructions d'épaississement de [BN], il est facile de construire une catégorie $\mathcal{M}$ monoïdale, $\mathbb{Q}$-linéaire et un foncteur $\Phi_{\mathcal{M}} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{M}$ qui factorise tous les foncteurs $\Phi_{\mathfrak{gl}(E)}$ et $\Phi_{\mathfrak{osp}(E)}$ (La construction repose sur les représentations standards de $\mathfrak{gl}$ et $\mathfrak{osp}$) :

Définitions et notations On désigne les éléments de $\mathfrak{S}_n$ comme produit de cycles disjoints. Par exemple $(1,2)(3)$ désigne la transposition de $\mathfrak{S}_3$ qui échange 1 et 2. Si $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ est l'élément $(i_1^1, \ldots, i_{k_1}^1) \ldots (i_1^p, \ldots, i_{k_p}^p)$, on désigne par $< \sigma >$ le diagramme suivant de $\mathcal{A}((S^1)^{\amalg p}, [n])$:



On note Δ le $(S^1, \emptyset)$-diagramme formé du seul cercle et on définit Σ_n (respectivement Σ'_n) comme le sous $\mathbb{Q}[\Delta]$-module libre de $\mathcal{D}_\Gamma([0],[n])$ de base $\{< \sigma >, \sigma \in \mathfrak{S}_n\}$ (respectivement $\{< \sigma >, \sigma \in \mathfrak{S}_n, \sigma$ a un point fixe$\}$).
Ensuite, on définit les catégories quotientes $\mathcal{D}_{\mathfrak{osp}}$, $\mathcal{D}_{\mathfrak{gl}}$ et $\mathcal{D}_{\mathfrak{sl}}$ de $\mathcal{D}_\Gamma$ (et les foncteurs quotients $\Phi_{\mathfrak{osp}}$, $\Phi_{\mathfrak{gl}}$ et $\Phi_{\mathfrak{sl}}$) obtenues en annulant les morphismes suivant :

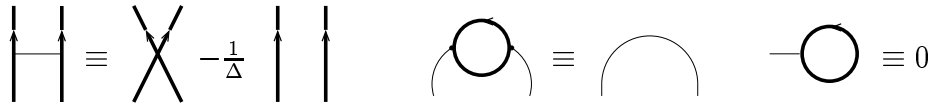
- Pour $\mathcal{D}_{\mathfrak{osp}}$:



(On oublie l'orientation des courbes des diagrammes)

- Pour $\mathcal{D}_{\mathfrak{gl}}$:

- Pour $\mathcal{D}_{\mathfrak{sl}}$:



Cette dernière catégorie est en fait un quotient de $\mathcal{D}_\Gamma \otimes \mathbb{Q}[\Delta, \Delta^{-1}]$

Proposition 3.1 *Soit E un superespace vectoriel de dimension finie. On adopte le choix suivant pour la forme bilinéaire de $\mathfrak{osp}(E)$ (respectivement $\mathfrak{gl}(E)$ et $\mathfrak{sl}(E)$) : $< x, y >= \frac{1}{2} str_E(xy)$ (respectivement $< x, y >= str_E(xy)$).*

- *Le foncteur $\Phi_{\mathfrak{osp}(E),E}$ se factorise par $\Phi_{\mathfrak{osp}}$.*
- *Le foncteur $\Phi_{\mathfrak{gl}(E),E}$ se factorise par $\Phi_{\mathfrak{gl}}$.*
- *Si la superdimension de E est non nulle, le foncteur $\Phi_{\mathfrak{sl}(E),E}$ se factorise par $\Phi_{\mathfrak{sl}}$.*
- *On a les isomorphismes naturels :*
  $\mathcal{D}_{\mathfrak{gl}}([p],[q]) \simeq \Sigma_{p+q}$ et $\mathcal{D}_{\mathfrak{sl}}([p],[q]) \simeq (\Sigma_{p+q/\Sigma'_{p+q}}) \otimes \mathbb{Q}[\Delta, \Delta^{-1}]$.
- *$\forall K \in F_n$, $\exists! x \in \Sigma_n$ tel que $\Phi_{\mathfrak{gl}}(K) = \Phi_{\mathfrak{gl}}(x)$ et $\Phi_{\mathfrak{sl}}(K) = \Phi_{\mathfrak{sl}}(x)$.*
- *Les caractères $\chi_{\mathfrak{sl}}$ et $\chi_{\mathfrak{osp}}$ sont déterminés par :*
  Si K appartient à F_n, si u est un élément de Λ, si les polynômes P et Q vérifient $\chi_{\mathfrak{sl}}(u) = P(\delta, \beta)$ et $\chi_{\mathfrak{osp}}(u) = Q(\delta, \alpha)$ alors

$$\Phi_{\mathfrak{gl}}(u.K) = P(\Delta, 1)\Phi_{\mathfrak{gl}}(K) \quad et \quad \Phi_{\mathfrak{osp}}(u.K) = Q(\Delta, 1)\Phi_{\mathfrak{osp}}(K)$$

Pour la démonstration de cette proposition, nous renvoyons aux arguments de [Vo2].

Définition de $\mathcal{M}$:

On introduit d'abord la notion de X-surface marquée qui sera la donnée d'une classe d'isomorphisme de surface compacte à bord munie d'une bijection entre l'ensemble fini X et des tangentes non nulles au bord prises en des points distincts. Deux telles surfaces sont isomorphes s'il existe un difféomorphisme entre elles qui respecte les bijections de X vers les tangentes de chacune.
On note $M(X)$ (respectivement $M[n]$) le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel engendré par les X-surfaces marquées (respectivement les $[n]$-surfaces marquées) quotienté

par les relations suivantes : Si V est une X-surface marquée et si V' est obtenue en remplaçant l'une des tangentes de V par son opposée, alors :

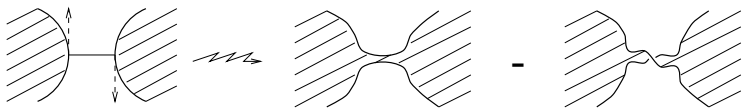
$$V' \equiv -V$$

Comme pour $F(X)$, le groupe symétrique $\mathfrak{S}(X)$ agit sur $M[X]$ et en reproduisant la construction de $\mathcal{D}$, on définit $\mathcal{M}$ par :

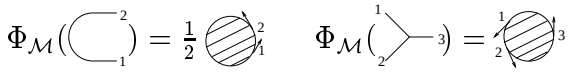
$$\mathrm{Obj}(\mathcal{M}) = \{[n],\ n \in \mathbb{N}\}$$

$$\mathcal{M}([p],[q]) = M([p] \amalg [q]) \simeq M[p+q]$$

Le produit tensoriel sur $\mathcal{M}$ est donné par la réunion disjointe, la composition $V_1 \circ V_2$ est construite de la manière suivante : On joint chaque tangente du but de V_1 à la tangente correspondante de la source de V_2 puis on épaissit en appliquant la règle suivante :

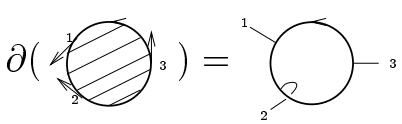


Enfin $\Phi_{\mathcal{M}}$ prend les valeurs suivantes :



Il est facile de voir que dans $M[2]$ et $M[3]$, ces deux surfaces présentent les mêmes symétries que les diagrammes correspondant et un simple calcul montre que l'image par $\Phi_{\mathcal{M}}$ d'une relation (IHX) est bien nulle.

On définit alors les foncteurs $\partial_{\mathfrak{gl}}$ et $\partial_{\mathfrak{osp}}$ entre les catégories $\mathcal{M}$ et $\mathcal{D}_\Gamma$: Si V est une $[n]$-surface marquée ayant p composantes de bord et si ϵ est une orientation de ∂V, on désigne par $\partial(V,\epsilon)$ le diagramme formé des p cercles orientés constituant le bord de ∂V sur lequel on a fixé n "jambes" numérotés aux lieux des n tangentes :



On pose alors :

$$\partial_{\mathfrak{gl}}(V) = \sum_{x \text{ orientation de } V} \partial(V, \epsilon(x))$$

$$\partial_{\mathfrak{osp}}(V) = 2^{-p} \sum_{\epsilon \text{ orientation de } \partial V} \partial(V,\epsilon)$$

(On a noté $\epsilon(x)$ l'orientation de ∂V induite par x et p le nombre de composante de bord de V).

Proposition 3.2 *Soit $K \in \mathcal{D}([p],[q])$ et $V = \Phi_{\mathcal{M}}(K)$.*
$\partial_{\mathfrak{gl}}(V)$ et $\partial_{\mathfrak{osp}}(V)$ sont en fait des éléments de Σ_{p+q} et on a :

$$\Phi_{\mathfrak{gl}} \circ \partial_{\mathfrak{gl}}(V) = \Phi_{\mathfrak{gl}}(K) \qquad \Phi_{\mathfrak{osp}} \circ \partial_{\mathfrak{osp}}(V) = \Phi_{\mathfrak{osp}}(K)$$

La démonstration de cette propriété est la même que celle faite dans [BN] pour justifier la construction des applications d'épaississement des diagrammes.

Le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $M_c[0]$ ("c" pour engendré par les surfaces connexes) est naturellement munie d'une structure d'algèbre en prenant pour le produit de deux surfaces leur somme connexe. Ainsi $M_c[0]$ est l'anneau $\mathcal{S} \simeq \mathbb{Q}[\delta,\alpha,\beta]_{/(\alpha\beta-\alpha^3)}$ où α, β et δ sont respectivement les classes d'isomorphie du plan projectif réel, du tore $S^1 \times S^1$ et du disque.
De plus, toujours par la somme connexe, les modules $M_c[n]$ sont munis d'une structure de $\mathcal{S}$-module gradué de type fini. Il est possible de décrire une famille génératrice de $M_c[n]$ de la manière suivante : Notons Σ la sphère orientée de $\mathbb{R}^3$ et D le disque ouvert de $\mathbb{R}^2$. L'ensemble
$\mathcal{E}_n^p = \{V \simeq \Sigma \setminus D^{\amalg p}$ marquées par $[n]$ tangentes respectant l'orientation, chaque composante connexe de ∂V étant muni d'au moins une marque $\}$
est naturellement en bijection avec
$\{\sigma \in \mathfrak{S}_n$ telles que σ partitionne $[n]$ en p orbite$\}$.
On notera $[\sigma]$ la classe dans $M_c[n]$ de la surface de $\mathcal{E}_n = \bigcup_p \mathcal{E}_n^p$ correspondant à $\sigma \in \mathfrak{S}_n$.
Il est facile de voir que $M_c[n]$ est engendré par les surfaces marquées de $\mathcal{E}_n$. De plus, à l'aide d'un difféomorphisme de $\Sigma \setminus D^{\amalg p}$ renversant l'orientation, on montre l'indentité :$[\sigma] = (-1)^n[\sigma^{-1}]$.

Proposition 3.3 *Il existe un caractère gradué $\chi_{\mathcal{M}} : \Lambda \longrightarrow \mathcal{S}$ tel que, quel que soient $K \in F_n$ et $u \in \Lambda$, on ait la propriété*

$$\Phi_{\mathcal{M}}(u.K) = \chi_{\mathcal{M}}(u).\Phi_{\mathcal{M}}(K)$$

De plus $\chi_{\mathcal{M}}$ mod $(\alpha) = \chi_{\mathfrak{sl}}$ et $\chi_{\mathcal{M}}$ mod $(\beta - \alpha^2) = \chi_{\mathfrak{osp}}$.

Démonstration. Pour commencer, $\Phi_{\mathcal{M}}(\Lambda)$ est inclus dans la partie totalement antisymétrique de $M_c[3]$ qui est le module libre de rang un engendré par le disque $[(1,2,3)]$ ($(1,2,3)$ désigne le 3-cycle de $\mathfrak{S}_3$ qui envoie 1 sur 2).

Si u est un élément de Λ, on peut donc définir $\chi_{\mathcal{M}}(u)$ comme l'élément de $\mathcal{S}$ vérifiant $\Phi_{\mathcal{M}}(u) = \chi_{\mathcal{M}}(u).[(1,2,3)]$. Comme tout diagramme K de F_n vu comme élément de $\mathcal{D}([0],[n])$ peut s'écrire comme la composée de l'élément unité de Λ (u_0 vu comme élément de $\mathcal{D}([0],[3])$) et d'un diagramme $\hat{K}$ de $\mathcal{D}([3],[n])$, on a :
$\Phi_{\mathcal{M}}(u.K) = \Phi_{\mathcal{M}}(u \circ \hat{K}) = \chi_{\mathcal{M}}(u)\Phi_{\mathcal{M}}(u_0) \circ \Phi_{\mathcal{M}}(\hat{K}) = \chi_{\mathcal{M}}(u)\Phi_{\mathcal{M}}(u_0 \circ \hat{K}) = \chi_{\mathcal{M}}(u)\Phi_{\mathcal{M}}(K)$. Les relations entre $\chi_{\mathcal{M}}$, $\chi_{\mathfrak{sl}}$ et $\chi_{\mathfrak{osp}}$ sont des conséquences directes de la proposition 3.2. □

En particulier, si L est l'algèbre $\mathfrak{sl}(E)$ on désigne par J_L l'idéal de $\mathcal{S}[x]$: $J_L = (\alpha) + (\beta - x^2) + (\delta - \mathrm{sdim}(E)x)$ et si L est l'algèbre $\mathfrak{osp}(E)$ on pose $J_L = (\alpha - x) + (\beta - x^2) + (\delta - \mathrm{sdim}(E)x)$ alors dans les deux cas, (en identifiant $\mathcal{S}$ a une sous-algèbre de $\mathcal{S}[x]$), on a :

$$\chi_L = \chi_{\mathcal{M}} \bmod J_L$$

3.2.2 Construction du caractère χ_1 pour les familles $\mathfrak{sl}$ et $\mathfrak{osp}$

Le premier pas vers la construction de χ consiste à modifier le caractère $\chi_{\mathcal{M}}$ en un caractère χ_1 a valeur dans un quotient de S.

Proposition 3.4 *Il existe un caractère*

$$\chi_1 : \Lambda \longrightarrow S_{/(P_{\mathfrak{sl}} P_{\mathfrak{osp}})}$$

et un morphisme d'algèbre graduée $g : S_{/(P_{\mathfrak{sl}} P_{\mathfrak{osp}})} \longrightarrow \mathcal{S}$ *tels que* $g \circ \chi_1 = \chi_{\mathcal{M}}$ *et pour toute superalgèbre de Lie* L *de type* $\mathfrak{sl}$ *ou* $\mathfrak{osp}$ *on ait :*

$$\chi_L = \chi_{\mathcal{M}} \ mod\ J_L = f_L \circ \chi_1$$

Le reste de cette section est consacré à la démonstration de cette proposition. Pour construire g, on peut calculer l'image par $\Phi_{\mathcal{M}}$ de la relation (1) ou utiliser la formule établie dans [Vo2] pour chacun des caractères χ_L cités :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \chi_L(x_n) = \frac{4tv + 2t^2u - 2t^4 - 3v - tu + 7t^3 - 7t^2 + 2t}{(1 - t - 2u - 2v)(1-t)(1-2t)} \qquad (2)$$

Dans les deux cas, on est amené à définir $f : S \longrightarrow \mathcal{S}$ par :

$$f(t) = \delta - 2\alpha$$

$$f(u) = 2\beta + 6\alpha^2 - \alpha\delta$$

$$f(v) = 16\alpha^3 - 2\delta\beta - 2\delta\alpha^2$$

On trouve alors que le noyau de f est l'idéal principal $(P_{\mathfrak{sl}}P_{\mathfrak{osp}})$ ce qui permet de factoriser f en un morphisme d'algèbre $g : S_{/(P_{\mathfrak{sl}}P_{\mathfrak{osp}})} \hookrightarrow \mathcal{S}$. Pour pouvoir factoriser $\chi_{\mathcal{M}}$ par g, il faut montrer que $\chi_{\mathcal{M}}(\Lambda)$ est inclus dans $\mathrm{Im}(g)$.
Pour cela on considère les superalgèbres de Lie suivantes qui admettent plusieurs représentations standards :

- $L_1 = \mathfrak{so}(5) \simeq L_1' = \mathfrak{sp}(4)$
- $L_2 = \mathfrak{sl}(4) \simeq L_2' = \mathfrak{so}(6)$
- $L_3 = \mathfrak{sl}(2,1) \simeq L_3' = \mathfrak{osp}(2,2)$

En suivant pour le Casimir de chacune de ces algèbres les conventions de la section précédente, chacun des isomorphismes envoie le Casimir Ω_i de L_i sur $\lambda_i\Omega_i'$ où Ω_i' désigne le Casimir de L_i'. En particulier, ces algèbres étant isomorphes on a : $\forall u \in \Lambda$, $\chi_{L_i}(u)_{|x=1} = \chi_{L_i'}(u)_{|x=\lambda_i}$. Ces paires de caractères pouvant être calculées par l'intermédiaire de $\chi_{\mathcal{M}}$, cela fournit les informations suivantes :
On définit six caractères sur $\mathcal{S}$ par leurs valeurs sur le triplet (δ, α, β) :

- $\Psi_1 : (\delta, \alpha, \beta) \mapsto (10, 2, 4)$
- $\Psi_1' : (\delta, \alpha, \beta) \mapsto (4, -1, 1)$
- $\Psi_2 : (\delta, \alpha, \beta) \mapsto (4, 0, 1)$
- $\Psi_2' : (\delta, \alpha, \beta) \mapsto (6, 1, 1)$
- $\Psi_3 : (\delta, \alpha, \beta) \mapsto (2, 0, 4)$
- $\Psi_3' : (\delta, \alpha, \beta) \mapsto (0, -1, 1)$

La composé de $\chi_{\mathcal{M}}$ avec chacun de ces morphismes donne une renormalisation du caractère de l'une des six algèbres ci-dessus et on a

$$\chi_{\mathcal{M}}(\Lambda) \subset \bigcap_{i=1}^{3} \mathrm{Ker}\,(\Psi_i' - \Psi_i)$$

De plus ces informations sur l'image de χ_L sont suffisantes pour démontrer la proposition car :

Lemme 3.1

$$Im\, g = \bigcap_{i=1}^{3} Ker\,(\Psi_i' - \Psi_i)$$

Démonstration. Pour voir que $\operatorname{Im} g \subset \bigcap_{i=1}^{3} \operatorname{Ker}(\Psi_i' - \Psi_i)$ il suffit de vérifier que $\Psi_i'(x)$ et $\Psi_i(x)$ coïncident pour $i \in \{1,2,3\}$ et $x \in \{t,u,v\}$. L'application g étant graduée et injective, pour montrer l'égalité entre les espaces ci-dessus, il suffit de montrer l'égalité de leurs dimensions en chaque degré. On fait le calcul pour $\operatorname{Im} g$ en utilisant les séries génératrices :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \dim((S)_n)t^n = \frac{1}{(1-t)(1-t^2)(1-t^3)}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \dim((S_{/(P_{\mathfrak{sl}}P_{\mathfrak{osp}})})_n)t^n = \frac{1-t^9}{(1-t)(1-t^2)(1-t^3)}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \dim((\mathcal{S})_n)t^n = \frac{1-t^3}{(1-t)(1-t)(1-t^2)}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{codim}((\operatorname{Im} g)_n)t^n =$$

$$\frac{1-t^9}{(1-t)(1-t^2)(1-t^3)} - \frac{1-t^3}{(1-t)(1-t)(1-t^2)} = \frac{3}{1-t} - 3 - 2t - t^2 - t^3$$

Donc l'image de g est de codimension 3 en chaque degré $n \geq 4$.
D'autre part un calcul facile donne en degré $n \geq 3$:

$$\det\left(\left((\Psi_i' - \Psi_i)(\delta^{n+1-j}\alpha^{j-1})\right)_{i,j=1\ldots3}\right) = 2^{n+1}6^{n-2}(5 \times 4^{n-2} - 2 \times 10^{n-2})$$

Ce déterminant ne s'annule que pour $n = 3$, ce qui assure qu'en chaque degré $n \geq 4$, les formes linéaires induites par $(\Psi_i' - \Psi_i)$ sont indépendantes et donc que l'intersection de leur noyau est de codimension trois. Il reste à vérifier le lemme en bas degrés ce qui peut se faire directement terminant ainsi la démonstration. □

Remarque Il semble difficile de traduire de manière géométrique la restriction de l'image de $\chi_{\mathcal{M}}$ bien que ce caractère ait une construction par épaississement des diagrammes.

3.3 Le caractère χ_2 pour les familles $\mathfrak{sl}$, $\mathfrak{osp}$ et $\mathfrak{D}_{2\,1}$

En notant $R = \mathbb{Q}[a,b,c]_{/(a+b+c)}$ et k son corps de fractions, il existe une R-superalgèbre de Lie $\mathfrak{D}_{2\,1}$ muni d'un élément de Casimir $\Omega \in \mathfrak{D}_{2\,1} \otimes \mathfrak{D}_{2\,1}$ telle que

- En étendant les coefficients à k, Ω est un élément de Casimir non dégénéré de $\bar{\mathfrak{D}}_{2\,1} \otimes_k \bar{\mathfrak{D}}_{2\,1}$ (où $\bar{\mathfrak{D}}_{2\,1} = \mathfrak{D}_{2\,1} \otimes_R k$).

- Vue comme sous-algèbre de $\bar{\mathfrak{D}}_{2\,1}$, $\mathfrak{D}_{2\,1}$ se décompose en somme directe orthogonale : $\mathfrak{D}_{2\,1} = L_1 \oplus L_2 \oplus L_3 \oplus X$ où L_i est une sous algèbre isomorphe à $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{Q}) \otimes R$, X est la partie impaire de $\mathfrak{D}_{2\,1}$ et l'action de $L_1 \oplus L_2 \oplus L_3$ sur X induite par le crochet est donnée par le produit tensoriel des représentations standards de L_1, L_2 et L_3.
  La décomposition étant orthogonale, on a : $\Omega = -a\omega_1 - b\omega_2 - c\omega_3 + \pi$ avec $\omega_i \in L_i \otimes L_i$ et $\pi \in X \otimes X$.

- Le groupe symétrique $\mathfrak{S}_3$ agit sur R (par permutation de $\{a, b, c\}$) et sur $\mathfrak{D}_{2\,1}$ (par permutation des trois copies de $\mathfrak{sl}_2$) de manière compatible avec la structure de R-module. Cette action laisse le Casimir invariant et commute au crochet de Lie.

- Le foncteur $\Phi_{\mathfrak{D}_{2\,1}} : \mathcal{D}_b \longrightarrow \mathcal{L}_{\mathfrak{D}_{2\,1}}$ induit un caractère gradué $\chi_{\mathfrak{D}_{2\,1}} : \Lambda \longrightarrow \mathbb{Q}[\sigma_2, \sigma_3]$ (où $\mathbb{Q}[\sigma_2, \sigma_3]$ est le sous anneau de R engendré par $\sigma_2 = ab + bc + ca$ de degré 2 et $\sigma_3 = abc$ de degré 3).

