Probabilité de survie d'un processus de branchement en environnement aléatoire markovien

d'après la thèse de Yinna YE

Laboratoire de Mathématiques et Physique Théorique
Fédération Denis Poisson
Université François Rabelais Tours

Ile de Berder, 29 septembre 2011

Table des matières

Modèle (1)

Définition

Un **processus de Galton-Watson (ou processus de branchement homogène)** $(Z_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov sur $\mathbb{N}$ dont la probabilité de transition est donnée par: $\forall k, l \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(Z_{n+1} = l \mid Z_n = k) = \begin{cases} p^{*k}(l) & \text{si } k \geq 1 \\ \delta_{0,l} & \text{si } k = 0, \end{cases}$$

où

- $p := (p(l))_{l\geq 0}$ est une probabilité sur $\mathbb{N}$, telle que $p_0 + p_1 < 1$ et $p_k \neq 1$, $\forall k \geq 0$;
- $\delta_{k,l} = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq l, \\ 1 & \text{si } k = l; \end{cases}$
- p^{*k} désigne la k-ème puissance de convolution de la probabilité p

Le processus de Galton-Watson a été initialement introduit par Francis Galton en 1873 pour étudier l'extinction des noms de familles nobles britanniques.
Les variables $X_{n,i}, n \geq 1, i \geq 0$ sont indépendantes et de même loi p :

- la variable $X_{n,i}$ représente le nombre de fils de l'individu i de la génération n
- la variable $Z_n = \sum_{i=1}^{Z_n - 1} X_{n,i}, n \geq 1$, est la taille de la génération n (avec la convention $Z_0 = 1$)

Formulation générale

- Soit g la fonction génératrice de la loi de probabilité p définie par :

$$\forall s \in [0,1] \quad g(s) = \sum_{k=0}^{+\infty} s^k p(k).$$

Dans la suite, on note G le semi-groupe des fonctions génératrices des lois de probabilité sur $\mathbb{N}$.

- La fonction génératrice g_n de Z_n est la puissance n-ième de composition de g :

$$\forall s \in [0,1] \quad g_n(s) = \mathbb{E}(s^{Z_n}) = \underbrace{g \circ \cdots \circ g}_{n \text{ fois}}(s).$$

- On suppose que les variables $X_{n,i}$ ont (au moins) des moments d'ordre 2 et on pose

$$m := \mathbb{E}(X_{n,i}) = g'(1) \text{ et } \sigma^2 := Var(X_{n,i}) = g''(1) + m - m^2.$$

Résultats connus

Théorème

- *Cas critique et sous-critique : si $m \leq 1$ alors $\mathbb{P}(\lim_{n\to+\infty} Z_n = 0) = 1$;*
- *Cas sur-critique : si $m > 1$ alors $\mathbb{P}(\lim_{n\to+\infty} Z_n = 0) < 1$.*

Théorème (A. Kolmogorov 1938)

Supposons que la v.a. Z_1 est de carré intégrable.

1. *Cas critique : si $m = 1$, alors $\mathbb{P}(Z_n > 0) \sim \dfrac{2}{n\sigma^2}$.*
2. *Cas sous-critique : si $m < 1$, il existe $c > 0$ tel que*

$$\mathbb{P}(Z_n > 0) \sim Cm^n.$$

Présentation de l'environnement markovien (1)

Soient E un ensemble fini à $N \geq 1$ éléments et $X := (X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov **irréductible et apériodique** sur E; on note $P = (p_{i,j})_{i,j\in E}$ sa matrice de transition et $\nu := (\nu_1, \cdots, \nu_N)$ l'unique mesure de probabilité P-invariante sur E.

- On considère une famille $F = F(i, j, \cdot)_{i,j\in E}$ de mesures de probabilités sur G.
- On pose $\widetilde{E} = G \times \mathbb{R} \times E$ et $\mathfrak{G} = \mathcal{B}(G) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{P}(E)$.