- Soit α un nombre complexe et $\phi : R \longrightarrow \mathbb{C}$ est le morphisme d'anneau définit par :
  $\phi(a) = \alpha$, $\phi(b) = 1$ et $\phi(c) = -1 - \alpha$. Alors $\mathfrak{D}_{2\,1} \otimes_\phi \mathbb{C} \simeq \mathfrak{D}_{2\,1,\alpha}$ (noté parfois $\mathfrak{osp}_\alpha(4,2)$) et $\chi_{\mathfrak{D}_{2\,1,\alpha}} = \phi \circ \chi_{\mathfrak{D}_{2\,1}}$.

Tous ces résultats sont immédiatement conséquences de ceux établis dans [Vo2] (où l'anneau de coefficients considéré est $\mathbb{Z}[a, b, c]_{/(a+b+c)}$ au lieu de R). De plus il y est démontré que l'opérateur Ψ a pour valeurs propres $\{2a, 2b, 2c\}$. Ainsi le changement de variables $\sigma_2 \mapsto -\frac{u}{2}$ et $\sigma_3 \mapsto \frac{v}{4}$ permet de considérer $\chi_{\mathfrak{D}_{2\,1}}$ comme un caractère à valeurs dans $S_{/(t)}$.

Proposition 3.5 *Il existe un caractère gradué $\chi_2 : \Lambda \longrightarrow S_{/(tP_{\mathfrak{sl}}P_{\mathfrak{osp}})}$ factorisant les caractères χ_1 et $\chi_{\mathfrak{D}_{2\,1}}$*
(c'est à dire : χ_2 mod $(P_{\mathfrak{sl}}P_{\mathfrak{osp}}) = \chi_1$ et χ_2 mod $(t) = \chi_{\mathfrak{D}_{2\,1}}$).

Démonstration. L'annneau S étant factoriel, l'intersection des idéaux (t) et $(P_{\mathfrak{sl}}P_{\mathfrak{osp}})$ est l'idéal $(tP_{\mathfrak{sl}}P_{\mathfrak{osp}})$. Donc le diagramme commutatif suivant est un carré cartésien :

$$\begin{array}{ccc} S_{/(tP_{\mathfrak{sl}}P_{\mathfrak{osp}})} & \longrightarrow & S_{/(P_{\mathfrak{sl}}P_{\mathfrak{osp}})} \\ \downarrow & & \downarrow \\ S_{/(t)} & \longrightarrow & S_{/(t)+(P_{\mathfrak{sl}}P_{\mathfrak{osp}})} \end{array}$$

Donc il suffit de montrer que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{rcl} \Lambda & \xrightarrow{\chi_1} & S_{/(P_{\mathfrak{sl}}P_{\mathfrak{osp}})} \\ \chi_{\mathfrak{D}_{2\,1}} \downarrow & & \downarrow \\ S_{/(t)} & \longrightarrow & S_{/(t)+(P_{\mathfrak{sl}}P_{\mathfrak{osp}})} \hookrightarrow S_{/(t)+(v)} \times S_{/(t)+(27v^2-8u^3)} \end{array}$$

(On a rajouté la dernière injection pour aboutir dans un produit d'anneaux intègres).

- La coïncidence des deux caractères $\Lambda \longrightarrow S_{/(t)+(27v^2-8u^3)}$ est une conséquence directe de l'isomorphisme entre les superalgèbres de Lie $L = \mathfrak{D}_{2\,1,\alpha} \simeq \mathfrak{osp}(4,2)$ pour $\alpha \in \{1, -2, -\frac{1}{2}\}$ (on a alors par exemple $(a,b,c) = (1,-2,1)$ donc $t(L) = 0$, $u(L) = 6$ et $v(L) = -8$). La première factorisation du caractère correspond à factoriser χ_L par $\chi_{\mathfrak{D}_{2\,1}}$, l'autre revient à factoriser χ_L par χ_1 ou $\chi_{\mathcal{M}}$.

- Le quotient de $\chi_{\mathfrak{D}_{2\,1}}$ par l'idéal (v) correspond au caractère induit par l'algèbre de Lie $L = \mathfrak{D}_{2\,1,\alpha}$ dans le cas dégénéré où α vaut 0 ou -1. Dans ce cas, L contient un idéal $\mathfrak{h} \simeq \mathfrak{psl}(2,2)$ et le Casimir Ω appartient à $\mathfrak{h} \otimes \mathfrak{h}$. Ainsi une application directe du lemme 2.1 pour $(\phi, \mathfrak{h} \hookrightarrow L)$, montre que χ_L coïncide avec $\chi_{\mathfrak{psl}(2,2)}$ qui se factorise par χ_1. Ce caractère est en fait le caractère augmentation (nul sauf en degré 0) de Λ.

□

3.4 Le caractère χ_3 pour les familles $\mathfrak{sl}$, $\mathfrak{osp}$, $\mathfrak{D}_{2\,1}$ et $\mathfrak{sl}_2$

3.4.1 Théorème d'existence

Le cas de l'algèbre $\mathfrak{sl}_2$ est un cas particulier : On peut choisir pour (t,u,v) n'importe quelles valeurs pourvu que le polynôme $P_{\mathfrak{sl}_2} = v - ut + t^3$ soit nul ; de plus ce choix n'affecte bien sûr pas la valeur de $\chi_{\mathfrak{sl}_2} \in \mathbb{Q}[x]$. On peut donc considérer χ_2 comme un caractère non surjectif à valeurs dans $S_{/P_{\mathfrak{sl}_2}}$ en le composant avec l'inclusion de $\mathbb{Q}[x]$ dans $S_{/P_{\mathfrak{sl}_2}}$ qui envoie $\chi_{\mathfrak{sl}_2}(t)$ sur t.

Proposition 3.6 *Il existe un caractère gradué $\chi_3 : \Lambda \longrightarrow S_{/(tP_{\mathfrak{sl}}P_{\mathfrak{osp}}P_{\mathfrak{sl}_2})}$ factorisant les caractères χ_2 et $\chi_{\mathfrak{sl}_2}$*
(c'est à dire : χ_3 mod $(P_{\mathfrak{sl}}P_{\mathfrak{osp}}t) = \chi_2$ et χ_3 mod $(P_{\mathfrak{sl}_2}) = \chi_{\mathfrak{sl}_2}$).

Bien que le cas $\chi_{\mathfrak{sl}_2}$ est été déjà traité précédemment (par exemple comme sous-cas de $\mathfrak{sl}_n$), son étude dans ce cadre permet d'affiner le caractère χ_2.

Démonstration. De même que précédemment, S étant factoriel, l'intersection des idéaux $(P_{\mathfrak{sl}_2})$ et $(P_{\mathfrak{sl}}P_{\mathfrak{osp}}t)$ est l'idéal $(tP_{\mathfrak{sl}}P_{\mathfrak{osp}}P_{\mathfrak{sl}_2})$. Donc le diagramme commutatif suivant est un carré cartésien :

$$\begin{array}{rcl} S_{/(tP_{\mathfrak{sl}}P_{\mathfrak{osp}}P_{\mathfrak{sl}_2})} & \longrightarrow & S_{/(tP_{\mathfrak{sl}}P_{\mathfrak{osp}})} \\ \downarrow & & \downarrow \\ S_{/(P_{\mathfrak{sl}_2})} & \longrightarrow & S_{/(P_{\mathfrak{sl}_2})+(tP_{\mathfrak{sl}}P_{\mathfrak{osp}})} \end{array}$$

Donc il suffit de montrer que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{rcl} \Lambda & \xrightarrow{\chi_2} & S_{/(tP_{\mathfrak{sl}}P_{\mathfrak{osp}})} \\ \chi_{\mathfrak{sl}_2}\downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{Q}[t]\subset S_{/(P_{\mathfrak{sl}_2})} & \longrightarrow & S_{((P_{\mathfrak{sl}_2})+(tP_{\mathfrak{sl}}P_{\mathfrak{osp}})} \hookrightarrow S_{/I_1}\times S_{/I_2}\times S_{/I_3}\times S_{/I_4}\times S_{/I_5} \end{array}$$

avec
$$\begin{aligned} I_1 &= (P_{\mathfrak{sl}_2}) + (2u-t^2) = (2v+t^3)+(2u-t^2) \\ I_2 &= (P_{\mathfrak{sl}_2}) + (u-5t^2) = (v-4t^3)+(u-5t^2) \\ I_3 &= (P_{\mathfrak{sl}_2}) + (8u-5t^2) = (8v+3t^3)+(8u-5t^2) \\ I_4 &= (P_{\mathfrak{sl}_2}) + (u-t^2) = (v)+(u-t^2) \\ I_5 &= (P_{\mathfrak{sl}_2}) + (t^2) = (v-ut)+(t^2) \end{aligned}$$

L'anneau $S_{((P_{\mathfrak{sl}_2})+(tP_{\mathfrak{sl}}P_{\mathfrak{osp}})}$ s'injecte dans le produit d'anneaux ci-dessus dont tous les facteurs, sauf le dernier, sont intègres et en fait isomorphes à $\mathbb{Q}[t]$ ce qui permet de considérer la flèche horizontale du bas sur chacun de ces facteurs :
$\mathbb{Q}[t]\subset S_{/(P_{\mathfrak{sl}_2})}\longrightarrow S_{((P_{\mathfrak{sl}_2})+(tP_{\mathfrak{sl}}P_{\mathfrak{osp}})}\longrightarrow S_{/I_k}\simeq\mathbb{Q}[t])$
comme étant l'identité sur $\mathbb{Q}[t]$.

- On a $I_1 = I_{\mathfrak{sl}_n}$ pour $n=2$ et la commutativité du diagramme correspond sur ce facteur au fait que $\chi_{\mathfrak{sl}}$ factorise $\chi_{\mathfrak{sl}_2}$.
- De même $I_2 = I_{\mathfrak{so}_3}$, $I_3 = I_{\mathfrak{sp}_2}$ et $I_4 = I_{\mathfrak{so}_4}$; Les isomorphismes bien connus entre les algèbres de Lie $\mathfrak{so}_3(\mathbb{C})\simeq\mathfrak{sp}_2(\mathbb{C})\simeq\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ et $\mathfrak{so}_4(\mathbb{C})\simeq\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})\oplus\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ permettent facilement de voir que le diagramme commute sur chacun des facteurs correspondant.

Le seul problème vient pour montrer la commutativité du diagramme sur le dernier facteur : l'image du caractère $\chi_{\mathfrak{sl}_2}$ est en fait contenue dans $\mathbb{Q}[t]$ et sa composée avec $S_{/(P_{\mathfrak{sl}_2})}\longrightarrow S_{/I_5}$ est donc nulle en degré supérieur où égal à deux (car I_5 contient l'idéal (t^2)). Il s'agit donc de montrer que χ_2 mod I_5

est aussi nul en degré supérieur où égal à deux.
On a déjà vu que $\chi_2 \bmod I_{\mathfrak{psl}(2,2)}(=(v)+(t))$ était nul en degré strictement positif. Mais $I_5 \subset ((v)+(t))$ et l'application quotient $S_{/I_5} \longrightarrow S_{/(v)+(t)}$ est un isomorphisme en degré pair donc $\chi_2 \bmod I_5$ est nul en degré pair.
Si $x \in \Lambda$ est de degré $n = 2p+1$, on écrit $\chi_2(x) = \lambda(x)u^p t + \lambda'(x)u^{p-1}v + r(x)$ avec $\lambda(x), \lambda'(x) \in \mathbb{Q}$ et $r(x) \in ((v-tu)+(t^2))$.
On a alors : $\chi_2(x) \equiv (\lambda(x)+\lambda'(x))u^p t \bmod ((v-tu)+(t^2))$. Il s'agit de montrer que $\lambda + \lambda' = 0$. Revenant aux caractères fondamentaux $\chi_{\mathfrak{D}_{2\,1}}$ à valeurs dans $\mathbb{Q}[\sigma_2, \sigma_3]$ et $\chi_{\mathfrak{sl}}$ à valeurs dans $\mathbb{Q}[\delta, \beta]$ cela revient à montrer que :
si $\chi_{\mathfrak{D}_{2\,1}}(x) \equiv \mu\sigma_3\sigma_2^{p-1} \bmod (\sigma_3^2)$
alors $\chi_{\mathfrak{sl}}(x) \equiv -\mu\delta\beta^p \bmod (\delta^2)$.
Ce point est plus délicat et sa démonstration fait l'objet des sections suivantes.

3.4.2 Propriétés du caractère $\chi_{\mathfrak{D}_{2\,1}}$

Le but de cette section est de démontrer que la réduction modulo a^2 de $\chi_{\mathfrak{D}_{2\,1}}$ peut être calculée par l'intermédiaire du foncteur $\Phi_{\mathfrak{gl}_{2,2}}$. On reprend ici les notations introduites dans la partie 3.3. De plus on note F_n^+ le sous-module de F_n engendré par les diagrammes ayant au moins une boucle. Afin d'harmoniser les notations on utilisera souvent a_1 pour a, a_2 pour b et a_3 pour c. On a alors

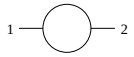
Lemme 3.2 *Le foncteur $\Phi_{\mathfrak{D}_{2\,1}}$ a les propriétés suivantes :*

- $\Phi_{\mathfrak{D}_{2\,1}} : F_2 \longrightarrow {\mathfrak{D}_{2\,1}}^{\otimes 2}$ *est nulle*
- $\forall n \geq 3$, $\Phi_{\mathfrak{D}_{2\,1}} : F_n^+ \longrightarrow {\mathfrak{D}_{2\,1}}^{\otimes n}$ *est en fait à valeurs dans* $\bigoplus E_1 \otimes E_2 \otimes \ldots \otimes E_n$ *où E_i parcourt $\{a_1L_1, a_2L_2, a_3L_3, X\}$. En particulier, par restriction, la dualisation dans $\mathfrak{D}_{2\,1}$ induit :*

  $$F_n^+ \longrightarrow \mathcal{L}_{\mathfrak{D}_{2\,1}}({\mathfrak{D}_{2\,1}}^{\otimes n}, R)$$

  (morphismes de $\mathfrak{D}_{2\,1}$-modules).

Démonstration. Pour la première affirmation, il suffit de considérer que F_2 est un Λ-module libre de rang 1 engendré par le diagramme

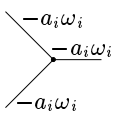


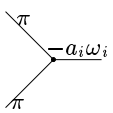
Dont l'image par $\Phi_{\mathfrak{D}_{2\,1}}$ est nul.

Pour démontrer la seconde affirmation, on choisit un diagramme K connexe de F_n^+ et on décompose le calcul de $\Phi_{\mathfrak{D}_{2\,1}}(K)$ de la manière suivante : on colorie chaque arête de K par Ω puis on utilise l'application de réduction $\varphi = \bigotimes_x \varphi_x$ où φ_x est "la réduction autour du sommet trivalent x" par l'application trilinéaire antisymétrique invariante $< [\cdot,\cdot],\cdot >$ (ceci revient à décomposer K comme composé du produit tensoriel d'autant d'élément de Casimir que K comporte d'arêtes avec un diagramme induit par une permutation puis avec un diagramme produit tensoriel de n fois l'identité et d'autant de fois le diagramme $< [.,.],. >$ que K comporte de sommets). On peut remarquer que l'application φ est bien définie dès que les arêtes de K sont coloriées par une application de l'ensemble de ses arêtes vers S^2L et on a aussitôt la formule consistant à "développer" le diagramme K colorié par Ω :

$$\Phi_L(K) = \sum_{c\in\mathcal{C}} \varphi(c(K))$$

où $\mathcal{C} = \{c : \{\text{arêtes de } K\} \longrightarrow \{-a_1\omega_1; -a_2\omega_2; -a_3\omega_3; \pi\}\}$ et $c(K)$ désigne K colorié par c.
Or pour l'algèbre $\mathfrak{D}_{2\,1}$, l'application $< [\cdot,\cdot],\cdot >$ est nulle sur $L_i \otimes L_j \otimes X$ si $i \neq j$ et sur $X \otimes X \otimes X$. Donc $\varphi(c(K))$ est nul dès que l'un des sommets de $c(K)$ n'est pas d'une des deux formes suivantes :

type (1) 

type (2) 

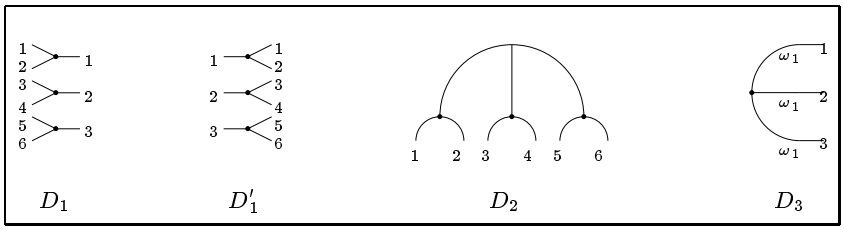
Un diagramme colorié dont tous les sommets sont de type (1) ou (2) sera dit admissible.
De plus, $< [\cdot,\cdot],\cdot >$ envoie $L_i \otimes L_i \otimes L_i$ sur $a_i^{-1}R$ et $L_i \otimes X \otimes X$ sur R ; il suffit donc de voir (par exemple pour $i = 1$) que si $c(K)$ est admissible, si m désigne le nombre d'arêtes intérieures de $c(K)$ de couleur $-a_1\omega_1$, s_3 le nombre de sommet de $c(K)$ de type (1) pour $i = 1$ et s_1 le nombre de sommets univalents de K dont l'arête issue (arête dite extérieure) est de couleur $-a_1\omega_1$, alors $m \geq s_3 + s_1$.

- Si $c(K)$ est un diagramme K à d boucles pour lequel toutes les arêtes sont de couleur $-a_1\omega_1$, les formules reliant le nombre d'arêtes et le nombre de sommets d'un diagramme à son degré donnent : $m = 2s_1 + 3d - 3$ et $s_3 = s_1 + 2d - 2$ donc $m - s_3 - s_1 = d - 1 \geq 0$ car $d > 0$.

- Sinon, le sous-graphe de $c(K)$ formé des arêtes coloriées par $-a_1\omega_1$ est formé de plusieurs graphes connexes dont les sommets univalents

proviennent soit des sommets univalents de K, soit de sommets de type (2) de $c(K)$. De plus K étant connexe, chaque composante connexe K_j de ce sous-graphe possède un nombre $s_{2,j} > 0$ de sommets univalents provenant de sommets de type (2) de $c(K)$. On note de même d_j le nombre de boucles de K_j, n_j son nombre de sommets univalents, m_j son nombre d'arêtes et $s_{3,j}$ son nombre de sommets trivalents. On a $s_1 = \sum_j (n_j - s_{2,j})$, $s_3 = \sum_j s_{3,j}$ et $m = \sum_j m_j$. Ceci donne l'inégalité cherchée en sommant sur j les formules $m_j = 2n_j + 3d_j - 3$ et $s_{3,j} = n_j + 2d_j - 2$. On obtient : $m - s_3 - s_1 = \sum_j (d_j + s_{2,j} - 1) \geq 0$ car $s_{2,j} > 0$.

Ceci conclut la démonstration du lemme. □



Considérons maintenant K un diagramme représentant un élément de F_6^+ de degré impair. Soit G le sous-groupe de $\mathfrak{S}_6$ laissant fixe $\{\{1;2\};\{3;4\};\{5;6\}\}$. On définit le morphisme de groupe ϵ sur G en remarquant que tout élément $\sigma \in G$ agit par $\epsilon(\sigma) \in \{-1;+1\}$ sur le diagramme D_2 ci-dessus de F_6.
On notera les éléments de G comme produits de cycles disjoints ; par exemple on a $\epsilon((1,4,2,3)) = 1$. Soit

$$\tilde{K} = \frac{1}{48} \sum_{\sigma \in G} \epsilon(\sigma) \sigma(K)$$

Le morphisme $D_1 \in \mathcal{D}([6],[3])$ envoie $\tilde{K}$ sur $\tilde{K}_3 \in F_3 \otimes_{\mathfrak{S}_3} \mathbb{Q}^- \simeq \Lambda$. De plus le degré de $\tilde{K}_3$ dans Λ est égal à celui de K moins deux.
Soit $\alpha \in \mathbb{Q}$ tel que $\chi_{\mathfrak{D}_{2\,1}}(\tilde{K}_3) \equiv \alpha \sigma_3 \sigma_2^p \bmod (\sigma_3^2) \equiv \alpha a_1 (a_2 a_3)^{p+1} \bmod a_1^2$.