Présentation de l'environnement markovien (2)

- Pour toute suite de fonctions génératrices $(g_k)_{k\geq 0}$ telle que $0 < g_k'(1) < +\infty$ pour tout $k \geq 0$, on fixe S_0 et on pose

$$S_n = S_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \ln g_k'(1), \quad n \geq 1.$$

- La suite $(\widetilde{M}_n)_{n\geq 0} = (g_n, S_n, X_n)_{n\geq 0} \in \widetilde{E}^{\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov de probabilité de transition Q définie par: $\forall (g, x, i) \in \widetilde{E}$, $\forall A \in \mathcal{B}(G) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et $\forall j \in E$,

$$Q\{(g, x, i), (A \times \{j\})\} = p_{i,j} \int_G 1_A[(h, x + \ln g'(1))] F(i, j, \mathrm{d}h).$$

Présentation de l'environnement markovien (3)

Pour simplifier les notations, nous noterons $\mathbb{P}_i$ la mesure de probabilité $\mathbb{P}_{(id,0,i)}$ et $\mathbb{E}_i$ l'espérance qui lui correspond.
La chaîne de Markov $(\tilde{M}_n)_{n\geq 0}$ est **l'environnement markovien** du processus de Galton-Watson.

Remarque

1. *Dans le cas où l'ensemble E est réduit à un point, le processus de branchement $(Z_n)_{n\geq 0}$ est dans un* **environnement i.i.d**; *cela revient à choisir une probabilité produit $Q^{\otimes\mathbb{N}}$ sur $G^{\mathbb{N}}$.*
2. *Lorsqu'on munit $G^{\mathbb{N}}$ d'une mesure ergodique et stationnaire pour l'opérateur de décalage, on parle d'***environnement stationnaire ergodique**.

Cas d'un environnement i.i.d : le cas critique

Théorème

Cas critique [J. Geiger & G. Kersting (2000)], [Y. Guivarc'h, E. Le Page & Q. Liu (2003)] Supposons que $\mathbb{E}\left[\left(\frac{g_0''(1)}{g_0'(1)^2}\right)^{\varepsilon}\right] < +\infty$ *et*

$$0 < \mathbb{E}[\ln g_0'(1)]^2 < +\infty \quad \text{avec} \quad \mathbb{E}[\ln g_0'(1)] = 0.$$

Il existe alors $c \in]0, +\infty[$ *tel que*

$$\mathbb{P}(Z_n > 0) \sim \frac{c}{\sqrt{n}} \quad \textit{lorsque } n \to +\infty.$$

But: Étendre ce résultat dans le cas où $(Z_n)_{n\geq 0}$ est un processus de branchement critique en environnement markovien.

Cas d'un environnement i.i.d : le cas sous-critique

Dans le cas sous-critique, les mêmes auteurs ont établi le résultat suivant :

Théorème

Sous des hypothèses de moment ad hoc, avec $\mathbb{E}[\ln g_0'(1)] < 0$, on a

- *cas fortement sous-critique : si $\mathbb{E}[g_0'(1) \ln g_0'(1)] < 0$ il existe une constante $c \in]0, +\infty[$ tel que $\mathbb{P}(Z_n > 0) \sim c(\mathbb{E}Z_1)^n$.*
- *cas intermédiairement sous-critique : si $\mathbb{E}[g_0'(1) \ln g_0'(1)] = 0$ il existe $c \in]0, +\infty[$ tel que $\mathbb{P}(Z_n > 0) \sim c(\mathbb{E}Z_1)^n n^{-1/2}$.*
- *cas faiblement sous-critique : si $\mathbb{E}[g_0'(1) \ln g_0'(1)] > 0$ et $\mathbb{E}g_0''(1) < +\infty$, il existe $c \in]0, +\infty[$ et $\rho \in [0, 1]$ tels que $\mathbb{P}(Z_n > 0) \sim c\rho^n n^{-3/2}$.*

Hypothèses

Hypothèses (H):

- **H1** Il existe $\alpha > 0$, tel que pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ vérifiant $|\Re\lambda| \leq \alpha$, on ait,

$$\sup_{(i,j)\in E\times E} \mid \widehat{F}(i,j,\lambda) \mid < +\infty,$$

  où $\widehat{F}(i,j,\lambda) = \int_{\mathbb{R}} e^{\lambda t} F(i,j,\mathrm{d}t)$.
- **H2** Il existe $n_0 \geq 1$ et $(i_0, j_0) \in E \times E$ tels que la mesure $\mathbb{P}_{i_0}(S_{n_0} \in \mathrm{d}x, X_{n_0} = j_0)$ possède une composante absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.
- **H3** $\sum_{i,j\in E\times E} \nu_i p_{i,j} \int_{\mathbb{R}} tF(i,j,\mathrm{d}t) = 0$.