On construit un tenseur dont l'image par $\Phi_{\mathfrak{D}_{2\,1}}(K)$ (vu comme élément de $\mathcal{L}(L^{\otimes 6}, \mathbb{Q})$) est congru à $\chi_{\mathfrak{D}_{2\,1}}(\tilde{K}_3)$ modulo (a_1^2) :

Soit $x_0 = -a_1 \varphi(D_3) \in L_1^{\otimes 3}$ de sorte que considérant $\Phi_{\mathfrak{D}_{2\,1}}(\tilde{K}_3)$ comme un élément de $\mathcal{L}(L^{\otimes 3}, \mathbb{Q})$, on ait :
$\Phi_{\mathfrak{D}_{2\,1}}(\tilde{K}_3)(x_0) = \chi_{\mathfrak{D}_{2\,1}}(\tilde{K}_3) \Phi_{\mathfrak{D}_{2\,1}^-}(\bigcirc\!\!\!\!-)(x_0) = \frac{12}{a_1} \chi_{\mathfrak{D}_{2\,1}}(\tilde{K}_3) \equiv 12\alpha (a_2 a_3)^{p+1} + a_1 r$

avec $r \in R$.
D'autre part, le calcul montre que $\Phi_{\mathfrak{D}_{2\,1}}(D_1')(x_0)$ s'écrit $x_1 + a_1 x_2$ avec $x_1 \in X^{\otimes 6}$ et $x_2 \in {\mathfrak{D}_{2\,1}}^{\otimes 6}$, le tenseur x_1 ayant de plus la propriété d'être (G,ϵ)-invariant (i.e. $\forall \sigma \in G$, $\sigma(x_1) = \epsilon(\sigma) x_1$). Ainsi

$$\Phi_{\mathfrak{D}_{2\,1}}(\tilde{K_3})(x_0) = \Phi_{\mathfrak{D}_{2\,1}}(\tilde{K}) \circ \Phi_{\mathfrak{D}_{2\,1}}(D_1')(x_0) = \Phi_{\mathfrak{D}_{2\,1}}(\tilde{K})(x_1) + a_1 \Phi_{\mathfrak{D}_{2\,1}}(\tilde{K})(x_2)$$

mais $\Phi_{\mathfrak{D}_{2\,1}}(\tilde{K})(x_2)$ est un élément de R d'après le lemme précédent et puisque x_1 est (G,ϵ)-invariant, on a l'égalité $\Phi_{\mathfrak{D}_{2\,1}}(\tilde{K})(x_1) = \Phi_{\mathfrak{D}_{2\,1}}(K)(x_1)$; donc

$$\Phi_{\mathfrak{D}_{2\,1}}(K)(x_1) \equiv 12\alpha(a_2 a_3)^{p+1} \bmod (a_1)$$

On construit maintenant une forme linéaire η'' sur $\mathfrak{gl}_{2,2}^{\otimes 6}$ telle que l'application $K \mapsto \alpha$ se factorise en $\eta'' \circ \Phi_{\mathfrak{gl}_{2,2}}$.
Soit I le noyau du morphisme d'anneau $f : R \longrightarrow \mathbb{Q}$ défini par $f(a_1) = 0$ et $f(a_2) = 1$. La réduction des coefficients grâce à f induit $p : \mathfrak{D}_{2\,1} \longrightarrow {\mathfrak{D}_{2\,1}}' = \mathfrak{D}_{2\,1} \otimes_f \mathbb{Q}$. Le morphisme d'algèbre p est surjectif et possède une section d'espace vectoriel $\mathbb{Z}_2$-gradué : $s : {\mathfrak{D}_{2\,1}}' \hookrightarrow \mathfrak{D}_{2\,1}$ induite par le monomorphisme $\mathbb{Q} \hookrightarrow R$ (on a $p \circ s = Id_{\mathfrak{D}_{2\,1'}}$). On notera X' l'image par s de la partie impaire de ${\mathfrak{D}_{2\,1}}'$ de sorte que X se décompose en $X' \oplus (IX')$. Il se trouve que $< X', X' >$ est inclus dans $\mathbb{Q}$ et x_1 appartient à ${X'}^{\otimes 6}$. Par conséquent, les formes $\mathbb{Q}$-linéaires $y \mapsto f(< x_1, y >_{\mathfrak{D}_{2\,1}^{-\otimes 6}})$ et $y \mapsto < x_1, s \circ p(y) >_{\mathfrak{D}_{2\,1}^{-\otimes 6}}$ sont égales. Mais considérant $\Phi_{\mathfrak{D}_{2\,1}}(K)$ comme un élément de ${\mathfrak{D}_{2\,1}}^{\otimes 6}$, on a :

$$< x_1, \Phi_{\mathfrak{D}_{2\,1}}(K) >_{\mathfrak{D}_{2\,1}^-} \equiv 12\alpha(a_2 a_3)^{p+1} \bmod (a_1)$$

donc $$f(< x_1, \Phi_{\mathfrak{D}_{2\,1}}(K) >_{\mathfrak{D}_{2\,1}^{-\otimes 6}}) = (-1)^{p+1} 12\alpha$$

et donc $$< x_1, (s \circ p)_*(\Phi_{\mathfrak{D}_{2\,1}}(K)) >_{\mathfrak{D}_{2\,1}^{-\otimes 6}} = (-1)^{p+1} 12\alpha.$$

Ainsi l'application $\eta : F_6 \longrightarrow \mathbb{Q}$, qui associe au diagramme K' l'élément $\frac{(-1)^{p+1}}{12} f(< x_1, \Phi_{\mathfrak{D}_{2\,1}}(K') >_{\mathfrak{D}_{2\,1}^{-\otimes 6}})$, se factorise en $\eta = \eta' \circ \Phi_{\mathfrak{D}_{2\,1'}, p_*\Omega}$ où η' est une forme linéaire sur ${\mathfrak{D}_{2\,1}}'^{\otimes 6}$ nulle sur l'orthogonal de $(({\mathfrak{D}_{2\,1}}')_{\bar{1}})^{\otimes 6}$.
Considérons alors les morphismes de superalgèbres de Lie suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{psl}_{2,2} & \simeq \mathfrak{h} \overset{i}{\hookrightarrow} & {\mathfrak{D}_{2\,1}}' \\ \downarrow j & & \\ \mathfrak{gl}_{2,2} \overset{q}{\twoheadrightarrow} & \mathfrak{pgl}_{2,2} & \end{array}$$

$\mathfrak{h}$ est l'idéal de ${\mathfrak{D}_{2\,1}}'$ déjà rencontré à la section 3.3. Il est facile de constater que si l'on muni $\mathfrak{gl}_{2,2}$ du Casimir induit par la représentation standard, alors son image par q_* dans $\mathfrak{pgl}_{2,2}^{\otimes 2}$ appartient en fait à $j_*(\mathfrak{psl}_{2,2}^{\otimes 2})$.
On peut maintenant appliquer le lemme 3.2 à chacun de ces morphismes en prenant pour ϕ l'identité de $\mathbb{Q}$:

$$\Phi_{\mathfrak{D}_{2\,1'}, p_*\Omega}(K) = i_* \circ \Phi_{\mathfrak{psl}_{2,2}}(K)$$

$$q_*(\Phi_{\mathfrak{gl}_{2,2}}(K)) = \Phi_{\mathfrak{pgl}_{2,2}}(K) = j_*(\Phi_{\mathfrak{psl}_{2,2}}(K))$$

Or les morphismes i, j et q sont bijectifs en degré impair. Comme η' ne dépend que de la composante sur $((\mathfrak{psl}_{2,2})_{\bar{1}})^{\otimes 6}$ de $\Phi_{\mathfrak{psl}_{2,2}}(K)$, il existe une forme linéaire $\eta'' : \mathfrak{gl}_{2,2}^{\otimes 6} \longrightarrow \mathbb{Q}$ nulle sur l'orthogonal de $((\mathfrak{gl}_{2,2})_{\bar{1}})^{\otimes 6}$ vérifiant $\eta = \eta'' \circ \Phi_{\mathfrak{gl}_{2,2}}$.

3.4.3 Propriétés du foncteur $\Phi_{\mathfrak{gl}}$

Dans toute cette section, E désigne un supermodule (c'est à dire un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel muni d'une $\mathbb{Z}_2$-graduation) et on continue d'identifier $\mathcal{D}_{\mathfrak{gl}}([p],[q])$ avec Σ_{p+q}.
On notera $\mathcal{D}_{\mathfrak{gl}_0}$ la catégorie quotientée de $\mathcal{D}_{\mathfrak{gl}}$ par $\Delta \equiv 0$ et $\Phi_{\mathfrak{gl}_0} : \mathcal{D}_\Gamma \longrightarrow \mathcal{D}_{\mathfrak{gl}_0}$.
On peut maintenant faire quelques remarques sur l'image de $\Phi_{\mathfrak{gl}}$:

- $\partial_{\mathfrak{gl}}$ est déterminé sur $M[n]$ par la formule

  $$\forall \sigma \in \mathfrak{S}_n,\ \partial_{\mathfrak{gl}}([\sigma]) =< \sigma > +(-1)^n < \sigma^{-1} >$$

  En conséquence, $\Phi_{\mathfrak{gl}}(F_n) = \Phi_{\mathfrak{gl}} \circ \partial_{\mathfrak{gl}} \circ \Phi_{\mathcal{M}}(F_n)$ est invariant par l'endomorphisme de Σ_n défini sur sa base par $< \sigma > \mapsto \frac{1}{2}(< \sigma > +(-1)^n < \sigma^{-1} >)$.

- Ensuite $\Phi_{\mathcal{M}}$ respecte le degré et β est de degré pair donc l'image par $\Phi_{\mathcal{M}}$ d'un élément de degré impair de F_n est une combinaison linéaire à coefficients dans $\mathbb{Q}[\beta]$ d'éléments $[\sigma] \in \bigcup_p \mathcal{E}_n^{2p+1}$ (pour des permutations partitionnant $[n]$ en un nombre impair d'orbites) plus un élément de $\alpha M_c[n] + \delta M_c[n]$. Ainsi, $\Phi_{\mathfrak{gl}_0}(F_n)$ est inclus dans le sous-$\mathbb{Q}$-espace vectoriel de Σ_n engendré par les diagrammes ayant un nombre impair de composante connexes.

- Enfin, on peut préciser l'image de $\Phi_{\mathfrak{gl}_0}(F_n)$ en utilisant le fait que, si $\mathrm{sdim}(E) = 0$, pour les morphismes canoniques $q : \mathfrak{gl}(E) \twoheadrightarrow \mathfrak{pgl}(E)$ et $j : \mathfrak{psl}(E) \hookrightarrow \mathfrak{pgl}(E)$, on a : $q_*\Phi_{\mathfrak{gl}(E)}(F_n) = j_*\Phi_{\mathfrak{psl}(E)}(F_n) \subset q_*(\mathfrak{sl}(E)^{\otimes n})$. Soit I l'élément identité de $\mathfrak{gl}(E)$. Notons que $\mathrm{Ker}\,(q_*)$ est l'idéal engendré par I dans l'algèbre tensorielle de $\mathfrak{gl}(E)$. De plus $\mathfrak{sl}(E)$ est l'orthogonal de I dans $\mathfrak{gl}(E)$ et ainsi l'orthogonal du noyau de q_* est l'algèbre tensorielle de $\mathfrak{sl}(E)$. L'image de $\Phi_{\mathfrak{gl}(E)}(F_n)$ est dans la somme de $\mathrm{Ker}\,(q_*)$ et de $\mathfrak{sl}(E)^{\otimes n}$; l'orthogonal de cette somme est l'intersection de $\mathfrak{sl}(E)^{\otimes n}$ et de $\mathrm{Ker}\,(q_*)$, c'est l'espace engendré par $\{x \otimes I \otimes y \in \mathfrak{sl}(E)^{\otimes n}\}$. Considérant $F_n \subset \mathcal{D}([n],[0])$ et en utilisant la dualité dans $\mathfrak{gl}(E)$, on a ainsi,

  $$\forall K \in F_n,\ \forall x \otimes I \otimes y \in \mathfrak{sl}(E)^{\otimes n},\ \Phi_{\mathfrak{gl}(E)}(K)(x \otimes I \otimes y) = 0$$

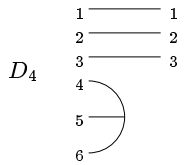
Si $i \leq n$, on note $< \sigma \setminus i >$ l'élément $\Delta < \mu >$ si $\sigma(i) = i$ sinon l'élément $< \mu >$ de Σ_{n-1} où μ est l'élément de $\mathfrak{S}_{n-1}$ qui conjugué avec la bijection croissante de $[n-1]$ vers $[n] \setminus \{i\}$ vaut μ' définit par $\mu'(j) = \sigma(j)$ si $\sigma(j) \neq i$, $\mu'(j) = \sigma(i)$ sinon. Revenant à la définition de $\Phi_{gl(E),E}$ il est clair que si $x \in \mathfrak{gl}(E)^{\otimes i-1}$ et $y \in \mathfrak{gl}(E)^{\otimes n-i}$ alors

$$\Phi_{gl(E),E}(< \sigma >)(x \otimes I \otimes y) = \Phi_{gl(E),E}(< \sigma \setminus i >)(x \otimes y)$$

Enfin $\Phi_{gl(E),E}$ induit un morphisme de Σ_n dans $(\mathfrak{gl}(E)^{\otimes n})^*$ donc par restriction un morphisme de Σ_n dans $(\mathfrak{sl}(E)^{\otimes n})^*$. L'intersection des noyaux de ces morphismes (lorsque E varie) est Σ'_n. En effet, si $\dim(E) \geq n$, l'unique permutation de Σ_1 est envoyé sur $(x \mapsto \mathrm{str}_E(x))$ qui est nul sur $\mathfrak{sl}(E)$ et donc toute permutation ayant un point fixe est envoyée sur zéro.
Réciproquement on peut associer à la permutation σ de $\mathfrak{S}_n$ un tenseur $x_\sigma \in \mathfrak{gl}(E)^{\otimes n}$ tel que $\Phi_{gl(E),E}(< \sigma >)(x_\mu) = 1$ si $\mu = \sigma$, 0 sinon. Pour construire de tels tenseurs on identifie $\mathfrak{gl}(E)$ à $\mathfrak{gl}(\dim(E_{\bar{0}}), \dim(E_{\bar{1}}))(\mathbb{Q})$ et notant $e_{i,j}$ les matrices élémentaires, on défini d'abord
$x_{(1,2,\ldots k_1)(k_1+1,k_1+2,\ldots k_2)\ldots(k_p+1,\ldots n)} = (e_{1,2} \otimes e_{2,3} \otimes \ldots \otimes e_{k_1,1}) \otimes (e_{k_1+1,k_1+2} \otimes \ldots \otimes e_{k_2,k_1+1}) \otimes \ldots \otimes (e_{k_p+1,k_p+2} \otimes \ldots \otimes e_{n,k_p+1})$
puis $x_{\mu\sigma\mu^{-1}} = \mu(x_\sigma)$; si σ n'a pas de point fixe, x_σ appartient à $\mathfrak{sl}(E)^{\otimes n}$.
Ainsi notant Σ'_n le sous-module de Σ_n engendré par les permutations ayant un point fixe, le morphisme suivant est nul :

$$f_i : F_n \xrightarrow{\Phi_{\mathfrak{gl}_0}} \Sigma_{n/(\Delta\Sigma_n)} \xrightarrow{<\sigma> \mapsto <\sigma \setminus i>} \Sigma_{n-1/(\Delta\Sigma_{n-1})} \longrightarrow \Sigma_{n-1/\Sigma'_{n-1}+(\Delta\Sigma_{n-1})}$$

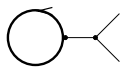
- On peut faire une dernière remarque sur $\Phi_{\mathfrak{gl}_0}(F_6)$: elle provient du fait que $\Phi_{\mathfrak{gl}_0}$ est nul sur F_3 en degré supérieur ou égal à 3. $\Phi_{\mathfrak{gl}_0}(F_6)$ est donc inclus dans le noyau de l'application composition avec le diagramme suivant :



3.4.4 Démonstration de l'existence du caractère χ_3

Notons μ la forme linéaire définie sur F_6 en degré impair par $\chi_{\mathfrak{sl}}(D_1 \circ \tilde{K}) = -\mu\delta\beta^p \mod (\delta^2)$ (avec les notations déjà utilisé dans (3.4.2)). Nous allons montrer que $\mu = \eta$.
D'abord on a : $\Phi_{\mathfrak{gl}}(D_1 \circ \tilde{K}) \equiv \mu(K)\Delta\,(< (1,2,3) > - < (1,3,2) >) \mod$

$\Delta^2\Sigma_3$. On définit une forme linéaire g sur Σ_3 par $g(\Sigma'_3 + \Delta^2\Sigma_3) = 0$, $g(< \sigma >) = 0$ si σ n'est pas un 3-cycle, $g(< (1,2,3) >) = -g(< (1,3,2) >) = \frac{1}{2}$. Soit $\mu_0 : \Sigma_6 \longrightarrow \mathbb{Q}$ l'application qui associe à chaque élément de Σ_6 l'image par g de sa composée avec D_1. Alors $\mu(K) = \mu_0(\Phi_{\mathfrak{gl}}(K))$ mais un calcul explicite de l'application composition avec D_1 montre que l'image de cette application est en fait dans $\Sigma'_3 + \Delta\Sigma_3$ ainsi μ_0 est nul sur $\Delta\Sigma_6$. De plus, dans $\mathcal{D}_{\mathfrak{gl}}$, l'élément suivant est nul :



Donc $\mu_0(\Sigma'_6) = 0$.
De même η'' induit une forme linéaire η_0 sur Σ_6 telle que $\eta_0(< \sigma >) = \eta''(\Phi\mathfrak{gl}_{2,2}(< \sigma >))$ pour $\sigma \in \Sigma_6$. En particulier η'' est nulle sur l'orthogonal de $((\mathfrak{gl}_{2,2})_{\bar{1}})^{\otimes 6}$ et cet orthogonal contient l'idéal $\mathrm{Ker}(q)$ évoqué dans la question précédente. il en résulte que η_0 est nulle sur Σ'_6.

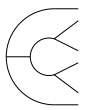
Des calculs effectués avec Maple donnent les résultats suivants :

- le sous-espace de Σ_{6/Σ'_6} des éléments (G,ϵ)-invariants, invariants par l'endomorphisme de Σ_6 défini sur sa base par $< \sigma > \mapsto < \sigma > + (-1)^n < \sigma^{-1} >$, formé de combinaisons linéaires diagrammes ayant un nombre impair de composante connexe, est de dimension quatre engendré par les éléments suivants :
  $y_1 = f\left((1,2,3,4,5,6)\right)$
  $y_2 = f\left((1,2,3,5,4,6)\right)$
  $y_3 = f\left((1,3,2,5,4,6)\right)$
  $y_4 = f\left((1,3)(2,5)(4,6)\right)$
  Avec $f(y_i) = \sum_{g\in G} \epsilon(g)(< g y_i g^{-1} > + < g y_i^{-1} g^{-1} >)$
  L'image par $\Phi_{\mathfrak{gl}_0}$ des éléments de degré impair de F_6 est donc de dimension inférieure où égale à quatre.

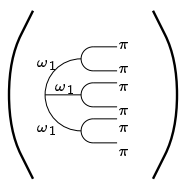
- L'application f_6 (construite dans la section précédente à l'aide de l'application $< \sigma > \mapsto < \sigma \setminus 6 >$) envoie y_1 et y_4 sur 0, mais $f_6(y_2) = f_6(y_3) \neq 0$.

- L'application induite par recollement de l'élément D_4 dans $\mathcal{D}_{\mathfrak{gl}}$ envoie y_1, y_2, y_3 et y_4 sur respectivement $-24\Delta^2$, $16\Delta^2 - 16$, $-8\Delta^2 - 16$ et -48 fois l'élément $(< (1,2,3) > - < (1,3,2) >)$ de Σ_3. En conséquence, et à l'aide des deux dernières remarques de la section précédente, on peut conclure que l'image par $\Phi_{\mathfrak{gl}_0}$ des éléments de degré impair de F_6 est de dimension inférieure où égale à deux engendré par y_1 et $y_2 - y_3$.

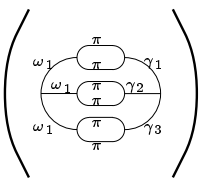
De plus, $\Phi_{\mathfrak{gl}}(D_2) = \frac{1}{6}y_1$ et $D_1 \circ D_2 = 8t^3 \in \Lambda$ donc $\mu_0(y_1) = 6\mu(D_2) = 0$. On va montrer que $\eta_0(y_1)$ est nul ce qui permettra de conclure que $\eta_0 = \mu_0$ sur l'image de F_6 en degré impair donc que $\eta = \mu$. En effet, sur cette image, η_0 et μ_0 ont même noyau donc sont proportionnelles, donc η et μ sont proportionnelles, or η et μ coïncident et sont non nulles sur le diagramme suivant :



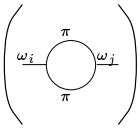
dont la composé avec D_1 donne l'élément $x_3 \in \Lambda$; elles sont donc bien égales.
Pour montrer que $\eta_0(y_1) = 0$, on calcule directement $\eta(D_2)$:
Le tenseur x_1 intervenant dans le calcul de η est obtenue comme la réduction par l'application ϕ du diagramme colorié suivant :

$$x_1 = -a_1\phi$$ 

Donc $\eta(D_2)$ est obtenue comme la réduction modulo $(a)R + (b-1)R$ de :

$$\Phi_{\mathfrak{D}_2 1}(K)(x_1) = \sum_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3} -a_1\phi$$ 

La sommation étant faite pour γ_1, γ_2 et γ_3 parcourant $\{-a_1\omega_1, -a_2\omega_2, -a_3\omega_3\}$ (Si l'un des γ_i valait π le diagramme colorié obtenu ne serait pas admissible).
Or si $i \neq j$ alors

$$\phi$$ 

$$= 0$$

donc tous les termes de la somme sont nuls sauf celui pour lequel $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = -a_1\omega_1$ mais ce terme est dans a_1^2R ; ainsi $\eta(D_2) = 0$ donc $\eta = \mu$.

Pour terminer, nous avons montré l'égalité du premier coefficient des caractères $\chi_{\mathfrak{D}_2 1}(x)$ et $\chi_{\mathfrak{sl}}(x)$ lorsque x est dans $(D_2)_*(F_6)$. Pour avoir l'égalité de ces coefficients sur Λ tout entier, il suffit de remarquer que si un diagramme de Λ n'est pas dans $(D_2)_*(F_6)$, alors il représente un élément de Λ divisible par t donc pour lequel les deux coefficients sont nuls. Cette dernière remarque termine la démonstration du lemme.

3.5 Les caractères exceptionnels et la relation du carré

3.5.1 Théorème d'existence

Si L est l'une des cinq algèbres de Lie exceptionnelles de la liste $(\mathfrak{g}_2, \mathfrak{f}_4, \mathfrak{e}_6, \mathfrak{e}_7, \mathfrak{e}_8)$ alors $I_L = (P_{\mathfrak{ex}}) + (u - \alpha_L t^2)$, la liste des valeurs de α_L est $(\frac{7}{72}, \frac{-4}{81}, \frac{-22}{225}, \frac{-7}{81}, \frac{-5}{72})$; ces valeurs sont distinctes deux à deux. On identifie le but de chacun de ces caractères χ_L avec $S_{/I_L} \simeq \mathbb{Q}[t]$. Posons $Q_{\mathfrak{ex}} = \prod_L (u - \alpha_L t^2)$ polynôme de degré dix de S ;

Lemme 3.3 *Il existe un caractère* $\chi_{\mathfrak{ex}} : \Lambda \longrightarrow S_{/(P_{\mathfrak{ex}})+(Q_{\mathfrak{ex}})}$ *factorisant les cinq caractères exceptionnels.*

Démonstration. Pour factoriser $\chi_{\mathfrak{g}_2}$ et $\chi_{\mathfrak{f}_4}$ on remarque que $I_{\mathfrak{g}_2} \cap I_{\mathfrak{f}_4}$ est l'idéal somme $(P_{\mathfrak{ex}}) + ((u - \alpha_1 t^2)(u - \alpha_2 t^2))$ (car $S_{/P_{\mathfrak{ex}}} \simeq \mathbb{Q}[t, u]$ est factoriel) donc le diagramme commutatif suivant est un carré cartésien :

$$\begin{array}{rcl} S_{/(P_{\mathfrak{ex}})+((u-\alpha_1 t^2)(u-\alpha_2 t^2))} & \longrightarrow & S_{/(P_{\mathfrak{ex}})+(u-\alpha_1 t^2)} \\ \downarrow & & \downarrow \\ S_{/(P_{\mathfrak{ex}})+(u-\alpha_2 t^2)} & \longrightarrow & S_{/(P_{\mathfrak{ex}})+(u-\alpha_1 t^2)+(u-\alpha_2 t^2)} \simeq \mathbb{Q}[t]_{/(t^2)} \end{array}$$

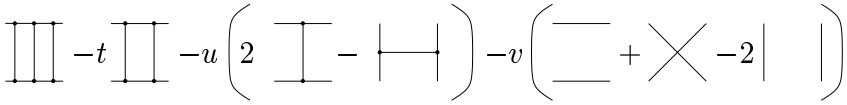
Donc il suffit de montrer que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{rcl} \Lambda & \xrightarrow{\chi_{\mathfrak{g}_2}} & S_{/(P_{\mathfrak{ex}})+(u-\alpha_1 t^2)} \\ \chi_{\mathfrak{f}_4} \downarrow & & \downarrow \\ S_{/(P_{\mathfrak{ex}})+(u-\alpha_2 t^2)} & \longrightarrow & S_{/(P_{\mathfrak{ex}})+(u-\alpha_1 t^2)+(u-\alpha_1 t^2)} \simeq \mathbb{Q}[t]_{/(t^2)} \end{array}$$

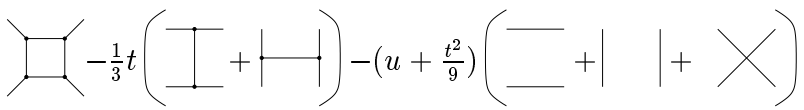
Mais l'anneau en bas à droite est nilpotent et nul en degré supérieur à deux. Or Λ ne diffère pas de Λ_0 en degré inférieur ou égal à dix (cf [Kn1]) et les deux caractères coïncident sur Λ_0 comme l'indique la formule (2) donnée section (3.2.2). Ainsi il existe un premier caractère intermédiaire factorisant $\chi_{\mathfrak{g}_2}$ et $\chi_{\mathfrak{f}_4}$. On réitère le même procédé (d'abord en remplaçant $\chi_{\mathfrak{g}_2}$ par le caractère que l'on vient de construire et $\chi_{\mathfrak{f}_4}$ par $\chi_{\mathfrak{e}_6}$ etc...) et le même argument permet de construire étape par étape le caractère $\chi_{\mathfrak{ex}}$. □

On désigne par K_1, K_2 et K_3 les combinaisons linéaires de diagrammes suivantes :

(1)



(2)



(3)

Soit Λ_1 l'idéal de $\Lambda \otimes S$ engendré par les combinaisons linéaires de $([3], \emptyset)$-diagrammes connexes se factorisant par K_1 ou K_2 et soit Λ_2 l'idéal de $\Lambda \otimes S$ engendré par les combinaisons linéaires de $([3], \emptyset)$-diagrammes connexes se factorisant par $K_3 \otimes K_3$. On montrera le

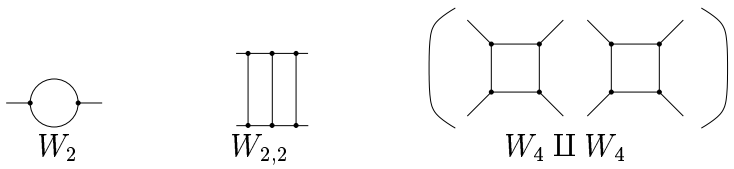
Lemme 3.4 *L'application $S \longrightarrow (\Lambda \otimes S)_{/(\Lambda_1+\Lambda_2)}$ donnée par l'unité de Λ est surjective en degré inférieur ou égal à 20. En conséquence, il existe un caractère χ_4 sur Λ en degré inférieur ou égal à 20 à valeur dans un quotient de S qui factorise tous les caractères annulant K_1, K_2 et $K_3 \otimes K_3$.*

Remarque : Des calculs élémentaires dans l'algèbre d'endomorphisme $\mathcal{D}([2],[2]) \otimes S$ permettent de prouver que l'application $S \longrightarrow (\Lambda_0 \otimes S)_{/(\Lambda_1)}$ est surjective. Un antécédent de x_n peut être calculé par la formule (2) donnée section 3.2.2.

On va aussi montrer que les caractères χ_3 mod $(P_{\mathfrak{ex}}) + (R)$ et $\chi_{\mathfrak{ex}}$ mod $(tP_{\mathfrak{sl}}P_{\mathfrak{osp}}P_{\mathfrak{sl}_2})$ à valeurs dans l'anneau $S_{/(tP_{\mathfrak{sl}}P_{\mathfrak{osp}}P_{\mathfrak{sl}_2})+(P_{\mathfrak{ex}})+(R)}$ concentré en degré inférieur ou égal à 20, se factorisent par χ_4, et donc coïncident, ce qui démontrera l'existence d'un caractère χ factorisant $\chi_{\mathfrak{ex}}$ et χ_3.
En fait, $\chi_{\mathfrak{ex}}$ annule K_3. Ceci provient du fait que pour chaque algèbre exceptionnelle, le carré du Casimir engendre le sous-espace des éléments L-invariants de S^4L (Cf [Vo2]).

3.5.2 Unicité de χ_4

Pour démontrer l'existence et l'unicité de χ_4, il est plus aisé de manipuler les diagrammes de F_0 qui forment un Λ-module libre isomorphe à Λ. Il s'agit de montrer qu'en degré inférieur ou égal à 21, F_0 est isomorphe à l'espace R_0 engendré par les diagrammes contenant l'un des trois diagrammes suivant :



(4)

On introduit les notations :

$$N_3 = \{(a,b,c) \in \mathbb{N}^3 / a \leq b \leq c\}$$

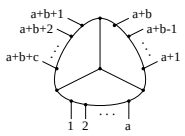
muni de l'ordre lexicographique de $\mathbb{N}^3$,

$$N_6 = \{(\alpha, \beta) \in N_3 \times N_3 / \alpha \leq \beta\}$$

muni de l'ordre induit par l'ordre lexicographique de $\mathbb{N}^6$. Dans la suite, on fixe $n \in \mathbb{N}$, $\gamma = (\alpha, \beta) \in N_6$ et $\delta = (a, b, c) \in N_3$. On définit l'ensemble

$$N = \mathbb{N} \amalg N_3 \amalg N_6$$

que l'on finit d'ordonner en posant :
$\delta < \gamma$ si $\delta < \alpha$ et $\gamma < \delta$ si $\alpha \leq \delta$; si $n < a$ alors $n < \delta$, sinon $\delta < n$;
n et γ sont ordonnés comme n et α.
l'ensemble N est ainsi muni d'un bon ordre.
On notera $|\delta| = a + b + c$ et $|\gamma| = |\alpha| + |\beta|$. Enfin, W_δ et W_n représenteront les diagrammes suivant de $F_{|\delta|}$ et F_n :



W_δ

W_n

et W_γ le diagramme $W_\alpha \otimes W_\beta \in \mathcal{D}([0], [|\gamma|])$. On appelle "roue" un diagramme isomorphe à W_n à la numérotation des sommets près.
On désigne par $f_K : \mathcal{D}([n], [m]) \longrightarrow \mathcal{D}([0], [m])$ la composition à gauche par $K \in \mathcal{D}([0], [n])$ (l'image de f_K représente les diagrammes "contenant" K) et on pose :
$R^0_\delta = f_{W_\delta}$(sous-espace de $\mathcal{D}([|\delta|], [0])$ engendré par les diagrammes connexes)
$R^0_\gamma = f_{W_\gamma}$(sous-espace de $\mathcal{D}([|\alpha|] \amalg [|\beta|], [0])$ engendré par les diagrammes dont chaque composante connexe a au moins un sommet trivalent et rencontre $[|\alpha|]$ et $[|\beta|]$).
Ceci permet de définir

$$R_d = R^0_d = f_{W_d}(F_d) \qquad R^<_\alpha = R_0 + \sum_{\beta < \alpha} R^0_\beta$$

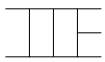
$$R_\alpha = R^<_\alpha + R^0_\alpha \qquad \text{et} \qquad \bar{R}_\alpha = R_\alpha / R^<_\alpha$$

Si $\alpha < \beta$ dans N, on a $R^<_\alpha \subset R_\alpha \subset R^<_\beta \subset R_\beta$.

Lemme 3.5 *F_n est engendré en degré n par les roues et en degré supérieur ou égal à $n+1$ par les diagrammes $K = W \circ K'$ où K' est un arbre (élément de F_k de degré $k-1$) vu comme élément de $\mathcal{D}([0], [k])$ et W est une roue (à $n+k$ jambes).*

La démonstration de ce lemme est laissée au lecteur (elle repose sur une simple manipulation des relations (IHX)).

On utilise aussi le fait que $W_{2n+1} \in \mathrm{Im}\,(f_{W_{2n}})$ (en particulier pour $n = 2$) et de la même manière, l'image de $f_{W_{2,2}}$ contient le diagramme suivant :



Si $d \in \mathbb{N}$ on notera $\mathcal{D}(d,[n])$ le quotient de $\mathcal{D}([d],[n])$ tuant l'action du groupe $\mathfrak{S}_d$. Si $\alpha \in A_3$ on note $\mathfrak{S}_\alpha$ le sous-groupe de $\mathfrak{S}_{|\alpha|}$ isomorphe à $\mathfrak{S}_{a_1} \times \mathfrak{S}_{a_2} \times \mathfrak{S}_{a_3}$ induit par l'isomorphisme $[a_1] \amalg [a_2] \amalg [a_3] \hookrightarrow [a_1 + a_2 + a_3]$ et $\mathcal{D}(\alpha,[n])$ le module quotient de $\mathcal{D}([|\alpha|],[n])$ par les relations : si $\sigma \in \mathfrak{S}_\alpha$ et $K \in \mathcal{D}([|\alpha|],[n])$ alors $\sigma.K \equiv K$. On a une application surjective naturelle de $\mathcal{D}([|\alpha|],n)$ vers $\mathcal{D}(\alpha,n)$: celle ci revient à remplacer la numérotation des sommets univalents de la source par un coloriage à l'aide de trois couleurs que l'on notera x_1, x_2 et x_3.
De même si $\gamma = (\alpha,\beta) \in A_6$ on note $\mathcal{D}(\gamma,[n])$ le quotient de $\mathcal{D}([|\gamma|],[n])$ tuant l'action du groupe $\mathfrak{S}_\gamma \simeq \mathfrak{S}_\alpha \times \mathfrak{S}_\beta \subset \mathfrak{S}_{|\gamma|}$. L'application quotient revient à remplacer la numérotation des sommets univalents de la source d'un diagramme par un coloriage à l'aide de six couleurs que l'on notera x_1, x_2, x_3 et y_1, y_2, y_3.

Lemme 3.6 *Si $\gamma \in A$ l'application*

$$\bar{f}_\gamma : \mathcal{D}([|\gamma|],[n]) \longrightarrow \bar{R}_\gamma$$

(obtenue par composition de f_{W_γ} avec l'application quotient $R_\gamma \longrightarrow \bar{R}_\gamma$) se factorise par une application $g_\gamma : \mathcal{D}(\gamma,[n]) \longrightarrow \bar{R}_\gamma$.

Pour démontrer ce lemme, il suffit de voir que pour tout $K \in \mathcal{D}([|\gamma|],[n])$, pour toute transposition $\sigma = (i, i+1) \in \mathfrak{S}_\gamma$, on a $\bar{f}_\gamma(\sigma.K) = \bar{f}_\gamma(K)$. Mais $W_\gamma \circ (\sigma.K) - W_\gamma \circ K = (\sigma.W_\gamma - W_\gamma) \circ K$ et par la relation (IHX), $(\sigma.W_\gamma - W_\gamma) \circ K \in R_\gamma^<$.

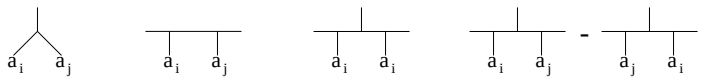
Lemme 3.7 *Soit $\gamma \in A$ et $K \in \mathcal{D}(\gamma,[0])$ alors $g_\gamma(K)$ est nul ou $dim(H_1(K)) > 22$. Ainsi, $F_0 \subset R_0$ en degré d tel que $1 < d < 22$.*

Démonstration. Pour montrer ce dernier lemme, on procède par étapes :

- Si $\gamma < ((1,3,3),(3,3,3))$ il n'y a rien a démontrer car $\mathrm{Im}\,(g_\gamma) \subset R_0$.
- En utilisant les arguments du lemme 3.6 il est facile de montrer qu'un diagramme contenant une roue à d jambe appartient à R_d. En effet, si le complémentaire de la roue n'est pas connexe, quitte à permuter ses jambes, on peut se ramener à un diagramme obtenue en recollant deux élément de F_2 et donc divisible par t (i.e. appartenant à R_0).

- Si $d \geq 4$, par le lemme 3.6 et en appliquant le lemme 3.5 au complémentaire de W_d dans un diagramme de R_d, on obtient facilement $\bar{R}_d = 0$.

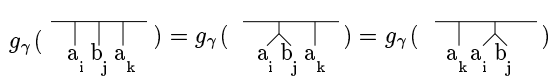
- Si les lettres a et b désignent les deux lettres $\{x, y\}$, si $\{i, j, k\} \subset \{1, 2, 3\}$ et si K contient l'un des cinq diagrammes suivant :



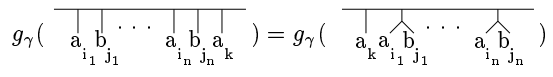
(5)

alors $g_\gamma(K) = 0$. En effet on peut toujours faire apparaître une roue à moins de cinq jambes en recollant un tel diagramme à W_γ.

- On peut maintenant montrer que si $\alpha \in A_3$ alors $\bar{R}_\alpha$ est nul. Pour cela, appliquons le lemme (3.5) a un diagramme connexe $K \in \mathcal{D}(\alpha, [0])$. Si K est un arbre, il contient le premier diagramme de (5) sinon, il se décompose en une roue dont certaines jambes sont coloriées par les x_i et d'autres qui sont reliées aux feuilles de l'arbre. Aux moins trois d'entre elles sont de couleur x_2. S'il ne contient pas le deuxième diagramme de (5), les jambes coloriées par les x_i sont séparés par des feuilles de l'arbre. Nous dirons que deux jambes coloriées sont en relations si elles ne sont séparées que par une feuille de l'arbre. On complète cette relation en une relation d'équivalence. Le dernier élément de (5) prouve que l'on peut permuter les couleurs des jambes qui sont en relation sans modifier l'image par g_α de K. Mais alors le troisième diagramme de (5) étant annulé par g_α, si $g_\alpha(K) \neq 0$, aucune des classes d'équivalences ne peut contenir deux jambes coloriées par la même couleur et il y a donc au moins trois classes d'équivalences. Ceci signifie qu'en au moins trois endroits dans K, deux feuilles de l'arbre sont reliées par une arête de la roue. La réunion de ces trois arêtes et de l'arbre forme un diagramme a trois boucles qui par le lemme (3.5) permet de faire apparaître un diagramme W_β où $\beta \in A_3$. Ainsi $f_{W_\alpha}(K)$ appartient à $R_{(\alpha,\beta)} \subset R_\alpha^<$.

- 

de plus ces éléments sont nuls si i=k.

- 

(6)

de plus ces éléments sont nuls si $n \geq 3$.

- Maintenant si $\gamma \in A_6$ et si $K \in \mathcal{D}(\gamma, [0])$ est un diagramme dont l'une des composantes connexes est un arbre, alors K est combinaison linéaire de diagrammes contenant l'un des deux premiers éléments de (5).

- Si une composante connexe K_0 de K est une roue, alors K_0 contient un diagramme de type (6) et soit $K_0 \in R_4$, soit le nombre n est supérieur ou égal à quatre donc $g_\gamma(K) = 0$.

- Si K est connexe, on lui applique le lemme (3.5). Reprenant la relation d'équivalence pour les jambes de la roue coloriées par les x_i, on retrouve qu'en trois endroits distincts, la roue possède deux jambes consécutives qui ne sont pas coloriées par x_i et au moins une des deux est donc une feuille de l'arbre. L'arbre a donc au moins trois feuilles et K a donc au moins trois boucles.

- Ainsi si $g_\gamma(K) \neq 0$, soit K est connexe et a au moins trois boucles, soit il possède plusieurs composantes connexes ayant chacune au moins deux boucles. Dans les deux cas, le nombre de sommet trivalent de K est supérieur ou égal à $|\gamma| + 4$. Comme $\gamma \geq ((1,3,3),(3,3,3))$, on a $|\gamma| \geq 16$ et le nombre de sommets trivalents de $f_{W_\gamma}(K)$ est supérieur ou égal à 44.

□

On peut maintenant montrer le lemme 3.4. En effet, considérons un diagramme $K = K' \circ K'' \in F_0$ où K' est l'un des trois éléments de (4). Le lecteur pourra vérifier que si K'' n'est pas connexe, alors, si K' est isomorphe à W_2, K est nul, si K' est isomorphe à $W_{2,2}$, t divise K et si K' est la réunion disjointe de deux carrés, alors K se décompose en une combinaison linéaire de diagrammes du même type pour lesquels K'' est connexe ou K' est l'un des deux premiers éléments de (4). On peut ainsi toujours se ramener au cas où K'' est connexe. Alors, K se décompose dans $(\Lambda \otimes S)_{/(\Lambda_1+\Lambda_2)}$ en une combinaison linéaire de diagrammes de degré strictement inférieur et en réitérant le processus pour un diagramme de $(\Lambda \otimes S)_{/(\Lambda_1+\Lambda_2)}$ de degré inférieur ou égal à 21 (correspondant à un élément de Λ de degré inférieur ou égal à 20), on peut l'exprimer comme combinaison linéaire d'éléments de S.

3.5.3 χ_3 et les relations exceptionnelles :

Le but de cette section est de montrer que χ_3 modulo l'idéal engendré par $P_{\mathfrak{ex}}$ annule Λ_2. Les variables t, u et v sont déterminées par le fait que chaque superalgèbre de Lie simple annule les éléments K_1 et K_2 définis dans

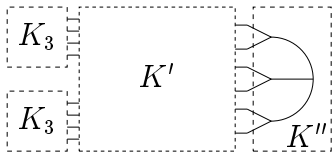
la section 3.5.1. Ainsi les caractères χ_3 et $\chi_{\mathfrak{ex}}$ annulent Λ_1.
Le but de χ_3 modulo $(P_{\mathfrak{ex}})$ est l'anneau

$$\begin{aligned} S_{/(P_{\mathfrak{ex}})+(tP_{\mathfrak{sl}}P_{\mathfrak{osp}}P_{\mathfrak{sl}_2})} &= S_{/(P_{\mathfrak{ex}})+((9u-2t^2)(u-t^2)(9u-5t^2)t^3u^2)} \\ \hookrightarrow \quad S_{/I_{\mathfrak{sl}_3}} \times S_{/I_{\mathfrak{osp}(1,2)}} &\times S_{/(P_{\mathfrak{sl}2})+(9u-5t^2)} \times S_{/(P_{\mathfrak{ex}})+(u^2)} \times S_{/(P_{\mathfrak{ex}})+(t^3)} \end{aligned}$$

Tout comme les algèbres de Lie exceptionnelles, pour $L = \mathfrak{sl}_3$ et $L = \mathfrak{osp}(1,2)$, le carré du Casimir engendre le sous-espace L-invariant de S^4L. Ainsi les caractères $\chi_{\mathfrak{sl}_3}$ et $\chi_{\mathfrak{osp}(1,2)}$ annulent Λ_2. De plus, $\Phi_{\mathfrak{sl}_2}$ annule l'élément

(7)

et ceci suffit à déterminer le caractère $\chi_{\mathfrak{sl}_2}$. Ainsi on peut vérifier directement que $(9u - 5t^2)$ divise $\Phi_{\mathfrak{sl}_2}(K_3)$.
De même $(\delta - 8)$ divise $\Phi_{\mathfrak{osp}}(K_3)$ et par homogénéité de $\chi_{\mathfrak{osp}}$, on a : $\chi_{\mathfrak{osp}}(\Lambda_2) \subset (\delta - 8\alpha)^2\mathbb{Q}[\alpha, \delta]$. Ceci montre que χ_3 modulo $(P_{\mathfrak{ex}}) + (u^2)$ est nul sur Λ_2.
Pour montrer que χ_3 modulo $(P_{\mathfrak{ex}})+(t^3)$ annule Λ_2, il suffit de montrer que les images de Λ_2 par respectivement $\chi_{\mathfrak{sl}}$ et $\chi_{\mathfrak{D}_{2\,1}}$ sont dans les idéaux respectifs (t^3) et (v^3). Pour cela, supposons qu'un élément K de $F_0 \otimes S$ soit de la forme suivante :

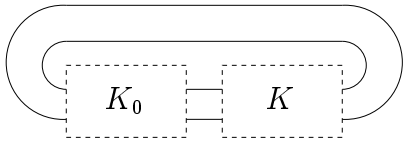


où $K' \circ K''$ est connexe. On note u l'élément de Λ correspondant à K. Il se trouve que Δ divise $\Phi_{\mathfrak{sl}}(K_3)$ et a_1 divise $\Phi_{\mathfrak{D}_{2\,1}}(K_3)$ (ceci provient du fait que $\Phi_{\mathfrak{psl}(2,2)}(K_3) = 0$).
Comme $K' \circ K''$ est connexe, K' appartient à $\mathcal{D}_b([8],[6])$ et donc a_1^2 divise $\Phi_{\mathfrak{D}_{2\,1}}((K_3 \otimes K_3) \circ K')$ or il existe une forme linéaire sur $X^{\otimes 6}$ à valeurs dans R (cf section 3.4.2) qui prend sur $a_1^{-2}\Phi_{\mathfrak{D}_{2\,1}}((K_3 \otimes K_3) \circ K')$ la valeur $\frac{1}{a_1^3}\chi_{\mathfrak{D}_{2\,1}}(u)$. Ainsi v^3 divise $\chi_{\mathfrak{D}_{2\,1}}(u)$.
De même, en notant $\mathcal{D}'_{\mathfrak{gl}}([p],[q])$ le sous-$\mathbb{Q}[\Delta]$-espace de $\mathcal{D}_{\mathfrak{gl}}([p],[q])$ engendré par les éléments de Σ'_{p+q} on peut aisément vérifier que la composition à droite par un élément de $\mathcal{D}_b$ laisse stable $\mathcal{D}'_{\mathfrak{gl}}$ (il suffit de le vérifier pour des diagrammes de la forme $[.,.] \otimes Id$). Ainsi, comme $\Phi_{\mathfrak{gl}}(K_3 \otimes K_3) \in \Delta^2\Sigma_8 + \Sigma'_8$, on a $\Phi_{\mathfrak{gl}}((K_3 \otimes K_3) \circ K') \in \Delta^2\Sigma_6 + \Sigma'_6$ et donc Δ^2 divise $\Phi_{\mathfrak{sl}}((K_3 \otimes K_3) \circ K')$. Or il existe une forme linéaire sur Σ_6, nulle sur Σ'_6, à valeur dans $\mathbb{Q}$ (cf la forme μ_0 de la section 3.4.4) qui prend sur $\Delta^{-2}\Phi_{\mathfrak{sl}}((K_3 \otimes K_3) \circ K')$ la valeur $(\frac{1}{t^3}\chi_{\mathfrak{sl}}(u))$ modulo (t). Ainsi, t^3 divise $\chi_{\mathfrak{sl}}(u)$.