Résultat principal

Théorème (E. Le Page & Y. Ye 2010)

Sous les hypothèses (H), pour tout $(i, j) \in E \times E$, *il existe une constante* $\beta_{i,j} > 0$, *telle que*

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt{n}\, \mathbb{P}_i(Z_n > 0, X_n = j) = \beta_{i,j}.$$

Résultat principal

Théorème (E. Le Page & Y. Ye 2010)

Sous les hypothèses (H), pour tout $(i,j) \in E \times E$, *il existe une constante* $\beta_{i,j} > 0$, *telle que*

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt{n}\, \mathbb{P}_i(Z_n > 0, X_n = j) = \beta_{i,j}.$$

Pour démontrer ce théorème, il faut dans un premier temps obtenir un théorème du type " limite local" pour le minimum d'une marche de Markov sur $\mathbb{R}$.

Notations (1)

On considère une chaîne semi-markovienne $(Y_n, X_n)_{n\geq 0}$ sur $\mathbb{R} \times E$ dont le noyau de transition $\widetilde{P}$ est défini par: $\forall (x,i) \in \mathbb{R} \times E$,

$$\widetilde{P}((y,i), A \times \{j\}) \\ = \mathbb{P}(Y_{n+1} \in A, X_{n+1} = j / Y_n = y, X_n = i) = p_{i,j} F(i,j,A).$$

Notations (1)

On considère une chaîne semi-markovienne $(Y_n, X_n)_{n\geq 0}$ sur $\mathbb{R}\times E$ dont le noyau de transition $\widetilde{P}$ est défini par: $\forall (x,i)\in\mathbb{R}\times E$,

$$\begin{aligned}\widetilde{P}((y,i), A\times\{j\}) \\ = \mathbb{P}(Y_{n+1}\in A, X_{n+1}=j / Y_n = y, X_n = i) = p_{i,j}F(i,j,A).\end{aligned}$$

On fixe une variable aléatoire S_0 à valeurs dans $\mathbb{R}$ et on pose, pour $n\geq 1$

- $S_n = S_0 + Y_1 + \cdots + Y_n$;
- $m_n = \min(S_0, S_1, \cdots, S_n)$.

Notations (2)

On note enfin

$$\left(\Omega = \{\mathbb{R} \times E\}^{\mathbb{N}}, (B(\mathbb{R}) \bigotimes \mathcal{P}(E))^{\otimes \mathbb{N}}, (S_n, X_n)_{n\geq 0}, \mathbb{P}_{(x,i)}\right)$$

l'espace canonique associé à la chaîne de Markov $(S_n, X_n)_{n\geq 0}$.

Notations (2)

On note enfin

$$\left(\Omega = \{\mathbb{R} \times E\}^{\mathbb{N}}, (B(\mathbb{R}) \bigotimes \mathcal{P}(E))^{\otimes \mathbb{N}}, (S_n, X_n)_{n \geq 0}, \mathbb{P}_{(x,i)}\right)$$

l'espace canonique associé à la chaîne de Markov $(S_n, X_n)_{n \geq 0}$.

Notations:

- L'espérance correspondant à la mesure de probabilité $\mathbb{P}_{(x,i)}$ est notée $\mathbb{E}_{(x,i)}$
- La mesure $\mathbb{P}_{(0,i)}$ est notée $\mathbb{P}_i$ et l'espérance correspondante $\mathbb{E}_i$

Un cas particulier et classique

Remarque

1. *Dans le cas où l'ensemble E est réduit à un point, la suite $(Y_n)_{n\geq 0}$ devient une suite de v.a. i.i.d. de loi F.*
2. *Dans ce cas particulier, le théorème limite local (TLL) pour $(m_n)_{n\geq 0}$ est étudié par plusieurs auteurs; citons par exemple le résultat de M. V. Kozlov:*

Résultats connus (1)

Théorème (M. V. Kozlov 1976)

Si $\mathbb{E}Y_1 = 0$ *et* $0 < \mathbb{E}{Y_1}^2 < +\infty$, *alors pour tout réel* $x \geq 0$ *on a*

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt{n}\mathbb{P}(m_n \geq -x) = V(x)$$

où $V(x)$ *est une fonction harmonique strictement positive sur* $\mathbb{R}_+$ *pour la marche aléatoire centrée* $(S_n)_{n \geq 0}$ *(autrement dit,* $V(x)$ *vérifie l'égalité:*

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \ \ V(x) = \mathbb{E}V(x + Y_1)).$$

De plus, on a $V(x) \sim Cx$ *au voisinage de* $+\infty$ *et, pour tout* $\lambda > 0$,

$$\mathbb{E}(e^{\lambda m_n}) \sim \widetilde{V}(\lambda)/\sqrt{n}, \ \ n \to +\infty,$$

où l'on a posé $\widetilde{V}(\lambda) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{\lambda x} dV(x).$

Résultats connus (2)

La démonstration est basée sur l'identité de Spitzer :

$$\forall \lambda > 0, \forall n \geq 1 \quad \mathbb{E}(e^{\lambda m_n}) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{E}(e^{\lambda S_k}; T_+ > k) \, \mathbb{P}(T_{*-} > n-k),$$

où

$$T_+ := \inf\{n \geq 1 : S_n \geq 0\} \text{ et } T_{*-} := \inf\{n \geq 1, S_n < 0\}.$$

Le théorème limite local pour le minimum d 'une marche de Markov (1)

Théorème (Y. Ye 2011)

Sous les hypothèses (H), pour tout $i, j \in E$,

$$\sqrt{n}\,\mathbb{E}_i(e^{\lambda m_n}, X_n = j) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{H_{i,j}(\lambda)}{\sqrt{\pi}},$$

où $H_{i,j}$ est une fonction strictement positive sur $\mathbb{R}^{*+}$ et qui vérifie

$$\lim_{\lambda\to 0^+} \lambda H_{i,j}(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi\sigma^2}}\nu_j.$$

Le théorème limite local pour le minimum d 'une marche de Markov (2)

Théorème (Y. Ye 2011)

Sous les hypothèses (H), pour tout $(i,j) \in E \times E$ *et tout* $x \geq 0$, *on a*

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt{n}\, \mathbb{P}_i(m_n \geq -x, X_n = j) = h_{i,j}(x) > 0,$$

où la fonction $(x,i) \mapsto h_{i,j}(x)$ *est une fonction harmonique sur* $\mathbb{R}_+ \times E$ *pour la chaîne markovienne* $(S_n, X_n)_{n \geq 0}$. *De plus,*

$$h_{i,j}(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\sigma^2}}\, \nu_j\, x, \text{ lorsque } x \to +\infty.$$

Principe de la démonstration

On part de l'identité de Spitzer, on montre qu'il existe des constantes strictement positives $a(\lambda)$ et b telles que

$$\mathbb{E}\left[e^{\lambda S_n};\ T_+ > n\right] \sim \frac{a(\lambda)}{n^{3/2}} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}[T_{*-} > n] \sim \frac{b}{\sqrt{n}}$$

et l'on conclut grâce au lemme suivant

Lemma

Soient $(\alpha_n)_{n\geq 0}$ and $(\beta_n)_{n\geq 0}$ deux suites de réels positifs telles que $\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n = A < +\infty$ avec $(n\alpha_n)_{n\geq 0}$ bornée et $\beta_n \sim \frac{b}{\sqrt{n}}$. Alors

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \beta_{n-k} = Ab$$

La factorisation de Wiener Hopf (1)

On note μ la loi commune des v.a. Y_i et on rappelle la factorisation dite de Wiener-Hopf

$$\delta_0 - z\mu = \left(\delta_0 - \mathbb{E}[z^{T_+}\delta_{S_{T_+}}]\right) * \left(\delta_0 - \mathbb{E}[z^{T_{*-}}\delta_{S_{T_{*-}}}]\right)$$

La factorisation de Wiener Hopf (1)

On note μ la loi commune des v.a. Y_i et on rappelle la factorisation dite de Wiener-Hopf

$$\delta_0 - z\mu = \Big(\delta_0 - \mathbb{E}[z^{T_+}\delta_{S_{T_+}}]\Big) * \Big(\delta_0 - \mathbb{E}[z^{T_{*-}}\delta_{S_{T_{*-}}}]\Big)$$

.... qui, appliquée aux caractères $x \mapsto e^{\lambda x}$ donne

$$1 - z\varphi(\lambda) = \Big(1 - \mathbb{E}[z^{T_+}e^{S_{T_+}}]\Big)\Big(1 - \mathbb{E}[z^{T_{*-}}e^{\lambda S_{T_{*-}}}]\Big)$$

où $\varphi(\lambda) = \int e^{\lambda y}\mu(dy) = \mathbb{E}[e^{\lambda Y_1}]$

La factorisation de Wiener Hopf (2)

En utilisant l'identité formelle $\delta_0 - z\mu = \exp\Big(-\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n} \mu^{*n}\Big)$ et en écrivant