Donc $\chi_3(u)$ est bien dans l'idéal somme $(P_{\mathfrak{ex}}) + (t^3)$. Le fait que les diagrammes du type de K engendrent Λ_2 modulo Λ_1 résulte de la remarque faite à la fin de la section précédente. Ainsi, χ_3 modulo $(P_{\mathfrak{ex}})$ annule aussi Λ_2 et par suite se factorise par χ_4 en degré inférieur ou égal à 20. Ceci termine la démonstration de l'existence de χ.

4 Les cas de $\mathfrak{g}(3)$, $\mathfrak{f}(4)$ et les branchements

Le but de cette section est de démontrer que le caractère χ factorise aussi les caractères $\chi_{\mathfrak{g}(3)}$ et $\chi_{\mathfrak{f}(4)}$. Certaines constructions introduites ne sont pas directement nécessaires à ces démonstrations mais seront utilisées dans la section suivante.
En fait, on montre que $\chi_{\mathfrak{g}(3)}$ se factorise par $\chi_{\mathfrak{sl}_2}$ et que $\chi_{\mathfrak{f}(4)}$ et $\chi_{\mathfrak{sl}_3}$ coïncident. Pour calculer $\chi_{\mathfrak{g}(3)}$, il suffit de remarquer que le sous-module X_2 de $\Lambda^2\mathfrak{g}(3)$ formé par le noyau du Casimir est simple de superdimension nulle (pour $\mathfrak{sl}_2$ ce même module est nul). Notons K_0 l'élément (7) annulé par $\Phi_{\mathfrak{sl}_2}$ (cf section 3.5.3). Les éléments de F_0 de la forme



où K est un diagramme connexe de $\mathcal{D}([2],[2])$, sont envoyés par $\Phi_{\mathfrak{g}(3)}$ sur $t\,\mathrm{str}_{X_2}(\Phi_{\mathfrak{g}(3)}(K)) = 0$ et par suite $\chi_{\mathfrak{g}(3)} = \chi_{\mathfrak{sl}_2}$ sont tous deux déterminés de manière unique par le fait qu'ils annulent ces éléments.

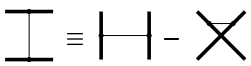
Supposons maintenant qu'une superalgèbre de Lie L munie d'un élément de Casimir non dégénéré $\Omega \in L \otimes L$ contienne une sous-algèbre de Lie l sur laquelle la forme bilinéaire supersymétrique de L ne soit pas dégénérée. On a alors un foncteur $F : Mod_L \longrightarrow Mod_l$ qui consiste à regarder la structure de l-module d'un L-module.
Si de plus le l-module E, orthogonal de l dans L, vérifie $[E,E]_L \subset l$, on dira que (l,E) est une bonne décomposition de L. On peut remarquer que le Casimir de L se décompose en $\Omega = \omega + \pi$ avec $\omega \in l \otimes l$ et $\pi \in E \otimes E$.
Pour transcrire cette situation en terme de diagrammes, on pose les définitions suivantes :
Un (X_1, X_2)-diagramme bicolore est la donnée d'un (Γ, X_1)-diagramme où Γ est non orientée et la donnée d'un isomorphisme : $\partial\Gamma \simeq X_2$. Nous dirons qu'une arête d'un diagramme bicolore est de la première couleur si elle

n'appartient pas à la courbe Γ, et nous dirons qu'elle est de la deuxième couleur dans le cas contraire. On représentera toujours d'un trait gras les arêtes de la deuxième couleur. On note $\widehat{\mathcal{A}}(X_1, X_2)$ le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel de base les (X_1, X_2)-diagrammes bicolores quotienté par les relations (AS), (IHX), (STU). On note aussi

$$\widehat{\mathcal{A}}(X) = \bigoplus_{X_1 \amalg X_2 = X} \widehat{\mathcal{A}}(X_1, X_2)$$

On remarque si Γ est une courbe sans bord non orienté, $\mathcal{A}(\Gamma, X) \subset \widehat{\mathcal{A}}(X, \emptyset)$.

Enfin on désigne par $\overline{\mathcal{A}}(X_1, X_2))$ le quotient de $\widehat{\mathcal{A}}(X_1, X_2)$ par les relations notées $(\overline{IHX})$:



et $\overline{\mathcal{A}}(X) = \bigoplus_{X_1 \amalg X_2 = X} \overline{\mathcal{A}}(X_1, X_2)$

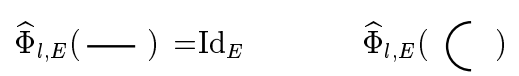
On définit les catégories $\widehat{\mathcal{D}}$ et $\overline{\mathcal{D}}$ de manière analogue à $\mathcal{D}$ comme les catégories ayant les mêmes objets que $\mathcal{D}$ et dont les morphismes sont $\widehat{\mathcal{D}}([p], [q]) = \widehat{\mathcal{A}}([p] \amalg [q])$ et $\overline{\mathcal{D}}([p], [q]) = \overline{\mathcal{A}}([p] \amalg [q])$. La composition dans $\widehat{\mathcal{D}}$ ou $\overline{\mathcal{D}}$ de deux diagrammes est encore obtenue par leur recollement si les arêtes issues des sommets de la source du premier diagramme sont de la même couleur que celles issues du but du deuxième diagramme et on décrète que la composition est nulle dans le cas contraire. On note $\overline{D} : \widehat{\mathcal{D}} \longrightarrow \overline{\mathcal{D}}$ le foncteur quotient.

Soit l une superalgèbre de Lie quadratique et E un $l-module$ muni d'une forme bilinéaire supersymétrique l-invariante. On note π l'élément de S^2E associé et ω le Casimir de l.

Proposition 4.1 *Il existe un unique foncteur monoïdal $\mathbb{Q}$-linéaire*

$$\widehat{\Phi}_{l,E} : \widehat{\mathcal{D}} \longrightarrow Mod_l$$

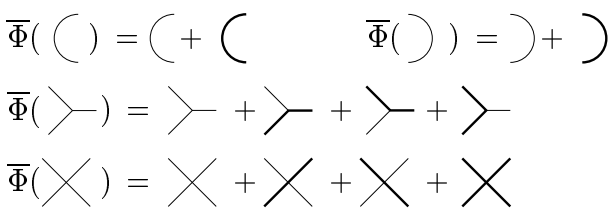
prenant les mêmes valeurs que $\Phi_{l,E}$ sur $\mathcal{A}(\Gamma, X)$ lorsque Γ est une courbe sans bord non orientée, et vérifiant



Si de plus (l, E) est une bonne décomposition de L, alors $\widehat{\Phi}_{l,E}$ passe au quotient par $\overline{D}$, définissant un foncteur $\overline{\Phi}_{l,E} : \overline{\mathcal{D}} \longrightarrow Mod_l$ qui vérifie

$$\widehat{\Phi}_{l,E} = \overline{\Phi}_{l,E} \circ \overline{D}$$

Il existe un foncteur monoïdal $\mathbb{Q}$-linéaire $\overline{\Phi} : \mathcal{D} \longrightarrow \overline{\mathcal{D}}$ défini de manière unique par ses valeurs sur les morphismes suivant :



Enfin, le foncteur $\overline{\Phi}$ vérifie :

$$F \circ \Phi_L = \overline{\Phi}_{l,E} \circ \overline{\Phi}$$

Démonstration. Nous justifierons seulement les existences de $\overline{\Phi}$ et de $\overline{\Phi}_{l,E}$. Notons provisoirement f l'application qui associe à un (X_1, X_2)-diagramme bicolore le $(X_1 \amalg X_2)$-diagramme sous-jacent (on oublie l'information sur les "couleurs"). Ainsi il n'est pas difficile de voir que pour un diagramme $K \in \mathcal{A}(\emptyset, X)$ on a : $\overline{\Phi}(K) = \sum_{f(\overline{K})=K} \overline{K}$. Le point clé de la validité de cette définition est qu'en notant I, H et X les diagrammes intervenant dans la relation (IHX), on peut réorganiser la somme $\sum_{f(\overline{K})=I} \overline{K} - \sum_{f(\overline{K})=H} \overline{K} + \sum_{f(\overline{K})=X} \overline{K}$ de manière à faire apparaître la relation (IHX) plus des relations (STU) plus la relation $(\overline{IHX})$. En ce sens, les relations $(\overline{IHX})$ sont nécessaires et suffisantes à l'existence de $\overline{\Phi}$.
En utilisant $\Omega = \omega + \pi$ et en "développant" le calcul de $\Phi_L(K)$ comme il a été fait dans la démonstration du lemme 3.2 pour l'algèbre $\mathfrak{D}_{2\,1}$, la formule $F \circ \Phi_L = \overline{\Phi}_{l,E} \circ \overline{\Phi}$ apparaît comme un simple jeu d'écriture et justifie du même coup l'existence de $\overline{\Phi}_{l,E}$: en effet en "développant" $\Phi_L(I - H + X) = 0$ on obtient bien que $\widehat{\Phi}_{l,E}$ vérifie la relation $(\overline{IHX})$. □

Corollaire : Si $E = \bigoplus_i E_i$ où chaque E_i est un l-module de superdimension nulle et tel que $\mathrm{End}_l(E_i) \simeq \mathbb{Q}$ alors les restrictions de Φ_L et Φ_l à F_0 sont des formes linéaires égales.

Démonstration. En effet, l'image par $\overline{\Phi}$ d'un élément de F_0 est égale au même élément vu dans $\overline{\mathcal{D}}([0],[0])$ plus une combinaison linéaire de $(\Gamma, \emptyset)$-diagrammes où $\Gamma \neq \emptyset$. Mais ces derniers s'interprètent comme la supertrace sur E d'un tenseur l-invariant et sont annulés par $\overline{\Phi}_{l,E}$ sous les hypothèses du corollaire. On a donc dans ces conditions $\overline{\Phi}_{l,E} \circ \overline{\Phi} = \Phi_l$ sur F_0. □

Proposition 4.2 *La superalgèbre de lie $\mathfrak{f}(4)$ satisfait au conditions ci-dessus pour $l = \mathfrak{sl}(4,1)$ et E est alors un $\mathfrak{sl}(4,1)$-module simple de superdimension nulle. En conséquence les caractères $\chi_{\mathfrak{sl}(4,1)}$ et $\chi_{\mathfrak{f}(4)}$ sont égaux.*

Démonstration.
La partie paire de $\mathfrak{f}(4)$ est isomorphe à l'algèbre semi-simple $\mathfrak{sl}_2 \times \mathfrak{so}_7$. Sa partie impaire est isomorphe au produit tensoriel de la représentation standard de $\mathfrak{sl}_2$ par la représentation spin_7. Considérons une décomposition de Cartan : $\mathfrak{sl}_2 = \mathbb{C}H \oplus \mathbb{C}E \oplus \mathbb{C}F$ avec $[H,E] = 2E$, $[H,F] = -2F$ et $[E,F] = H$. On note V_2 la représentation standard de $\mathfrak{sl}_2$, V_4 la représentation standard de $\mathfrak{sl}_4$, V_4' sa représentation duale, $W = \Lambda^2 V_4 \simeq \Lambda^2 V_4'$. On choisit e vecteur de plus haut poids de V_2 et $f = F.e$.
W est un $\mathfrak{sl}_4$-module simple de dimension 6 autodual. Le choix d'une base de W donne un mophisme d'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}_4 \longrightarrow \mathfrak{so}_6$ qui est en fait un isomorphisme.
Fixons une injection $\mathfrak{sl}_4 \simeq \mathfrak{so}_6 \hookrightarrow \mathfrak{so}_7$ et considérons la décomposition de $\mathfrak{f}(4)$ comme $\mathbb{C}H \times \mathfrak{sl}_4$-module :

$$\begin{array}{rlll} \mathfrak{f}(4) \simeq & & \mathfrak{sl}_2 \oplus \mathfrak{so}_7 & \oplus V_2 \otimes \mathrm{spin}_7 \\ \simeq & \mathbb{C}H \oplus \mathbb{C}E \oplus \mathbb{C}F \oplus \mathfrak{sl}_4 \oplus W & & \oplus e \otimes V \oplus e \otimes V' \oplus f \otimes V \oplus f \otimes V' \end{array}$$

Le crochet de Lie de $\mathfrak{f}(4)$ est un morphisme de $\mathbb{C}H \times \mathfrak{sl}_4$-module et on remplit facilement la table du crochet suivante en utilisant la propriété établi par V. G. Kac (cf [Kac]) que pour toute superalgèbre de Lie classique basique $\mathfrak{g}$, si Δ est l'ensemble de ses racines, et si $\mathfrak{g}_\alpha$ désigne l'espace propre associé à la racine α, et $\beta \in \Delta$ est différente de $-\alpha$ alors :

$$[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \neq 0 \Longleftrightarrow \alpha + \beta \in \Delta \tag{8}$$

$[.,.]$	$\mathbb{C}H$	$\mathfrak{sl}_4$	$\mathbb{C}E$	$\mathbb{C}F$	W	$e \otimes V$	$f \otimes V'$	$e \otimes V'$	$f \otimes V$
$\mathbb{C}H$	0	0	$\mathbb{C}E$	$\mathbb{C}F$	0	$e \otimes V$	$f \otimes V'$	$e \otimes V'$	$f \otimes V$
$\mathfrak{sl}_4$		$\mathfrak{sl}_4$	0	0	W	$e \otimes V$	$f \otimes V'$	$e \otimes V'$	$f \otimes V$
$\mathbb{C}E$			0	$\mathbb{C}H$	0	0	$e \otimes V'$	0	$e \otimes V$
$\mathbb{C}F$				0	0	$f \otimes V$	0	$f \otimes V'$	0
W					$\mathfrak{sl}_4$	$e \otimes V'$	$f \otimes V$	$e \otimes V$	$f \otimes V'$
$e \otimes V$						0	$(\mathbb{C}H) \oplus \mathfrak{sl}_4$	$\mathbb{C}E$	W
$f \otimes V'$							0	W	$\mathbb{C}F$
$e \otimes V'$								0	$(\mathbb{C}H) \oplus \mathfrak{sl}_4$
$f \otimes V$									0

Le remplissage de cette table découle directement de la propriété de surjectivité du crochet signalée ci-dessus à l'exception des termes $(\mathbb{C}H)$ notés entre parenthèses pour lesquels on a par exemple :

$$[[e \otimes V, f \otimes V'], E] = [e \otimes V, [f \otimes V', E]] = [e \otimes V, e \otimes V'] = \mathbb{C}E$$

Ce qui prouve que $\mathbb{C}H \subset [e \otimes V, f \otimes V']$.

Posons maintenant

$$l = \mathbb{C}H \oplus \mathfrak{sl}_4 \oplus (e \otimes V) \oplus (f \otimes V')$$

$$X = \mathbb{C}E \oplus \mathbb{C}F \oplus W \oplus (e \otimes V') \oplus (f \otimes V)$$

On lit facilement sur la table que :

- l est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{f}(4)$.
- L'idéal engendré par n'importe lequel de ses éléments non nul est l tout entier. Ainsi l est simple et la classification de [Kac] permet d'identifier $l \simeq \mathfrak{sl}(4,1)$.
- X est un l-module simple car il est monogène, engendré par n'importe lequel de ses éléments.
- Dans $\mathfrak{f}(4)$, $[X, X]$ est inclus dans l.

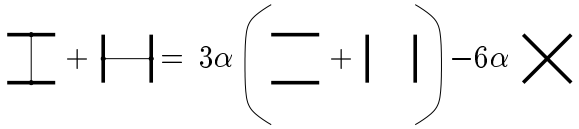
Compte tenu que pour une superalgèbre de Lie quadratique classique $\mathfrak{g}$, si α et β sont des racines, $\mathfrak{g}_\alpha \perp \mathfrak{g}_\beta$ si et seulement si $\alpha + \beta \neq 0$, on a $l \perp X$. De plus, la superdimension de X est bien nulle comme annoncé dans la proposition. □

Remarque : Le corollaire de la proposition 4.1 permet de redémontrer que les caractères $\chi_{\mathfrak{sl}(E)}$ et $\chi_{\mathfrak{osp}(E)}$ ne dépendent que de la superdimension de E d'où $\chi_{\mathfrak{f}(4)} = \chi_{\mathfrak{sl}_3}$.

5 La série exceptionnelle :

5.1 La catégorie $\mathcal{E}$

Introduisons les variables δ de degré 0 et α de degré 1. Soit $\widetilde{\mathcal{A}}(X_1, X_2)$ le quotient de $\widehat{\mathcal{A}}(X_1, X_2) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}[\delta, \alpha]$ par les relations suivantes :
La relation $(\widetilde{IHX})$:



Les relations de normalisation :

On note aussi

$$\widetilde{\mathcal{A}}(X) = \bigoplus_{X_1 \amalg X_2 = X} \widetilde{\mathcal{A}}(X_1, X_2)$$

On définit la catégorie $\widetilde{\mathcal{D}}$ de manière analogue à $\overline{\mathcal{D}}$ et de même on désigne par $\widetilde{D} : \widehat{\mathcal{D}} \longrightarrow \widetilde{\mathcal{D}}$ le foncteur quotient.
Considérons maintenant la superalgèbre de Lie $\mathfrak{sp}_2(\mathbb{Q}[\alpha])$ et v sa représentation standard de superdimension -2. On choisit pour $\mathfrak{sp}_2$ le Casimir valant -24α fois celui associé à la forme de Killing de $\mathfrak{sp}_2$ de sorte qu'il agisse par -24α sur la représentation adjointe. Comme précédemment, on définit les modules de diagrammes bicolores $\mathcal{A}_{\mathfrak{sp}_2}(X_1, X_2)$ et $\mathcal{A}_{\mathfrak{sp}_2}(X)$ comme les quotients de $\widehat{\mathcal{A}}(X) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}[\alpha]$ et $\widehat{\mathcal{A}}(X_1, X_2) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}[\alpha]$ par le noyau de $\widehat{\Phi}_{\mathfrak{sp}_2, v}$. On convient de représenter en pointillés les diagrammes de $\mathcal{A}_{\mathfrak{sp}_2}$. On appelle $\mathcal{D}_{\mathfrak{sp}_2}$ la catégorie associée et $D_{\mathfrak{sp}_2} : \widehat{\mathcal{D}} \longrightarrow \mathcal{D}_{\mathfrak{sp}_2}$ le foncteur quotient.
Enfin, on pose $\mathcal{A}_{\mathcal{E}}(Y, Z, X_2) = \mathcal{A}_{\mathfrak{sp}_2}(Y, X_2) \otimes_{\mathbb{Q}[\alpha]} \widetilde{\mathcal{A}}(Z, X_2)$ et

$$\mathcal{A}_{\mathcal{E}}(X_1, X_2) = \bigoplus_{Y \amalg Z = X_1} \mathcal{A}_{\mathcal{E}}(Y, Z, X_2)$$

$$\mathcal{A}_{\mathcal{E}}(X) = \bigoplus_{X_1 \amalg X_2 = X} \mathcal{A}_{\mathcal{E}}(X_1, X_2)$$

On appelle $\mathcal{E}$ la catégorie associée.

Si K est un (X_1, X_2)-diagramme bicolore, notons K' le sous-diagramme de K formé des arêtes de première couleur et K'' la courbe complémentaire de K' dans K. Considérons l'ensemble $\mathcal{P}_K$ des couples $p = (K_1(p), K_2(p))$ de sous-graphes de K' tels que $K' = K'_1(p) \amalg K'_2(p)$ (i.e. chaque composante connexe de K' est incluse dans $K'_1(p)$ ou bien dans $K'_2(p)$). On peut associé à $p \in \mathcal{P}_K$ une partition $X_1 = X_1^1(p) \amalg X_1^2(p)$ de sorte que $K_1(p) = K'_1(p) \cup K''$ (respectivement $K_2(p) = K'_2(p) \cup K''$) soit un $(X_1^1(p), X_2)$-diagramme bicolore (respectivement un $(X_1^2(p), X_2)$-diagramme bicolore). Ceci permet de définir

$$\widehat{\Delta}(K) = \sum_{p \in \mathcal{P}_K} K_1(p) \otimes K_2(p) \in \bigoplus_{Y \amalg Z = X_1} \widehat{\mathcal{A}}(Y, X_2) \otimes \widehat{\mathcal{A}}(Z, X_2)$$

Il n'est pas difficile de constater que $\widehat{\Delta}$ se prolonge par linéarité en une application bien définie sur $\widehat{\mathcal{A}}(X_1, X_2)$. La composition de $\widehat{\Delta}$ avec le produit tensoriel des applications induites par $D_{\mathfrak{sp}_2}$ et $\widetilde{D}$ définit une application $\widehat{\Delta}_{\mathcal{E}} : \widehat{\mathcal{A}}(X1, X2) \longrightarrow \mathcal{A}_{\mathcal{E}}(X_1, X_2)$. Nous appellerons aussi $\widehat{\Delta}_{\mathcal{E}} : \widehat{\mathcal{D}} \longrightarrow \mathcal{E}$ le foncteur associé.