La factorisation de Wiener Hopf (2)

En utilisant l'identité formelle $\delta_0 - z\mu = \exp\left(-\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n}\mu^{*n}\right)$ et en écrivant

$$\exp\left(-\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n}\mu^{*n}\right) = \exp\left(-\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n}\mu^{*n}1_{\mathbb{R}^+}\right) * \exp\left(-\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n}\mu^{*n}1_{\mathbb{R}^{*-}}\right),$$

La factorisation de Wiener Hopf (2)

En utilisant l'identité formelle $\delta_0 - z\mu = \exp\Big(-\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n}\mu^{*n}\Big)$ et en écrivant

$$\exp\Big(-\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n}\mu^{*n}\Big) = \exp\Big(-\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n}\mu^{*n}1_{\mathbb{R}+}\Big) * \exp\Big(-\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n}\mu^{*n}1_{\mathbb{R}*-}\Big),$$

on peut identifier chacun des facteurs de Wiener-Hopf.

La factorisation de Wiener Hopf (3)

Ainsi, on a $$\delta_0 - \mathbb{E}[z^{T_{*-}}\delta_{S_{T_{*-}}}] = \exp\Big(-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{z^n}{n}\mu^{*n}1_{\mathbb{R}^{*-}}\Big)$$

La factorisation de Wiener Hopf (3)

Ainsi, on a
$$\delta_0 - \mathbb{E}[z^{T_{*-}} \delta_{S_{T_{*-}}}] = \exp\Big(-\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n} \mu^{*n} 1_{\mathbb{R}^{*-}}\Big)$$

d'où l'on tire

$$\sum_{k\geq 0} z^k \mathbb{E}[T_+ > k; \delta_{S_k}] = \Big(\delta_0 - \mathbb{E}[z^{T_{*-}} \delta_{S_{T_{*-}}}]\Big)^{-1} = \exp\Big(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n} \mu^{*n} 1_{\mathbb{R}^{*-}}\Big).$$

La factorisation de Wiener Hopf (3)

Ainsi, on a $$\delta_0 - \mathbb{E}[z^{T_{*-}}\delta_{S_{T_{*-}}}] = \exp\Big(-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{z^n}{n}\mu^{*n}1_{\mathbb{R}^{*-}}\Big)$$

d'où l'on tire

$$\sum_{k\geq 0} z^k\mathbb{E}[T_+ > k; \delta_{S_k}] = \Big(\delta_0 - \mathbb{E}[z^{T_{*-}}\delta_{S_{T_{*-}}}]\Big)^{-1} = \exp\Big(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{z^n}{n}\mu^{*n}1_{\mathbb{R}^{*-}}\Big).$$

À travers les caractères $e^{\lambda y}, \lambda > 0$, cela s'écrit

$$\sum_{k\geq 0} z^k\mathbb{E}[T_+ > k; e^{\lambda S_k}] = \exp\Big(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{z^n}{n}\int_{\mathbb{R}^{*-}} e^{\lambda y}\mu^{*n}(dy)\Big).$$

Deux lemmes élémentaires (1)

En appliquant le théorème limite local classique, et en appliquant le

Lemma

Soient $(\alpha_n)_{n\geq 0}$ *and* $(a_n)_{n\geq 0}$ *deux suites de réels positifs telles que*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n z^n = \exp\Big(\sum_{n=1}^{+\infty} a_n z^n\Big).$$

Si la suite $(n^{3/2}a_n)_{n\geq 1}$ *est bornée, il en est de même pour la suite* $(n^{3/2}\alpha_n)_{n\geq 1}$.

on obtient

$$\mathbb{E}\left[e^{\lambda S_n};\ T_+ > n\right] \sim \frac{a(\lambda)}{n^{3/2}} \quad \text{et} \qquad \mathbb{P}[T_{*-} > n] \sim \frac{b}{\sqrt{n}}.$$

Le lemme de préparation de Weierstrass

Sous les hypothèses de moments exponentiel, la fonction

$$\Phi : (z, \lambda) \mapsto 1 - z\varphi(\lambda)$$

est analytique sur $\mathbb{C} \times \{\mathrm{Re}(\lambda) \leq \alpha\}$.

Le lemme de préparation de Weierstrass

Sous les hypothèses de moments exponentiel, la fonction

$$\Phi : (z, \lambda) \mapsto 1 - z\varphi(\lambda)$$

est analytique sur $\mathbb{C} \times \{\mathrm{Re}(\lambda) \leq \alpha\}$.
De plus $\Phi'_\lambda(1, 0) = 0$ (centrage) et $\Phi''_\lambda(1, 0) = \sigma^2 > 0$.