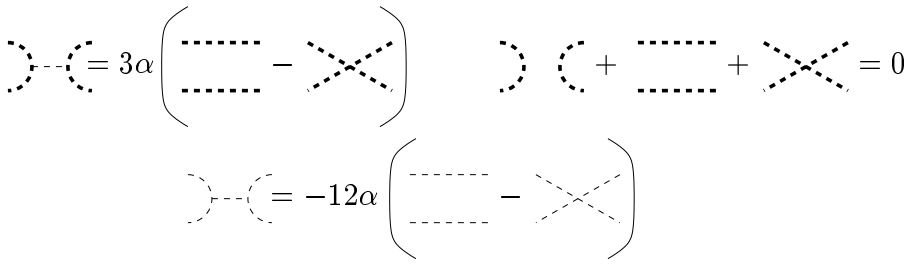
Proposition 5.1 *Les applications $\widehat{\Delta}_{\mathcal{E}}$ vérifient les relation ($\overline{IHX}$). Ainsi, il existe un unique fonteur $\overline{\Delta}_{\mathcal{E}} : \overline{\mathcal{D}} \longrightarrow \mathcal{E}$ tel que*

$$\widehat{\Delta}_{\mathcal{E}} = \overline{\Delta}_{\mathcal{E}} \circ \overline{D}$$

On note

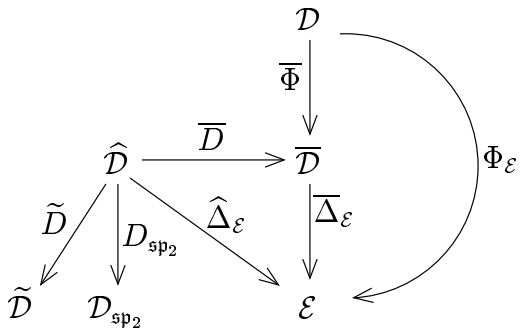
$$\Phi_{\mathcal{E}} = (\overline{\Delta}_{\mathcal{E}} \circ \overline{\Phi}) : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{E}$$

Démonstration. Il suffit simplement de calculer l'image par $\widehat{\Delta}_{\mathcal{E}}$ de la relation ($\overline{IHX}$) pour qu'apparaisse la relation ($\widetilde{IHX}$). Signalons seulement qu'il faut utiliser les relations suivantes ayant lieu dans $\mathcal{D}_{\mathfrak{sp}_2}$:



On remarque que comme pour la relation ($\overline{IHX}$) dans la proposition 4.1, la relation ($\widetilde{IHX}$) est "nécessaire" pour l'existence de $\overline{\Delta}_{\mathcal{E}}$. □

Pour clarifier les notations, nous indiquons le diagramme commutatif suivant :



Nous allons énumérer une liste de quadruplets (L, l, δ, e) où l et L sont des superalgèbres de Lie quadratique, e est un supermodule et $\delta = \mathrm{sdim}(e)$. Dans cette liste v_n (respectivement $v_{m,n}$) désigne la représentation standard

de dimension n (respectivement de superdimension $m-n$) de l. On note aussi $-w$ pour la représentation de l obtenue en inversant la $\mathbb{Z}_{/2\mathbb{Z}}$-graduation de la représentation w et w' pour la représentation duale de w.

n^o	L	l	δ	e
1	$\mathfrak{g}_2$	$\mathfrak{sp}_2$	-4	$-S^3v_2 \simeq \Lambda^3 v$
2	$\mathfrak{f}_4$	$\mathfrak{sp}_6$	-14	$-w$
3	$\mathfrak{e}_6$	$\mathfrak{sl}_6$	-20	$-\Lambda^3 v_6 \simeq -\Lambda^3 v_6'$
4	$\mathfrak{e}_7$	$\mathfrak{so}_{12}$	-32	$-\mathrm{spin}_{12}^+$
5	$\mathfrak{e}_8$	$\mathfrak{e}_7$	-56	$-v_{56}$
6	$\mathfrak{g}(3)$	$\mathfrak{g}_2$	7	v_7
7	$\mathfrak{f}(4)$	$\mathfrak{so}_7$	8	spin_7
$7'$	$\mathfrak{f}(4)$	$\mathfrak{D}_{2\,1,2}$	-2	$[1,1,0]+[0,2,1]$
8	$\mathfrak{sl}_3$	$\mathfrak{t}_1 \simeq \mathbb{Q}$	-2	$\mathbb{Q}^2$
9	$\mathfrak{so}_8$	$\mathfrak{sp}_2 \times \mathfrak{sp}_2 \times \mathfrak{sp}_2$	-8	$v \otimes v \otimes v$
10	$\mathfrak{psl}(2+n, 2+n)$	$\mathfrak{sl}(2+n, n)$	4	$v_{2+n,n} \oplus v'_{2+n,n}$
11	$\mathfrak{osp}(10+2n, 2+2n)$	$\mathfrak{osp}(10+2n, 2n)$	10	$v_{10+2n,2n}$
12	$\mathfrak{sl}_2$	$\mathfrak{so}_1 \simeq \{0\}$	0	$\{0\}$
13	$\mathfrak{osp}(1,2)$	$\{0\}$	1	$\mathbb{Q}$

(9)

A la ligne n^{o}2, w est déterminé par $\Lambda^3 v_6 \simeq v_6 \oplus w$ où v_6 est la représentation standard de $\mathfrak{sp}_6$. A la ligne n^{o}5, v_{56} désigne l'unique représentation de dimension 56 de $\mathfrak{e}_7$ et à la ligne n^{o}6, v_7 désigne l'unique représentation de dimension 7 de $\mathfrak{g}_2$. A la ligne n$^o 7'$, la représentation de $\mathfrak{D}_{2\,1,2}$ est donnée par son image dans $\mathrm{Mod}_{\mathfrak{sp}_2 \times \mathfrak{sp}_2 \times \mathfrak{sp}_2}$; $[p,q,r]$ désigne le module $\Lambda^p v \otimes \Lambda^q v \otimes \Lambda^r v$. Nous justifierons l'existence de e plus tard. A la ligne n^{o}8 la représentation de dimension -2 de l'algèbre commutative $\mathbb{Q}$ est donnée par la matrice diagonale $(1,-1)$. A la ligne n^{o}9, l'algèbre l désigne la somme de trois copies de $\mathfrak{sp}_2$ et le $(\mathfrak{sp}_2 \times \mathfrak{sp}_2 \times \mathfrak{sp}_2)$-module e est le produit tensoriel des représentations standards de chaque facteur. Les lignes n^{os}12 et 13 ne sont à prendre en compte que si l'on accepte l'espace vectoriel nul comme algèbre de Lie quadratique.

Remarquons que si une superalgèbre de Lie quadratique l admet une représentation quadratique e telle que $\widehat{\Phi}_{l,e}$ se factorise par $\widetilde{D}$ via un foncteur $\widetilde{\Phi}_{l,e} : \widetilde{\mathcal{D}} \longrightarrow \mathrm{Mod}_l$ envoyant δ sur la superdimension de e et α sur un rationnel, alors il existe un foncteur $\Psi_{l,e} : \mathcal{E} \longrightarrow \mathrm{Mod}_{\mathfrak{sp}_2 \times l}$ envoyant $\mathrm{Id}([1]) \in \mathcal{E}([1],[1])$ sur $\mathrm{Id}(\mathfrak{sp}_2 \otimes \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q} \otimes l \oplus v \otimes e)$.

Proposition 5.2 *Pour chaque quadruplet (L, l, δ, e) de la liste 9, $\mathfrak{sp}_2 \times l$ est une sous-superalgèbre de Lie de L et L se décompose comme $(\mathfrak{sp}_2 \times l)$-module*

en la somme orthogonale

$$L \simeq \mathfrak{sp}_2 \oplus l \oplus v \otimes e \tag{10}$$

De plus, les foncteurs $\widetilde{\Phi}_{l,e} : \widetilde{\mathcal{D}} \longrightarrow Mod_l$ *sont bien définis et on a le diagramme commutatif suivant :*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D} & \xrightarrow{\Phi_{\mathcal{E}}} & \mathcal{E} \\ \Phi_L \downarrow & & \downarrow \Psi_{l,e} \\ Mod_L & \longrightarrow & Mod_{\mathfrak{sp}_2 \times l} \end{array}$$

Démonstration. Nous commençons par justifier les décompositions de L pour les algèbres de la liste 9 : Pour les lignes 6, 7 et 12 ainsi que les lignes 10 et 11 lorsque $n = 0$, il suffit de considérer la décomposition en partie paire et impaire de la superalgèbre de Lie L.
Lorsque L et l sont des algèbres de Lie simples (lignes 1 à 5, 8 et 9), cette décomposition a été calculée par le programme [LiE] et vérifiée à la main sur une décomposition de Cartan de L.
Pour la ligne 11 elle provient de la décomposition de la représentation standard V de $L = osp(V) \simeq \Lambda^2 V$, en la somme orthogonale $V = v \oplus e$ qui implique que comme $(\mathfrak{sp}_2 \times l)$-module, on ait
$L \simeq \Lambda^2 V \simeq \Lambda^2(v \oplus e) \simeq \Lambda^2 v \oplus \Lambda^2 e \oplus v \otimes e \simeq \mathfrak{sp}_2 \oplus l \oplus v \otimes e$.
Similairement, pour la ligne 10, la représentation standard V de $\mathfrak{gl}(2+n, 2+n)$ se scinde en $v \oplus v_{2+n,n}$, ce qui implique que comme $(\mathfrak{gl}(0,2) \times \mathfrak{gl}(2+n, n))$-module, on ait
$\mathfrak{gl}(2+n, 2+n) \simeq V \otimes V' \simeq v \otimes v' \oplus v_{2+n,n} \otimes v'_{2+n,n} \oplus v \otimes v'_{2+n,n} \oplus v_{2+n,n} \otimes v'$
$\simeq \mathfrak{gl}(v) \oplus \mathfrak{gl}(2+n, n) \oplus v \otimes v'_{2+n,n} \oplus v' \otimes v_{2+n,n}$.
Or le $\mathfrak{sl}(0,2)$-module v est quadratique donc comme $(\mathfrak{sp}_2 \times \mathfrak{sl}(2+n, n))$-module, on a : $\mathfrak{gl}(2+n, 2+n) \simeq \mathbb{Q}^2 \oplus \mathfrak{sp}_2 \oplus \mathfrak{sl}(2+n, n) \oplus v \otimes e$. Les trois derniers facteurs sont dans le noyau de la supertrace, ce qui permet d'identifier $\mathfrak{psl}(2+n, 2+n) \simeq \mathfrak{sl}(2+n, 2+n)_{/\mathbb{Q}}$ et $\mathfrak{sp}_2 \oplus l \oplus v \otimes e$.
Pour la ligne $n^o 7'$ considérons la décomposition orthogonale de l'espace vectoriel quadratique de dimension 7, $v_7 = v_3 \oplus v_4$. Celle-ci nous donne une injection $\mathfrak{sp}_2 \times \mathfrak{sp}_2 \times \mathfrak{sp}_2 \simeq \mathfrak{so}_3 \times \mathfrak{so}_4 \hookrightarrow \mathfrak{so}_7$ et donc un foncteur

$$f : \mathrm{Mod}_{\mathfrak{f}(4)} \longrightarrow \mathrm{Mod}_{\mathfrak{sp}_2 \times \mathfrak{so}_7} \longrightarrow \mathrm{Mod}_{\mathfrak{sp}_2 \times \mathfrak{sp}_2 \times \mathfrak{sp}_2 \times \mathfrak{sp}_2}$$

l'image par f de la représentation adjointe de $\mathfrak{f}(4)$ est

$$f(\mathfrak{f}(4)) = [2,0,0,0] \oplus [0,2,0,0] \oplus [0,0,2,0] \oplus [0,0,0,2] \oplus [0,2,1,1]$$

$$\oplus [1,1,0,1] \oplus [1,1,1,0]$$

En utilisant la propriété (8), on voit facilement que la sous-algèbre l formée par les trois premiers et le dernier terme de cette décomposition est simple donc isomorphe à une superalgèbre du type $\mathfrak{D}_{2\,1}$. Les cinquième et sixième termes forment un $(l \times \mathfrak{sp}_2)$-module simple $e \otimes v$. Nous ne souhaitons pas nous étendre sur ce cas, mais on peut prouver que si une algèbre $\mathfrak{D}_{2\,1,\beta}$ admet une représentation de type $[0, p+1, 1] + [1, 0, p]$ pour $p \in \mathbb{N}$ alors $\beta = p+1$ (c'est par exemple le cas pour la représentation standard de $\mathfrak{osp}(4,2) \simeq \mathfrak{D}_{2\,1,1}$).

Compte tenu que pour une superalgèbre de Lie quadratique classique $\mathfrak{g}$, si α et β sont des racines, $\mathfrak{g}_\alpha \perp \mathfrak{g}_\beta$ si et seulement si $\alpha + \beta \neq 0$, on lit facilement sur une décomposition de Cartan de L que les décompositions proposées sont orthogonales pour $< ., . >_L$.

La justification du fait que $\widehat{\Phi}_{l,e}$ vérifie la relation $(\widetilde{IHX})$ est similaire à la démonstration de la proposition 4.1 pour l'existence de $\overline{\Phi}_{l,e}$: avec des notations évidentes, le casimir Ω de L se décompose en $\Omega = \omega + \pi = (\omega_{\mathfrak{sp}_2} + \omega_l) + \pi_v \otimes \pi_e$ et en "développant" le calcul de $\overline{\Phi}_{\mathfrak{sp}_2 \oplus l, v \otimes e}(\overline{IHX})$, on trouve que $\widehat{\Phi}_{l,e}$ vérifie nécessairement la relation $(\widetilde{IHX})$.
La première relation de normalisation est une simple convention. Pour traiter les deux autres, nous traiterons séparément les cas $L = \mathfrak{so}_8$, $L = \mathfrak{sl}_2$ et $L = \mathfrak{osp}(1,2)$. Dans tous les autres cas, on a $Mod_l(l,l) = \mathbb{Q}$. Ainsi il existe bien des scalaires x et $2t$ tels que les formes quadratiques induites par les supertraces sur la représentation e et la représentation adjointe de l (i.e la forme de Killing) soient respectivement égales à x et $2t$ fois la forme de l associée à ω_l (ω_l agit aussi par $2t$ sur l). Ensuite, comme $\widehat{\Phi}_{l,e}$ vérifie la relation $(\widetilde{IHX})$, il vérifie aussi les deux relations suivantes :

La première implique que ω_l agit par $3\alpha(\delta - 1)$ sur e et la deuxième que $x(x - t + \alpha(\delta - 4)) = 0$. D'autre part, en notant d la superdimension de l, on a $= 3\alpha(\delta-1)\delta = xd$. Comme $\delta \neq 1$ et $d \neq 0$, on a $x = \frac{3\alpha\delta(\delta-1)}{d}$ et $t = x + \alpha(\delta - 4)$. On peut alors vérifier cas par cas la validité des relations de normalisation.
Les cas $L = \mathfrak{sl}_2$ et $L = \mathfrak{osp}(1,2)$ sont triviaux car alors $\mathrm{Id}_l = 0$.
Pour le cas $L = \mathfrak{so}_8$, il faut faire intervenir les symétries de L : on a $\mathrm{Aut}_{Lie}(\mathfrak{so}_8) \simeq \mathfrak{S}_3$. Pour un choix convenable de $l \subset L$, l'action de $\mathfrak{S}_3$ sur L est donnée par la permutation des trois facteurs simples de l et des trois

représentations isomorphes à v associées. On peut montrer que l'image de $\widehat{\Phi}_{l,e}$ est incluse dans l'espace des tenseurs $\mathfrak{S}_3$-invariants de l et que comme dans les cas précédents, les scalaires x et $2t$ sont bien définis. □

Remarques : Nous faisons ici une suite de remarques sans donner les calculs justificatifs.

- Examinons l'action du groupe symétrique sur le module $\widehat{\mathcal{A}}([0],[4])$ en bas degrés : En degré 0, on a $\widehat{\mathcal{A}}([0],[4])_0 = A_1 + A_2$ et en degré 1, le module engendré par les diagrammes connexes est $\widehat{\mathcal{A}}([0],[4])_1^c = A_3 + A_4$ où A_1 un module simple de tableau de Young $[4]$, A_2 de tableau de Young $[2,2]$, A_3 de tableau de Young $[1,1,1,1]$ et A_4 de tableau de Young $[2,2]$.
  La catégorie $\mathcal{D}_{\mathfrak{osp}}$ est obtenue comme sous-catégorie quotient de $\widehat{\mathcal{D}}$ en imposant les relations suivantes : le $\mathfrak{S}_4$-module A_3 est nul et les deux modules A_4 et A_2 sont liés (i.e. il existe un paramètre β dépendant du choix du Casimir et un isomorphisme de $\mathfrak{S}_4$-module $f : A_4 \longrightarrow A_2$ tels que pour tout $K \in A_4$, $K = \beta f(K)$).
  Si on regarde le quotient $\widehat{\mathcal{A}}$ obtenu en annulant A_2, on obtient facilement $\delta = 1$ et tout diagramme comportant un sommet mixte (duquel partent des arêtes de couleurs différentes) est nul. En particulier, $\widehat{\mathcal{A}}([0],[4])_1^c$ est nul. L'application quotient présente de grandes similitudes avec $\widehat{\Phi}_{\mathfrak{so}1,\mathbb{Q}}$
  De même, si on regarde le quotient $\widehat{\mathcal{A}}$ obtenu en annulant la partie $[4]$ de $\widehat{\mathcal{A}}([0],[4])_0$ on obtient facilement $\delta = -2$ et d'autres relations similaires à celles de $\mathcal{D}_{\mathfrak{sp}_2}$.
  Enfin, annuler A_3 revient à imposer la relation $(\overline{IHX})$ et relier les modules A_4 et A_2 revient à imposer la relation $(\widetilde{IHX})$. Nous dirons que $\widetilde{\Phi}_{l,e}$ est non dégénéré s'il n'annule aucun des trois $\mathfrak{S}_4$-module A_1, A_2 et A_3.

- Il existe une démonstration plus générale du fait que si L admet une décomposition de la forme (10) alors $\widehat{\Phi}_{l,e}$ vérifie les relations de normalisations qui ont lieux dans $\widetilde{\mathcal{D}}$. Pour cela remplaçons temporairement ces relation par celles faisant intervenir les paramètres formels x et t de la démonstration précédente. On peut calculer l'image de l'élément K_2 (annulé par Φ_L en $(t,u,v) = (t(L),u(L),v(L)) = (T,U,V)$) de la section 3.5.1. En écrivant que son image par $\Psi_{l,e}$ est nulle, on se ramène à l'un des trois cas non exclusifs suivant :

  1. $\widetilde{\Phi}_{l,e}$ est dégénéré

2. $\delta = 8$

3. $t = 2(\delta+2)\alpha$, et $x = -(\delta-16)\alpha$

- Le calcul évoqué ci-dessus donne en plus dans le troisième cas, $P_{\mathfrak{ex}}(T,U,V) = 0$ et le triplet $(12\alpha, (\delta-16)\alpha, 2(\delta-4)\alpha)$ est admissible pour L.

- Dans $\widetilde{\mathcal{D}} \otimes \mathbb{Q}[(\delta-16)^{-1}, \alpha^{-1}]$ le triplet $(12\alpha, (\delta+8)\alpha, (\delta-16)\alpha)$ est admissible c'est à dire que l'élément K_2 de la section 3.5.1 est nul pour les valeur correspondante de (t,u,v). En conséquence pour tout foncteur $\Phi_{l,e}$ tel que $\mathrm{sdim}(e) \neq 16$, l appartient à la même famille des superalgèbres de Lie admettant des triplets admissibles sur une réunion de 6 droites déterminées par $\widetilde{P} = 343v^2+322vut+38vt^3-72u^3+55u^2t^2+16ut^4+t^6 = 0$.

- On a le fait remarquable et inattendu suivant : Pour chaque triplets annulé par le polynôme $P_{\mathfrak{ex}}$ et admissible par une superalgèbre de Lie quadratique, il existe une superalgèbre de Lie quadratique L dans la liste (9) admettant ce triplet. Réciproquement, mis à part pour $\delta = 16$ tous les triplets de la forme $(12\alpha, (\delta+8)\alpha, (\delta-16)\alpha)$, se trouvant sur l'une des cinq réunions de droites contenant tous les triplets admissibles, sont effectivement admissibles par l'une des algèbres l de la liste (9). Cette décomposition commune renforce la cohérence de la "famille exceptionnelle". Les propriétés de l'algèbre $\widetilde{\mathcal{D}}$ redonne une démonstration de la plupart des résultats de [DM] et [CM] (Le paramètre a de [CM] est relié à δ par $a = \frac{2}{4-\delta}$). De plus elles permettent d'étendre ces résultats aux superalgèbres de Lie $\mathfrak{g}(3)$, $\mathfrak{f}(4)$, $\mathfrak{psl}(2+n, 2+n)$ et $\mathfrak{osp}(10+2n, 2+2n)$.

- Le polynôme $\widetilde{P}$ admet le triplet $\{-1, 3, 5\}$ comme racine double. Les deux valeurs correspondantes de δ sont 12 et -44. Ces deux cas donnent théoriquement $\mathrm{sdim}(l) = 99$ et $\mathrm{sdim}(D) = \dim(\mathfrak{e}_6) = 78$ dans le premier cas, $\mathrm{sdim}(D) = 190$ dans le deuxième cas. Il est troublant de constater que pour ces valeurs de δ, toutes les valeurs théoriques des superdimensions des modules apparaissant dans les premières puissances tensorielles de la représentation adjointe de L sont entières (cf [CM]).

- Si $W = e^{-\frac{\alpha}{2}}$ et $\delta \in \mathbb{Z}$ alors $\Delta \in \mathbb{Q}[W, W^{-1}] \Longleftrightarrow \delta \equiv 0 \bmod 4$ ou $\delta \equiv 1 \bmod 3$. C'est le cas pour toutes les valeurs de δ de la liste (9).

5.2 Relations "skein" dans $\widetilde{\mathcal{D}}$

5.2.1 Les algèbres A_n

Appelons i l'image dans $\widetilde{\mathcal{D}}([1],[1])$ de l'unique $([0],[2])$-diagramme sans boucle. Dans la suite, nous considérerons la structure d'algèbre de $\widetilde{\mathcal{A}}([0],[2n])$ induite par la composition dans $\widetilde{\mathcal{D}}([n],[n])$. Remarquons que l'élément unité de $\widetilde{\mathcal{A}}([0],[2n])$ n'est pas le morphisme identité de $\widetilde{\mathcal{D}}([n],[n])$ (ce morphisme n'appartient pas à $\widetilde{\mathcal{A}}([0],[2n])$) mais l'élément $i_n = i^{\otimes n}$ et que le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ s'envoie dans $\widetilde{\mathcal{A}}([0],[2n])$. Nous définissons A_n comme la sous-$\mathbb{Q}[\delta,\alpha]$-algèbre de $\widetilde{\mathcal{A}}([0],[2n])$ engendrée par les diagrammes sans boucles. Pour $n = 0$ on conviendra de noter A_0 la complétée pour la graduation de la sous-algèbre de $\widetilde{\mathcal{A}}([0],[0])$ engendrée par les diagrammes bicolores dont chaque composantes connexes contient une arête de la "deuxième" couleur. On note respectivement r et a les deux diagrammes suivants :

Enfin on note A_3^h (respectivement $\widehat{A}_3$) la sous-algèbre de $\widehat{\mathcal{D}}([3],[3])$ engendrée par les diagrammes représentant des éléments du groupe $\mathfrak{S}_3$ et par $r \otimes i$ (respectivement par $\mathfrak{S}_3$, $r \otimes i$ et par $a \otimes i$). (Dans la notation A_3^h, le h est mis pour "horizontal").

Proposition 5.3 *Pour $n \in \{2,3\}$, les algèbres A_n sont engendrées comme $\mathbb{Q}[\delta,\alpha]$-algèbres par les éléments $r \otimes i_{n-2}$, $a \otimes i_{n-2}$ et par les éléments du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$.*
Les algèbres A_2 et A_3 sont engendrées comme $\mathbb{Q}[\delta,\alpha]$-modules par les diagrammes sans boucles. De plus, pour A_2, on a la famille génératrice (i_2, r, a, s) (où s est l'image de la transposition de $\mathfrak{S}_2$) et pour A_3, il existe une famille génératrice de cardinal 35.