Le lemme de préparation de Weierstrass

Sous les hypothèses de moments exponentiel, la fonction

$$\Phi : (z, \lambda) \mapsto 1 - z\varphi(\lambda)$$

est analytique sur $\mathbb{C} \times \{\mathrm{Re}(\lambda) \leq \alpha\}$.
De plus $\Phi'_\lambda(1,0) = 0$ (centrage) et $\Phi''_\lambda(1,0) = \sigma^2 > 0$. Ainsi

$$1 - z\varphi(\lambda) = (\lambda^2 + b(z)\lambda + c(z))H(z, \lambda)$$

avec H analytique sur $\mathbb{C} \times \{\mathrm{Re}(\lambda) \leq \alpha\}$ et non nulle sur un voisinage de $(1, 0)$.

Le lemme de préparation de Weierstrass (2)

À z fixé, l'équation $z\varphi(\lambda) = 1$ a alors deux racines $\lambda_{\pm}(z)$.
Ce sont les racines du trinôme $\lambda^2 + b(z)\lambda + c(z)$

Le lemme de préparation de Weierstrass (2)

À z fixé, l'équation $z\varphi(\lambda) = 1$ a alors deux racines $\lambda_\pm(z)$. Ce sont les racines du trinôme $\lambda^2 + b(z)\lambda + c(z)$ d'où

$$1 - z\varphi(\lambda) = (\lambda - \lambda_+)(\lambda - \lambda_-)H(z, \lambda).$$

Le lemme de préparation de Weierstrass (2)

À z fixé, l'équation $z\varphi(\lambda) = 1$ a alors deux racines $\lambda_{\pm}(z)$. Ce sont les racines du trinôme $\lambda^2 + b(z)\lambda + c(z)$ d'où

$$1 - z\varphi(\lambda) = (\lambda - \lambda_+)(\lambda - \lambda_-)H(z, \lambda).$$

En résolvant l'équation implicite $z\varphi(\lambda_{\pm}(z)) = 1$, on a

$$\lambda_{\pm}(z) = \pm\sqrt{\frac{2}{\sigma^2}}\sqrt{1 - z} + \ldots$$

L'identité de Wiener Hopf

L'identité de Wiener-Hopf

$$1 - z\varphi(\lambda) = \left(1 - \mathbb{E}[z^{T_+} e^{\lambda S_{T_+}}]\right)\left(1 - \mathbb{E}[z^{T_{*-}} e^{\lambda S_{T_{*-}}}]\right)$$

peut s'écrire alors, au moins formellement

$$H(z,\lambda) = \frac{1 - \mathbb{E}[z^{T_+} e^{\lambda S_{T_+}}]}{\lambda - \lambda_+} \times \frac{1 - \mathbb{E}[z^{T_{*-}} e^{\lambda S_{T_{*-}}}]}{\lambda - \lambda_-}.$$

L'identité de Wiener Hopf

L'identité de Wiener-Hopf

$$1 - z\varphi(\lambda) = \left(1 - \mathbb{E}[z^{T_+} e^{\lambda S_{T_+}}]\right)\left(1 - \mathbb{E}[z^{T_{*-}} e^{\lambda S_{T_{*-}}}]\right)$$

peut s'écrire alors, au moins formellement

$$H(z, \lambda) = \frac{1 - \mathbb{E}[z^{T_+} e^{\lambda S_{T_+}}]}{\lambda - \lambda_+} \times \frac{1 - \mathbb{E}[z^{T_{*-}} e^{\lambda S_{T_{*-}}}]}{\lambda - \lambda_-}.$$

et on peut démontrer que chacun des facteurs ci-dessus est analytique et non nul au voisinage de $(1, 0)$.