Démonstration. Remarquons tout d'abord que dans A_3, si le produit de deux diagrammes sans boucles est connexe, il donne un diagramme connexe ayant au plus deux boucles. On donne seulement une indication sur la manière de réduire un diagramme de A_3 ayant une ou deux boucles en une combinaison linéaire de diagrammes sans boucles :
Appelons taille réelle d'un cycle d'un diagramme bicolore, le nombre d'arêtes de la deuxième couleur qui le compose. Alors tout diagramme bicolore dont tous les sommets trivalents sont de couleurs mixtes, et contenant un cycle de taille réelle n, s'écrit par les relations $(\widetilde{IHX})$ comme une combinaison linéaire de diagrammes de degré strictement inférieur, plus un diagramme ayant un cycle de longueur n complètement de la deuxième couleur. Maintenant, si un

$(\emptyset, X)$-diagramme bicolore à une seule boucle possède un cycle de longueur n complètement de la deuxième couleur, alors clairement cardinal$(X) \geq 2n$. Comme tout cycle de longueur $n < 4$ s'écrit dans $\widetilde{D}$ comme combinaison linéaire de diagrammes sans boucles, A_3 est bien engendré en degré 5 par les diagrammes sans boucles. En degré 6, tout diagramme connexe de A_3 (à deux boucles) s'obtient en recollant deux extrémitées d'un $(\emptyset, [8])$-diagramme bicolore a une seule boucle. Mais ce recollement fait toujours apparaître un cycle de taille réelle inférieure ou égale à trois, et un tel diagramme s'écrit donc encore comme combinaison linéaire de diagrammes sans boucles. $\square$

Soit A'_3 la sous-algèbre de $M_4(\mathbb{Q}[\delta,\alpha]) \times M_3(\mathbb{Q}[\delta,\alpha]) \times M_2(\mathbb{Q}[\delta,\alpha]) \times M_2(\mathbb{Q}[\delta,\alpha]) \times M_1(\mathbb{Q}[\delta,\alpha]) \times M_1(\mathbb{Q}[\delta,\alpha])$ engendrée par les éléments suivants :

$$r'_{1,2} = \left(\begin{bmatrix} 3(-1+\delta)\alpha & (\delta+2)\alpha & 2(\delta-4)\alpha & 0 \\ 0 & (-7+\delta)\alpha & -(\delta-4)\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 9\alpha & 6\alpha \\ 0 & 0 & 0 & -3\alpha \end{bmatrix}, \right.$$

$$\begin{bmatrix} (-7+\delta)\alpha & \alpha(\delta-28) & -12\alpha \\ 0 & 9\alpha & 6\alpha \\ 0 & 0 & -3\alpha \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3\alpha & -\frac{1}{2}(\delta-4)\alpha \\ 0 & (-7+\delta)\alpha \end{bmatrix},$$

$$\left. \begin{bmatrix} -3\alpha & -6\alpha \\ 0 & 9\alpha \end{bmatrix}, [\ 9\alpha\ ], [\ -3\alpha\ ] \right)$$

$$s'_{1,2} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \right.$$

$$\left. \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, [\ -1\ ], [\ 1\ ] \right)$$

$$s'_{2,3} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \right.$$

$$\left. \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, [\ -1\ ], [\ 1\ ] \right)$$

$$a'_{1,2} = \left(\begin{bmatrix} \delta & \frac{1}{2}\delta & \frac{1}{2}\delta & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, [\ 0\ ], [\ 0\ ] \right)$$

Proposition 5.4 *On a dans A_2 les identités suivantes :*

$$r^2 = (\delta - 7)\alpha r + 2\delta\alpha^2 a - 2(\delta - 5)\alpha^2 s + (\delta - 2)\alpha^2 i_2$$

$$(r - 3(\delta - 1)\alpha)(r - (\delta - 7)\alpha)(r - 9\alpha)(r + 3\alpha) = 0$$

De plus il existe un unique morphisme d'algèbre graduée $f : A'_3 \longrightarrow A_3$ où f est définie par

$$f(r'_{1,2}) = r \otimes i \qquad f(s'_{1,2}) = s \otimes i \qquad f(s'_{2,3}) = i \otimes s \quad et \quad f(a'_{1,2}) = a \otimes i$$

Démonstration. Nous ne démontrerons pas cette proposition qui repose sur un programme informatique en language Maple. Notons simplement qu'après avoir implémenté un programme permettant de donner une écriture d'un diagramme à moins de trois boucles sur la famille génératrice $\mathcal{F}$ à 35 éléments de A_3, il a été procédé comme il suit : On commence par construire un morphisme de $\mathbb{Q}[\delta, \alpha]$-module : Pour chaque $v_i \in \mathcal{F}$ on choisi une décomposition de v_i comme produit des éléments $a \otimes i$, $r \otimes i$ et d'éléments de $\mathfrak{S}_3$. Ceci permet d'associer à chaque élément $v_i \in \mathcal{F}$ un élément $v'_i \in A'_3$. On vérifie ensuite que la famille de produits de matrices $\mathcal{F}' = (v'_1, \ldots, v'_{35})$ forme une base du $\mathbb{Q}(\delta, \alpha)$-espace vectoriel $M_4(\mathbb{Q}(\delta, \alpha)) \times M_3(\mathbb{Q}(\delta, \alpha)) \times M_2(\mathbb{Q}(\delta, \alpha)) \times M_2(\mathbb{Q}(\delta, \alpha)) \times M_1(\mathbb{Q}(\delta, \alpha)) \times M_1(\mathbb{Q}(\delta, \alpha))$ puis que les 1225 produits $v'_i v'_j$ appartiennent au $\mathbb{Q}[\delta, \alpha]$-module libre de base $\mathcal{F}'$ et que ces produits se décomposent de manière cohérente avec le produit de A_3. □

5.2.2 L'invariant universel de Vassiliev-Kontsevich

Soient $R = \mathbb{C}[\delta][[\alpha]]$ l'anneau des séries en α à coefficients dans $\mathbb{Q}[\delta]$, $\overline{R} = \mathbb{C}(\delta)[[\alpha]]$ l'anneau des séries en α à coefficients dans le corps des fonctions fractions rationnelles en δ et $K = \mathbb{C}(\delta)[\alpha^{-1}][[\alpha]]$ le corps des séries de Laurent en α à coefficients dans $\mathbb{C}(\delta)$.
Nous reprenons la notion de "q-tangles" introduite dans [LM1] en négligeant l'orientation :
Soit $\mathcal{T}_3$ le monoïde engendré par les 5 "q-tangles" élémentaires, non orientés, munis des parenthèsages ((**)*), suivants :

$R_{1,2} =$, $R_{1,2}^{-1} =$, $R_{2,3} =$, $R_{2,3}^{-1} =$, $A_{1,2}$

Notons que $R_{1,2}$, $R_{2,3}$ et leurs inverses engendrent le groupe d'Artin $B_3 \subset \mathcal{T}_3$ (groupe des tresses à trois brins).
Dans ce qui suit, si A est une $\mathbb{Q}$-algèbre, $< A >$ désigne l'algèbre complétée

de $A \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$ pour la graduation. Pour le choix d'un associateur horizontal (élément de $< A_3^h >$), on note $\widehat{Z} : \mathcal{T}_3 \longrightarrow < \widehat{A}_3 >$ l'application induite par l'invariant universel de Vassiliev-Kontsevich (cf [LM1]) et $\widetilde{Z} : \mathcal{T}_3 \longrightarrow < A_3 >$. On note encore $\widetilde{Z}$ l'invariant d'entrelacs en bande non orientés à valeurs dans A_0 (cet invariant est à coefficients rationnels car indépendant du choix de l'associateur (cf [LM1])).
Remarquons que par restriction, $\widehat{Z}$ induit une représentation

$$Z^h : B_3 \longrightarrow < A_3^h >$$

Lemme 5.1 *Il existe un unique morphisme d'algèbre $g : A_3^h \longrightarrow A_3'$ envoyant $r \otimes i$ sur $r'_{1,2}$ et les deux transpositions $\tau_{(1,2)}$ et $\tau_{(2,3)}$ de $\mathfrak{S}_3 \subset A_3^h$ sur respectivement $s'_{1,2}$ et $s'_{2,3}$. De plus, l'application naturelle $A_3^h \longrightarrow A_3$ se factorise en $f \circ g$.*
Ainsi, on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc} B_3 & \xrightarrow{Z^h} & < A_3^h > & \xrightarrow{g_*} & < A_3' > \\ \cap & & \cap & & f_* \downarrow \\ \mathcal{T}_3 & \xrightarrow{\widehat{Z}} & < \widehat{A}_3 > & \xrightarrow{\widetilde{D}_*} & < A_3 > \end{array}$$

De plus, les projections sur chaque facteur de $g_* \circ Z^h$ donnent des représentations simples de B_3 dans $GL_n(K, K)$.

Démonstration. On a la présentation bien connue de A_3^h comme l'algèbre engendrée par les trois éléments $r_{1,2} = r \otimes i$, $r_{2,3} = i \otimes r = \tau_{(1,3)}(r \otimes i)\tau_{(1,3)}$ et $r_{1,3} = \tau_{(2,3)}(r \otimes i)\tau_{(2,3)}$, soumis à l'unique condition : $r_{1,2} + r_{1,3} + r_{2,3}$ est central. D'où l'existence de g car on vérifie aisément que

$$\begin{array}{l} r'_{1,2} + s'_{(2,3)} r'_{1,2} s'_{(2,3)} + s'_{(1,3)} r'_{1,2} s'_{(1,3)} = \\ \alpha \left((3(\delta - 1)\mathrm{Id}) \times ((\delta - 1)\mathrm{Id}) \times (\tfrac{3}{2}(\delta - 10)\mathrm{Id}) \times (9\mathrm{Id}) \times (27\mathrm{Id}) \times (-9\mathrm{Id}) \right) \end{array}$$

Ensuite, remarquons que les représentations en question sont en fait à valeurs dans $GL_n(R, R)$. Nous savons que l'image $R'_{1,2}$ de $R_{1,2}$ par $g_* \circ \widetilde{Z}^h$ est donnée par $s'_{1,2} e^{-\frac{1}{2} r'_{1,2}}$. L'associateur étant égal à 1 en degré 0, l'image $R'_{2,3}$ de $R_{2,3}$ est donnée en degré nul par $s'_{2,3}$.
On peut d'abord remarquer que ${R'_{1,2}}^2 = {R'_{2,3}}^2 = 1$ modulo α. Ainsi ces représentations de B_3 induisent des représentations de $\mathfrak{S}_3$. On vérifie aisément que sur les deux termes correspondant aux matrices (2×2) cette représentation est la représentation simple standard (associé au tableau de Young $[2, 1]$).
Pour les deux premiers facteurs, il existe une base (v_1, v_2, v_3, v_4) de $\overline{R}^4$ (respectivement (v_1, v_2, v_3) de $\overline{R}^3$) dans laquelle la projection de $R'_{1,2}$ sur le premier

facteur (respectivement sur le deuxième facteur) est diagonale et a des valeurs propres distinctes. Ainsi si un sous espace propre V de K^4 (resp. K^3) est stable par $g_* \circ \widetilde{Z}^h(B_3)$, il se décompose en la somme directe de droites $\bigoplus_{j\in J} K.v_j$. Par suite $\overline{V} = \bigoplus_{j\in J} \overline{R}.v_j$ est aussi stable par $g_* \circ Z^h(B_3)$. Maintenant, on calcule les matrices des deux premiers facteurs de $R'_{2,3}$ modulo α dans les bases (v_i) :

$$\frac{1}{2}\frac{1}{\delta\gamma}\begin{bmatrix} 2\gamma & 6\gamma(\delta-1) & 2\gamma(\delta-1)(\delta-10) & -2\gamma(\delta+2)(\delta-1) \\ -2\delta & -2\delta(\delta-7) & -6\delta(\delta-10) & -2\delta(\delta+2) \\ \delta & 9\delta & \delta(\delta+2) & \delta(\delta+2) \\ -\gamma & 3\gamma & \gamma(\delta-10) & \gamma(\delta-2) \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{2}\frac{1}{\gamma}\begin{bmatrix} 12 & -2(\delta-10)(\delta-28) & -2(\delta-10) \\ -1 & -(\delta-4) & 1 \\ -\gamma & (\delta-28)\gamma & -\gamma \end{bmatrix}$$

(ici, γ désigne le polynôme $\delta - 16$). Et l'existence d'un sous-B_3-module de type $\overline{V}$ apparaît clairement impossible. □

Introduisons les deux éléments suivants de R :

$$X = e^{-\frac{1}{2}(\delta-1)\alpha} \qquad Y = e^{\frac{3}{2}\alpha}$$

Proposition 5.5 *La représentation $g_* \circ Z^h$ de B_3 dans $GL_4(K) \times GL_3(K) \times GL_2(K) \times GL_2(K) \times GL_1(K) \times GL_1(K)$ est équivalente (via la conjugaison par un élément inversible P) à celle donnée par*

$$R''_{1,2} = \left(\begin{bmatrix} X^3 & -XY^2(1-XY+X^2Y^2) & -Y^{-3}(1-XY+X^2Y^2) & Y \\ 0 & -XY^2 & (XY-1)Y^{-3} & Y \\ 0 & 0 & -Y^{-3} & Y \\ 0 & 0 & 0 & Y \end{bmatrix}, \right.$$

$$\begin{bmatrix} -Y^2X & Y^6X - Y^{-3} & -Y^{-3} \\ 0 & -Y^{-3} & -Y^{-3} \\ 0 & 0 & Y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -Y^2X & -Y^2X \\ 0 & Y \end{bmatrix},$$

$$\left. \begin{bmatrix} -Y^{-3} & -Y^{-3} \\ 0 & Y \end{bmatrix}, -Y^{-3}, Y \right)$$

et

$$R''_{2,3} = \left(\begin{bmatrix} Y & 0 & 0 & 0 \\ Y^{-3} & -Y^{-3} & 0 & 0 \\ Y & (YX-1)Y & -Y^2X & 0 \\ Y^{-3} & -Y^{-3}(1-YX+X^2Y^2) & -XY^{-2}(1-XY+X^2Y^2) & X^3 \end{bmatrix}, \right.$$

$$\left[\begin{array}{ccc} Y & 0 & 0 \\ Y^{-3} & -Y^{-3} & 0 \\ -Y^{-3} & -Y^6X+Y^{-3} & -Y^2X \end{array}\right], \left[\begin{array}{cc} Y & 0 \\ -Y & -Y^2X \end{array}\right],$$
$$\left[\begin{array}{cc} Y & 0 \\ -Y & -Y^{-3} \end{array}\right], -Y^{-3}, Y\Bigg)$$

De plus, soit

$$A''_{1,2} = \Bigg(\left[\begin{array}{cccc} -\frac{(X^3-Y)(1+XY)(X^2+Y^2)}{X^3(Y^4-1)} & \frac{Y^2(X^3-Y)(1+X^3Y^3)}{X^3(Y^4-1)} & \frac{(X^3-Y)(X+Y^3)}{X^2(Y^4-1)} & Y^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right], 0, 0, 0, 0, 0\Bigg)$$

Alors on a aussi

$$\widetilde{Z}(A_{1,2}) = f_*(P^{-1}A''_{1,2}P)$$

Démonstration. Justifions d'abord la forme de $R''_{1,2}$ et $R''_{2,3}$:
Dans [TW], il est établi qu'il existe à conjugaison près, une unique représentation simple du groupe B_3 dans $GL_n(k)$, où k est un corps algébriquement clos, pour $n \leq 3$, une fois fixé la liste $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in K^n$ des valeurs propres des tresses élémentaires. Ceci donne le résultat annoncé pour les 5 derniers facteurs.
Pour le premier facteur, la représentation de B_3 est déterminé par le choix d'une racine carrée $\frac{\epsilon}{XY}$ de $\frac{\lambda_2\lambda_3}{\lambda_1\lambda_4} = \frac{1}{X^2Y^2}$ (cf [TW]). Or nous savons que la représentation de B_3 induite par $g_* \circ \widetilde{Z}^h$ sur le premier facteur est en fait à valeur dans $M_4(R)$ et qu'elle envoie $R_{1,2}$ sur une matrice diagonalisable dans $M_4(\overline{R})$. Les espaces propres de l'image de $R_{1,2}$ par les représentations correspondantes à $\epsilon = 1$ et $\epsilon = -1$ sont de la forme $(\overline{R}v_i)_{i=1\ldots4}$ et le calcul donne pour $\epsilon = 1$, $\det(v_1, v_2, v_3, v_4) \in \alpha^2\overline{R}$, donc $R_{1,2}$ n'est alors pas diagonalisable dans $M_4(\overline{R})$. Ceci implique que la représentation de B_3 induite par $\widetilde{Z}'$ sur le premier facteur est équivalente à celle obtenue pour $\epsilon = -1$.

D'autre part, $\widetilde{Z}(A_{1,2})$ est envoyé sur $\varphi a'_{1,2} = \varphi f(\delta p_{X^3})$ où p_{X^3} est le projecteur sur l'espace propre de $R'_{1,2}$ associé à la valeur propre X^3 et $\varphi \in R^*$. Or, on a dans $\mathcal{T}_3$ l'identité $A_{1,2}R_{1,2}R_{2,3}A_{1,2} = A_{1,2}$ qui donne
$f_*(a'_{1,2}R'_{1,2}R'_{2,3}a'_{1,2}) = \varphi^{-1}f_*(a'_{1,2})$ ce qui permet de déterminer $\Delta = \delta\varphi$:

$$\Delta = \frac{(Y-X^3)(1+YX)(X^2+Y^2)}{X^3(Y^4-1)}$$

On a bien sur choisi $A''_{1,2} = \Delta p''_{X^3}$ où p''_{X^3} est le projecteur sur l'espace propre de $R''_{1,2}$ associé à la valeur propre X^3.

Remarques :

- Δ/δ est bien un élément inversible de R car $(Y^4 - 1) \in \alpha R^*$ et $(Y - X^3) = e^{\frac{3}{2}\alpha}(1 - e^{\frac{3}{2}\alpha\delta}) \in \alpha\delta R^*$
- A cause de la possible torsion dans $\widehat{\mathcal{A}}$, l'équation vérifiée par φ ne permet de le déterminer qu'à un élément près, dont le produit par δ est nul dans A_0).

□

Corollaire :

L'invariant d'entrelacs non orientés $\widetilde{Z}$ à valeurs dans A_0 vérifie les relations "skein" de la figure 1 et annule les éléments des figures 2 et 3.
De plus, $\widetilde{Z}(L \amalg L') = \widetilde{Z}(L)\widetilde{Z}(L')$ et si on note S l'involution de $\widetilde{\mathcal{A}}(X_1, X_2)$ obtenue en envoyant α sur $-\alpha$ et multipliant par $(-1)^n$ un diagramme de degré $n - \frac{1}{2}\text{cardinal}(X_2)$, alors l'image par $\widetilde{Z}$ de l'image miroir d'un entrelacs L est donnée par $S_*(\widetilde{Z}(L))$. En particulier on obtient des relations "skein" encore vérifiée par $\widetilde{Z}$, à partir de celles citées, en changeant X en $S_*(X) = X^{-1}$, Y en $S_*(Y) = Y^{-1}$ et en inversant tous les croisements.