Singularité au voisinage de $z = 1$

On déduit de ce qui précède que, au voisinage de $z = 1$, on a

- $\mathbb{E}[z^{T_{*-}}] = \sum_{k\geq 1} z^n \mathbb{P}[T_{*-} = k] = 1 - a_1\sqrt{1-z} + \ldots.$
-
$$\begin{aligned}\sum_{k\geq 0} z^k \mathbb{E}[T_+ > k; e^{\lambda S_k}] &= \frac{1}{1 - \mathbb{E}[z^{T_{*-}} e^{\lambda S_{T_{*-}}}]} \\ &= a_2(\lambda) + b_2(\lambda)\sqrt{1-z} + \cdots\end{aligned}$$

Le lemme de P. Flajolet & A. Odlyzko

On conclut en utilisant le résultat suivant, de type théorème Tauberien, du à P. Flajolet et A. Odlyzko :

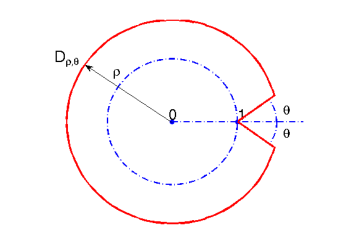
Lemma

Soit $z \mapsto G(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} g_n z^n$ une fonction de la variable complexe telle que

- *G est analytique sur $\mathbb{D}_{\rho,\theta}$;*
- $\lim\limits_{\substack{z \in \mathbb{D}_{\rho,\theta} \\ z \to 1}} \sqrt{1-z}\,G(z) = c$
  où c est une constante > 0,

alors

$$g_n \sim \frac{c}{\sqrt{\pi n}}, \qquad n \to +\infty.$$



Quelques notations (1)

- On considère la famille $(P(\lambda))_{\lambda\in\mathbb{C}}$ de matrice $N\times N$ à valeurs complexes définies par

$$P(\lambda)=\Big(P(\lambda)_{i,j}\Big)_{i,j\in E}=\Big(p_{i,j}\int_{\mathbb{R}}e^{\lambda t}F(i,j,\mathrm{d}t)\Big)_{i,j\in E}.$$

- On note $V_N[-\alpha,\alpha]$ l'algèbre des matrices $N\times N$ dont les termes sont les transformées de Laplace de mesures de Radon $(\sigma_{i,j})_{i,j\in E}$ sur $\mathbb{R}$ vérifiant

$$\int_{\mathbb{R}}e^{\lambda x}\mathrm{d}\mid\sigma_{i,j}\mid(x)<+\infty$$

pour tout $i,j\in E$ et $\lambda\in\mathbb{C}$ tel que $\mid\Re\,\lambda\mid\leq\alpha$.

Quelques notations (2)

- Pour $G \in V_N[-\alpha, \alpha]$, on a alors

$$G(\lambda) = \left(\int_{\mathbb{R}} e^{\lambda x} \mathrm{d}\sigma_{i,j}(x) \right)_{1 \leq i,j \leq N}.$$

- Pour $| \Re \lambda | \leq \alpha$, on pose:

$$\mathcal{N} G(\lambda) = \left(\int_{]-\infty,0]} e^{\lambda x} \mathrm{d}\sigma_{i,j}(x) \right)_{i,j}, \; \mathcal{N}^* G(\lambda) = \left(\int_{]-\infty,0[} e^{\lambda x} \mathrm{d}\sigma_{i,j}(x) \right)_{i,j};$$

$$\mathcal{P} G(\lambda) = \left(\int_{[0,+\infty[} e^{\lambda x} \mathrm{d}\sigma_{i,j}(x) \right)_{i,j}, \; \mathcal{P}^* G(\lambda) = \left(\int_{]0,+\infty[} e^{\lambda x} \mathrm{d}\sigma_{i,j}(x) \right)_{i,j}.$$

- Pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $| z | < 1$ et $\Re \lambda = 0$, considérons les matrices suivantes:

Quelques notations (3)

$$B_z(\lambda) = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} z^n \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\lambda y} d\mathbb{P}_i\{S_1 \geq S_n, S_2 \geq S_n, \cdots, S_{n-1} \geq S_n, S_n \leq y, X_n = j\}\right)_{i,j};$$

$$B_z^*(\lambda) = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} z^n \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\lambda y} d\mathbb{P}_i\{S_1 > S_n, S_2 > S_n, \cdots, S_{n-1} > S_n, S_n \leq y, X_n = j\}\right)_{i,j};$$

$$C_z(\lambda) = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} z^n \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\lambda y} d\mathbb{P}_i\{S_1 \geq 0, S_2 \geq 0, \cdots, S_{n-1} \geq 0, S_n \leq y, X_n = j\}\right)_{i,j};$$

$$C_z^*(\lambda) = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} z^n \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\lambda y} d\mathbb{P}_i\{S_1 > 0, S_2 > 0, \cdots, S_{n-1} > 0, S_n \leq y, X_n = j\}\right)_{i,j}.$$

Une factorisation probabiliste à la Wiener-Hopf ....

On a la

Proposition

Pour $\Re\, \lambda = 0$ *et* $\mid z \mid < 1$*, on a*

$$I - zP(\lambda) = (I - \mathcal{P}B_z^*(\lambda))(I - \mathcal{N}^* C_z(\lambda)),$$

$$(I - \mathcal{P}B_z^*(\lambda))^{-1} = I + \mathcal{P}C_z(\lambda),$$

$$(I - \mathcal{N}^* C_z(\lambda))^{-1} = I + \mathcal{N}^* B_z^*(\lambda).$$

.... et l'identité de Spitzer correspondante

Pour tous $i, j \in E, \lambda > 0$ et $z \in \mathbb{C}, |z| < 1$, on a

$$\begin{aligned} H_{i,j}(z,\lambda) &:= \sum_{n=0}^{+\infty} z^n \mathbb{E}_i(e^{\lambda m_n}, X_n = j) \\ &= \Big\{[I + \mathcal{N}^* B_z^*(\lambda)][I + \mathcal{P} C_z(0)]\Big\}_{i,j}. \end{aligned}$$

La théorie de Presman (1)

Définition

On dit qu'un élément G d'une algèbre de Banach $(V, +, \bullet, \|\ \|)$, d'élément neutre I pour $\bullet$, admet une **factorisation canonique à gauche** (f.c.g.) par rapport à $\mathcal{N}^*$ s'il existe $B, C \in (V, +, \bullet, \|\ \|)$, tels que

$$I - G = (I - \mathcal{P}^* B)(I - \mathcal{N}^* C),$$

$$(I - \mathcal{P}^* B)^{-1} = I + \mathcal{P} C,$$

$$(I - \mathcal{N}^* C)^{-1} = I + \mathcal{N}^* B.$$

On dit de façon abrégé que (B, C) forment une $\mathcal{N}^*$ **f.c.g. de** $I - G$.

La théorie de Presman (2)

Lemme [E. L. Presman 1969]

Si $z \mapsto A(z)$ est une fonction analytique au voisinage de z_0, à valeurs dans $(V, +, \bullet, \| \ \|)$ et si dans ce voisinage $I - A(z)$ admet une $\mathcal{N}^*$ f.c.g. (B_z^*, C_z) alors les fonctions $z \mapsto \mathcal{P}B_z^*$ et $z \mapsto \mathcal{N}^* C_z$

- sont analytiques dans ce voisinage de z_0;
- sont à valeurs respectivement dans $\mathcal{P}V$ et $\mathcal{N}^* V$.

D'après les lemmes [Presman 1] et [Presman 2], on a

La théorie de Presman (3)

Grâce aux travaux de E. L. Presman, on peut écrire, en notant $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$:

Théorème

Il existe un voisinage U de $\mathbb{D} \setminus \{1\}$ tel que, pour $\Re\, \lambda = 0$, les fonctions $z \mapsto B_z^*(\lambda)$ et $z \mapsto C_z(\lambda)$ admettent un prolongement analytique sur U de façon que

1. *pour tout $z \in U$, les trois égalités de factorisation sont satisfaites;*
2. *les fonction $z \mapsto \mathcal{P}B_z^*$ and $z \mapsto \mathcal{N}^* C_z$ sont analytiques sur U et à valeurs dans $V_N]-\infty, \alpha]$ et $V_N[-\alpha, +\infty[$ respectivement.*

Comportement près de $z = 1$ des facteurs de $H_{i,j}(\lambda, z)$

On a

- $\lim_{\lambda \to 0^+} \lambda(I + \mathcal{N}^* B_1^*(\lambda)) = A_-$,
- la fonction $\sqrt{1-z}\,(I + \mathcal{P} C_z(0))$ admet un prolongement analytique sur $\mathbb{D}_{\rho,\theta}$ et

$$\lim_{z \to 1} \sqrt{1-z}\,(I + \mathcal{P} C_z(0)) = -\sqrt{\frac{\sigma^2}{2}}\, A_+,$$

où A_- et A_+ sont des matrices $N \times N$ liées par la relation

$$-\frac{\sigma^2}{2} A_- A_+ == \begin{pmatrix} \nu_1 & \nu_2 & \cdots & \nu_N \\ \nu_1 & \nu_2 & \cdots & \nu_N \\ & \cdots & & \\ \nu_1 & \nu_2 & \cdots & \nu_N \end{pmatrix}.$$

Merci pour votre attention !