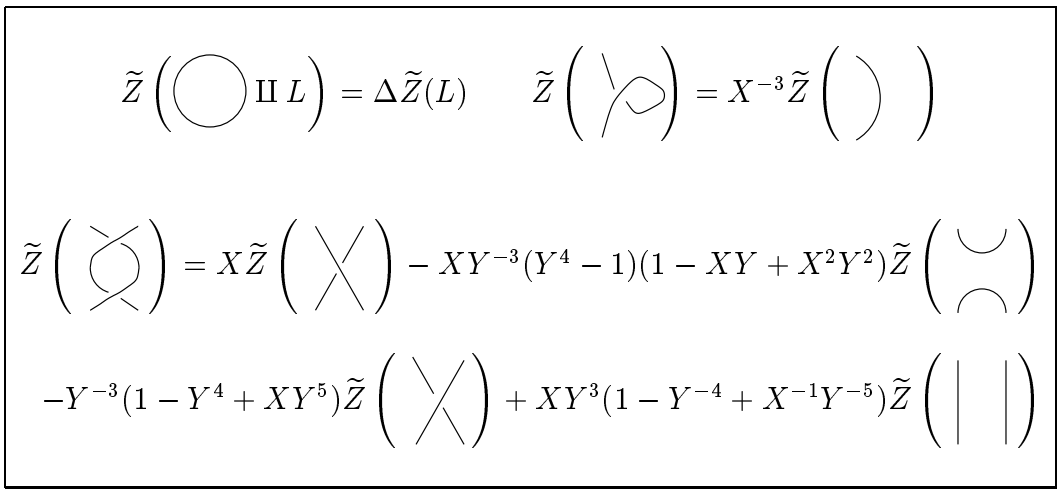


FIG. 1 – Relations "skein" pour $\widetilde{Z}$

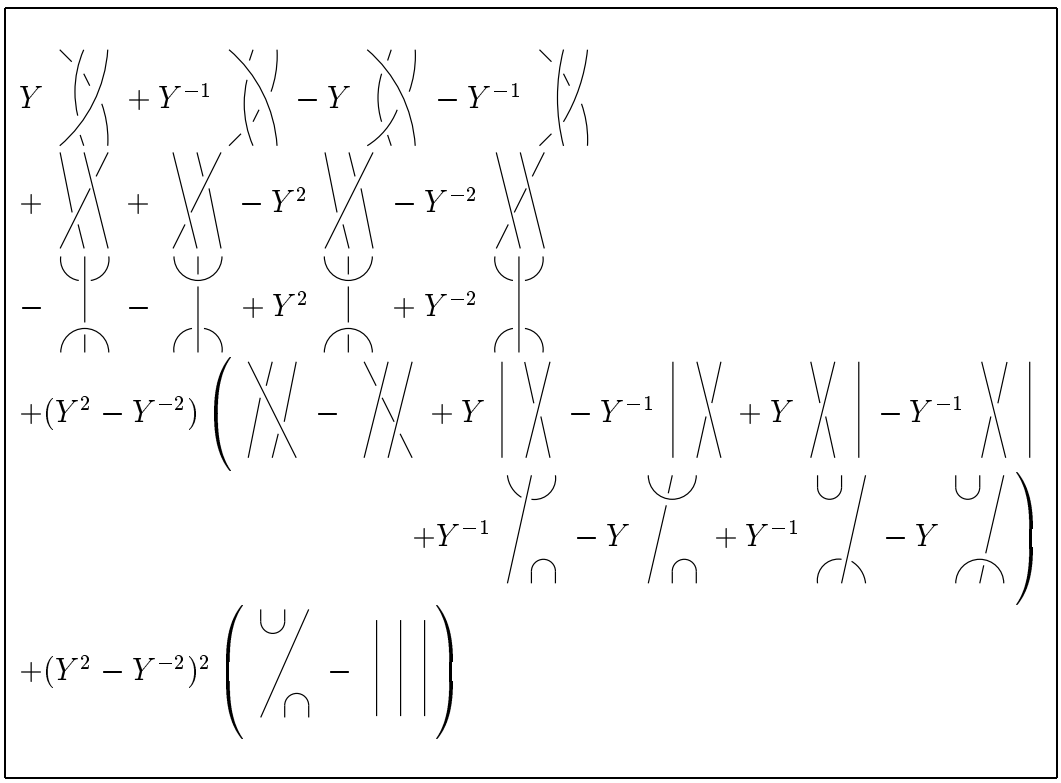


FIG. 2 – Relation "skein" pour $\widetilde{Z}$

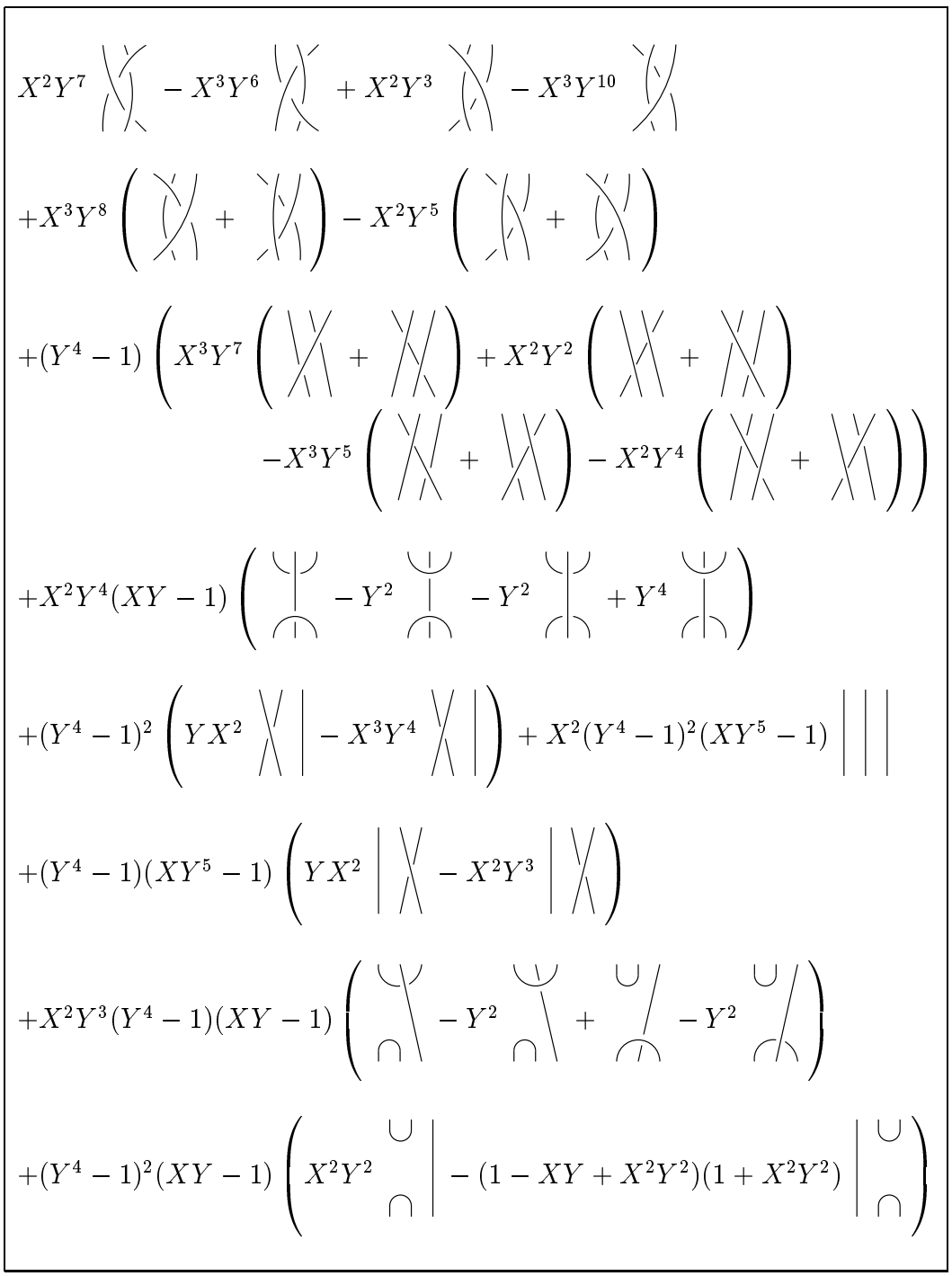


FIG. 3 – Relation "skein" pour $\widetilde{Z}$

Remarque :

Tout d'abord, il est clair que $\widetilde{Z}$ factorise tous les invariants d'entrelacs en bande induits par les représentations e des algèbres l de la liste 9. En particulier, les exemples donnés section 7 permettent de retrouver, en posant $X = q^{-2}$ et $Y = q$, les exemples de calculs de [BS1] pour l'invariant $I_{\mathfrak{g}_2,v}$.
Ensuite, il n'est malheureusement pas clair (et sans doute faux) que tout entrelacs se réduit par les relations "skein" données à une fonction fraction rationnelle en X et Y.
En fait, il semble très difficile de décrire A_0. On ne peut à priori dire si l'application $R \longrightarrow A_0$ est injective ou si elle est surjective. Si elle est injective, cela implique que les variables X et Y sont algébriquement indépendantes. Il me semble raisonnable de faire la conjecture suivante :
Conjecture : Il existe un invariant d'entrelacs en bande à valeurs dans l'anneau des fonctions fractions rationnelles en X et Y vérifiant les relations "skein" ci-dessus et factorisant $\widetilde{Z}$.

6 Le cas de spin_7

Nous nous intéressons particulièrement au cas de la représentation spin_7 de $\mathfrak{so}_7$ pour les raisons suivantes :

- Il n'existe pas à ma connaissance de moyen de calculer les invariants d'entrelacs provenant des représentations spinales de $\mathfrak{so}_n$. En effet, les invariants construits à l'aide du polynôme de Kauffman (cf [Ka]) permettent seulement de calculer les invariants d'entrelacs provenant des représentations de $\mathfrak{so}_n$ qui apparaissent comme facteurs de la décomposition en modules simples des puissances tensorielles de la représentation standard. Ce n'est pas le cas pour les représentations spinales.

- Ce cas correspond à la ligne $n^o 7$ de la liste 9. Les calculs des relations "skein" se déduiront de la connaissance de $\widetilde{Z}'$ et des propriétés de $\widetilde{\Phi}_{\mathfrak{so}_7,\mathrm{spin}_7}$. Il se trouve que l'algèbre $\mathrm{Mod}_{\mathfrak{so}_7}(\mathrm{spin}_7^{\otimes 3}, \mathrm{spin}_7^{\otimes 3})$ est de dimension 30, ce qui implique que $Z_{\mathrm{spin}_7} = \widetilde{\Phi}_{\mathfrak{so}_7,\mathrm{spin}_7} \circ \widetilde{Z}$ vérifie des relations "skein" supplémentaires. Nous allons calculer ces relations et montrer qu'elles suffisent au calcul de l'invariant.

Tout d'abord, posons

$$W = e^{-\frac{1}{2}\alpha}$$

Ainsi $\widetilde{\Phi}_{\mathfrak{so}_7,\mathrm{spin}_7}(X) = W^7$ et $\widetilde{\Phi}_{\mathfrak{so}_7,\mathrm{spin}_7}(Y) = W^{-3}$. Ensuite nous avons le

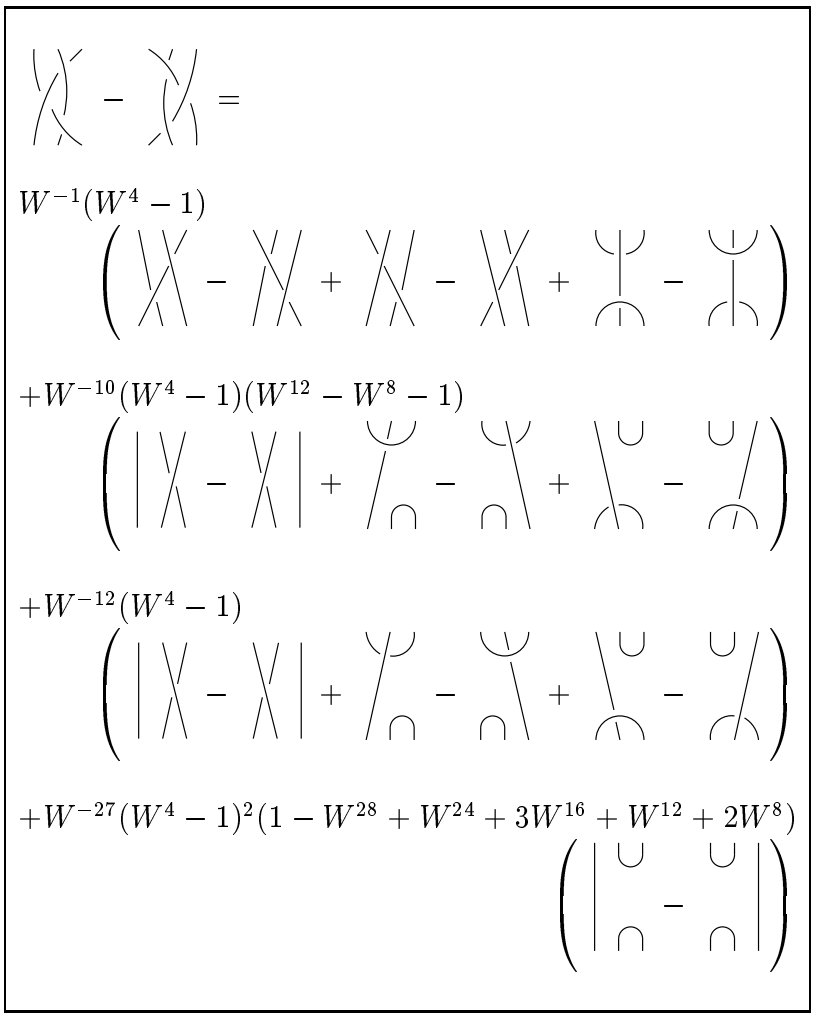


FIG. 4 – Relation "skein" pour Z_{spin_7}

Lemme 6.1 *La composition de l'application f de la proposition 5.5 avec $\widetilde{\Phi}_{\mathfrak{so}_7,spin_7}$ est nulle sur les quatrième et cinquième facteurs de $M_4(\mathbb{Q}[\delta,\alpha]) \times M_3(\mathbb{Q}[\delta,\alpha]) \times M_2(\mathbb{Q}[\delta,\alpha]) \times M_2(\mathbb{Q}[\delta,\alpha]) \times M_1(\mathbb{Q}[\delta,\alpha]) \times M_1(\mathbb{Q}[\delta,\alpha])$.*

Corollaire :

L'invariant d'entrelacs non orientés Z_{spin_7} à valeurs dans les séries entières à coefficients rationnels en α vérifie la relation "skein" supplémentaire de la figure 4.

Proposition 6.1 *L'invariant Z_{spin_7} est complètement déterminé par les relations "skein" énoncées. De plus il prend ses valeurs dans l'anneau $\mathbb{Z}[W,W^{-1}]$.*

Démonstration. Tout d'abord rappelons les relations provenant $\widetilde{Z}$:

$$Z_{\mathrm{spin}_7}(\Delta) = W^{-18}(1+W^4)(1+W^{12})(1+W^{20}) \tag{11}$$

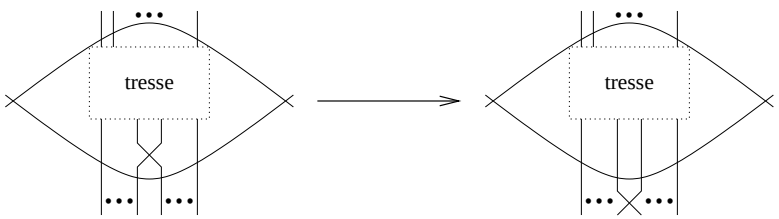
$$Z_{\mathrm{spin}_7}\left(\begin{array}{c}\diagdown\\ \diagup\!\!\supset\end{array}\right) = W^{-21} Z_{\mathrm{spin}_7}\left(\begin{array}{c}\supset\\ \supset\end{array}\right) \tag{12}$$

$$\begin{aligned} Z_{\mathrm{spin}_7}\left(\begin{array}{c}\diagdown\diagup\\ \diagup\diagdown\end{array}\right) &= W^7 Z_{\mathrm{spin}_7}\left(\begin{array}{c}\diagdown\diagup\\ \diagup\diagdown\end{array}\right) \\ &+ W^4(W^{24}-1)(1+W^4)^{-1} Z_{\mathrm{spin}_7}\left(\begin{array}{c}\cup\\ \cap\end{array}\right) \\ &- W^{-15}(1+W^{-8}-W^{-12}) Z_{\mathrm{spin}_7}\left(\begin{array}{c}\diagdown\diagup\\ \diagup\diagdown\end{array}\right) \\ &+ W^{-2}(1+W^8-W^{12}) Z_{\mathrm{spin}_7}\left(\begin{array}{c}|\ \ |\end{array}\right) \end{aligned} \tag{13}$$

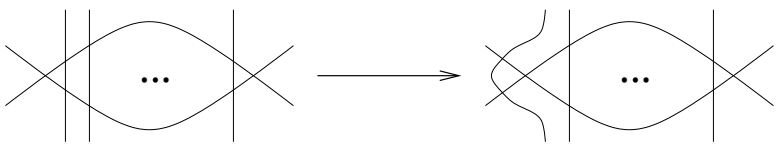
Remarquons que tous les coefficients intervenant dans les différentes relations "skein" sont dans $\mathbb{Z}[W,W^{-1}]$.

Si deux segments disjoints d'un entrelacs L de graphe $G(L) \in \mathcal{G}$ ne s'intersectent qu'à leurs deux extrémités dans le graphe $G(L)$, on appelle œil de $G(L)$ le sous-graphe inclus dans la partie du plan, homéomorphe à un disque, délimitée par la réunion des deux segments. Un œil est minimal s'il ne contient pas d'autres yeux que lui même. Si $G(L)$ ne contient pas d'yeux,

alors son invariant peut être calculer par les relations 11 et 12.
Il est facile de se rendre compte que si l'intérieur strict d'un œil minimal n'est pas isotope à une tresse, il contient un sous-graphe pouvant être réduit par les relations 11 ou 12. Si l'intérieur de l'œil est vide, par un mouvement de Reidmester de type II ou en utilisant la relation 13, on se ramène au calcul de l'invariant pour un graphe ayant un nombre strictement inférieur de croisements. Si l'intérieur de l'œil est une tresse obtenue comme le produit $\sigma_1 \dots \sigma_n$ de n tresses élémentaires, par un mouvement de Reidmester de type III ou par la relation figure 4, il est possible de se ramener au calcul de l'invariant pour des graphes ayant moins de croisements et pour un graphe ayant le même nombre de croisements mais contenant un œil dont l'intérieur est isotope à la tresse $\sigma_2 \dots \sigma_n$:



En réitérant ce processus n fois, on se ramène au cas ou l'intérieur de l'œil est formé de k brins verticaux. Ensuite, toujours par un mouvements de Reidmester de type III ou par la relation figure 4, il est possible se ramener au calcul de l'invariant pour des graphes ayant moins de croisements et pour un graphe ayant le même nombre de croisements mais contenant un œil dont l'intérieur est composé de $k-1$ brins verticaux :



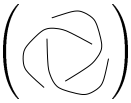
En répétant k fois ce processus, on se ramène au cas où le graphe contient un œil vide et donc à calculer l'invariant de graphes ayant un nombre strictement inférieur de croisements. □

7 Exemples de calculs

En fait les relations de la figure 1 suffisent pour calculer les invariants sur des entrelacs assez simples. Il est même possible que ces relations suffisent à déterminer totalement l'invariant $\widetilde{Z}$. Si c'est le cas alors une partie de la conjecture sur les valeurs de $\widetilde{Z}$ en découle.

$$\widetilde{Z}\left(\bigcirc\right) = \Delta = \frac{(Y-X^3)(1+YX)(X^2+Y^2)}{X^3(Y^4-1)}$$

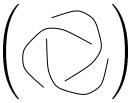
$$\widetilde{Z}\left(\bigcirc\!\!\bigcirc\right) = \Delta\frac{(1+X^2Y^2)((1-X^4)(Y^8-Y^4+1)+XY^3(X^2-Y^2))}{X^3Y^3(Y^4-1)}$$

$$\widetilde{Z}\left(\text{  }\right) = \Delta(-X^6Y^3+X^4Y^5+X^5Y^2-X^3Y^4+X^6Y^{-1}-X^4Y+X^2Y^3-Y^5$$
$$-X^5Y^{-2}+2X^3-2XY^2+X^{-1}Y^4+X^4Y^{-3}-2X^2Y^{-1}+Y-X^3Y^{-4}+XY^{-2}$$
$$-X^{-1}+Y^2X^{-3}+X^{-2}Y^{-1}-Y^{-3}-XY^{-6}+X^{-1}Y^{-4}+X^{-3}Y^{-6})$$

$$\widetilde{Z}\left(\text{ }\right) = \Delta(X^6Y^6-X^4Y^8-X^5Y^5+X^3Y^7-X^6Y^2+2X^4Y^4-2X^2Y^6+Y^8$$
$$+2X^5Y-4X^3Y^3+3XY^5-Y^7X^{-1}+X^6Y^{-2}-3X^4+5X^2Y^2+Y^6X^{-2}-4Y^4$$
$$-X^5Y^{-3}+4X^3Y^{-1}-6XY+5Y^3X^{-1}-2Y^5X^{-3}+2X^4Y^{-4}-5X^2Y^{-2}$$
$$+7-5Y^2X^{-2}+2Y^4X^{-4}-2X^3Y^{-5}+5XY^{-3}-6X^{-1}Y^{-1}+4YX^{-3}$$
$$-Y^3X^{-5}+X^2Y^{-6}+5X^{-2}Y^{-2}-3X^{-4}+Y^2X^{-6}-4Y^{-4}-XY^{-7}$$
$$+3X^{-1}Y^{-5}-4X^{-3}Y^{-3}+2X^{-5}Y^{-1}-2X^{-2}Y^{-6}+2X^{-4}Y^{-4}$$
$$-X^{-6}Y^{-2}+Y^{-8}+X^{-3}Y^{-7}-X^{-5}Y^{-5}-X^{-4}Y^{-8}+X^{-6}Y^{-6})$$

Ces calculs spécialisés par Z_{spin_7} donnent :

$$Z_{\mathrm{spin}_7}\left(\bigcirc\!\!\bigcirc\right) = \frac{\Delta}{W^{24}}(1-W^8+W^{16})(1+W^{16})(W^8+1)^2$$

$$Z_{\mathrm{spin}_7}\left(\text{  }\right) = \Delta\left(W^{27}+W^{19}-W^{15}+W^{11}-W^7+2W^3-2W^{-1}+2W^{-5}\right.$$
$$-2W^{-9}+2W^{-13}-2W^{-17}+2W^{-21}-2W^{-25}+W^{-29}-2W^{-33}+W^{-37}$$
$$\left.-W^{-41}+W^{-45}\right)$$

$$Z_{\mathrm{spin}_7}\left(\text{ }\right) = \Delta\left(W^{48}-W^{44}+2W^{40}-3W^{36}+3W^{32}-4W^{28}+6W^{24}\right.$$
$$-6W^{20}+7W^{16}-8W^{12}+8W^8-9W^4+9-9W^{-4}+8W^{-8}-8W^{-12}+7W^{-16}$$
$$\left.-6W^{-20}+6W^{-24}-4W^{-28}+3W^{-32}-3W^{-36}+2W^{-40}-W^{-44}+W^{-48}\right)$$

Références

[BN] D. Bar-Natan - *On the Vassiliev knot invariants*, Topologie 34 n^0 2 1995, 423-472.

[BS1] A.B. Berger, I. Stassen - *The skein relation for the $(\mathfrak{g}_2, V)$-link invariant*, Comment. Math. Helv. 75 (2000), no. 1, 134–155.

[BS2] A.B. Berger, I. Stassen - *Skein relations for the link invariants coming from exeptional Lie algebras*, J. Knot Theory Ramifications 8 (1999), no. 7, 835–853.

[CM] A.M. Cohen, R. de Man - *Computational evidence for Deligne's conjecture regarding exceptional Lie groups*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 322 (1996), no. 5, 427–432.

[CDK] S.V. Chmutov, S.V. Duzhin, A.I. Kaishev - *The algebra of 3-graphs*, Tr. Mat. Inst. Steklova 221 (1998), 168–196.

[D] P. Deligne - *La série exceptionnelle de groupes de Lie*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 322 (1996), no. 4, 321–326.

[DM] P. Deligne, R. de Man - *La série exceptionnelle de groupes de Lie. II.* C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 323 (1996), no. 6, 577–582.

[FKV] J.M. Figueroa-O'Farrill, T. Kimura, A. Vaintrob - *The universal Vassiliev invariant for the Lie superalgebra* $\mathfrak{gl}(1,1)$, Comm. Math. Phys. 185 (1997), no. 1, 93-127.

[H] P. Freyd, J. Hoste, W.B.R. Lickorish, K. Millet, A. Ocneanu and D. Yetter - *A new polynomial invariant of knots and links*, Bull. Amer. Math. Soc. 12 1985, 239-246.

[J] V.F.R. Jones - *A polynomial invariant of knots via Von Neumann algebras*, Bull. Amer. Math. Soc. 12 1985, 103-111.

[Ka] L.H. Kauffman - *An invariant of regular isotopy*, Trans. Amer. Math. Soc. 312 1990, 417-471.

[Kac] V.G.Kac - *Lie superalgebras*, Advances in math. 26 1977, 8-96.

[Kn1] J.A. Kneissler - *Relations in the algebra* Λ, preprint (oct. 1997).

[Kn2] J.A. Kneissler - *The number of primitive Vassiliev invariants up to degree twelve*, preprint (juin 1997).

[LiE] A.M. Cohen, M.A.A. van Leeuwen, B. Lisser - *LiE, a package for lie group computations*, CAN. Amsterdam 1992.

[LM1] T.T.Q. Le, J. Murakami - *Kontsevich's integral for the Kauffman polynomial*, Nagoya Math. J. 142 (1996), 39–65.

[LM2] T.T.Q. Le, J. Murakami - *The universal Vassiliev-Kontsevich invariant for framed oriented links*, Compositio Math. 102 (1996), no. 1, 41-64.

[LM3] T.T.Q. Le, J. Murakami, - *Representation of the category of tangles by Kontsevich's iterated integral*, Comm. Math. Phys. 168 (1995), no. 3, 535–562.

[Se] A. Sergeev - *The invariant polynomials on simple Lie superalgebras*, preprint (oct. 1998).

[TW] I. Tuba, H. Wenzl - *Representations of the braid group B_3 and of $SL(2,\mathbb{Z})$*, preprint (1999) à paraître dans Pacific Journal of Mathematics.

[Va] V. Vassiliev- *Cohomology of knot spaces, Theory of singularities and its applications* (V.I. Arnold, ed), Amer. Math. Soc., Providence 1990.

[Vo1] P. Vogel- *Invariants de Vassiliev des nœuds*, Sém. Bourbaki, 1992-93, Astérisque 216 1993, 213-232.

[Vo2] P. Vogel- *Algebraic structures on modules of diagrams*, preprint à paraître dans Inventiones Mathematicae.