Processus de branchement en environnement aléatoire et marches aléatoires.

Vincent Bansaye

30 septembre, Ile de Berder.
Regards croisés sur les marches aléatoires et la géométrie des groupes, en l'honneur d' Emile Le Page.

Les processus Bienaymé Galton Watson modélisent une population où les individus se reproduisent de manière indepéndante et identiquement distribuée, toujours selon la même loi.

Les processus de branchement en environnement aléatoire (PBEA) [Smith, Wilkinson 69] sont une généralisation telle que

A chaque génération, un environnement est tiré au hasard (de manière i.i.d.) et il détermine la loi de reproduction de tous les individus de cette génération.

Les processus Bienaymé Galton Watson modélisent une population où les individus se reproduisent de manière indepéndante et identiquement distribuée, toujours selon la même loi.

Les processus de branchement en environnement aléatoire (PBEA) [Smith, Wilkinson 69] sont une généralisation telle que

A chaque génération, un environnement est tiré au hasard (de manière i.i.d.) et il détermine la loi de reproduction de tous les individus de cette génération.

Motivations

- Division d'une cellule infectée (Kimmel's branching model) : comportement asymptotique du nombre de cellules anormalement infectées.
- Quel est l'effet de la variabilité de l'environnement sur la croissance d'une population ? (expériences sur les vers de terre au laboratoire d'écologie de l'ENS)

Description des PBEA $(Z_n)_{n\geq 0}$

A chaque génération, on tire au hasard de manière i.i.d. un environnement :

$$\mathcal{E}_i = \text{environnement entre la génération } i \text{ et } i+1.$$

La loi de reproduction dans l'environnement e est donnée par la variable aléatoire

$$N(e), \qquad m(e) := \mathbb{E}(N(e)).$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, conditionellement à $\mathcal{E}_n = e$,

$$Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{Z_n} N_i,$$

où $(N_i)_{i\in\mathbb{N}}$ sont des v.a. i.i.d. distribuées comme $N(e)$.

Un PBEA s'éteint p.s. ssi $\mathbb{E}[\log(m(\mathcal{E}))] \leq 0$. [Athreya, Karlin 71].

Description des PBEA $(Z_n)_{n\geq 0}$

A chaque génération, on tire au hasard de manière i.i.d. un environnement :

$$\mathcal{E}_i = \text{environnement entre la génération } i \text{ et } i+1.$$

La loi de reproduction dans l'environnement e est donnée par la variable aléatoire

$$N(e), \qquad m(e) := \mathbb{E}(N(e)).$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, conditionellement à $\mathcal{E}_n = e$,

$$Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{Z_n} N_i,$$

où $(N_i)_{i\in\mathbb{N}}$ sont des v.a. i.i.d. distribuées comme $N(e)$.

Un PBEA s'éteint p.s. ssi $\mathbb{E}[\log(m(\mathcal{E}))] \leq 0$. [Athreya, Karlin 71].

Description des PBEA $(Z_n)_{n\geq 0}$

A chaque génération, on tire au hasard de manière i.i.d. un environnement :

$$\mathcal{E}_i = \text{environnement entre la génération } i \text{ et } i+1.$$

La loi de reproduction dans l'environnement e est donnée par la variable aléatoire

$$N(e), \qquad m(e) := \mathbb{E}(N(e)).$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, conditionellement à $\mathcal{E}_n = e$,

$$Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{Z_n} N_i,$$

où $(N_i)_{i\in\mathbb{N}}$ sont des v.a. i.i.d. distribuées comme $N(e)$.

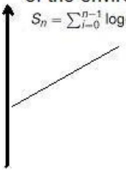
Un PBEA s'éteint p.s. ssi $\mathbb{E}[\log(m(\mathcal{E}))] \leq 0$. [Athreya, Karlin 71].

Exemple de PBEA

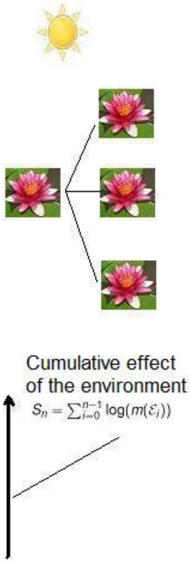
Cumulative effect
of the environment
$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} \log(m(\mathcal{E}_i))$

Exemple de PBEA

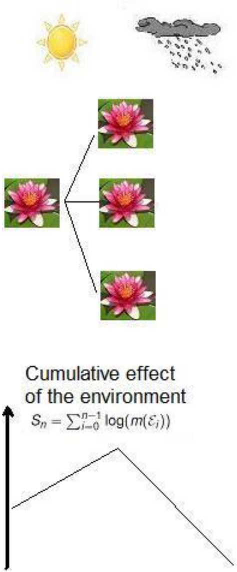
Cumulative effect
of the environment
$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} \log(m(\mathcal{E}_i))$



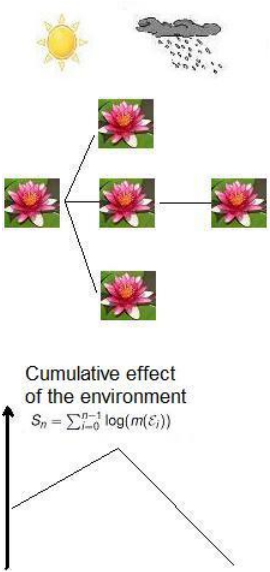
Exemple de PBEA



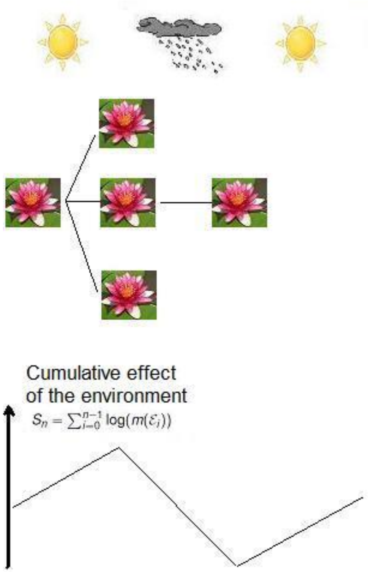
Exemple de PBEA



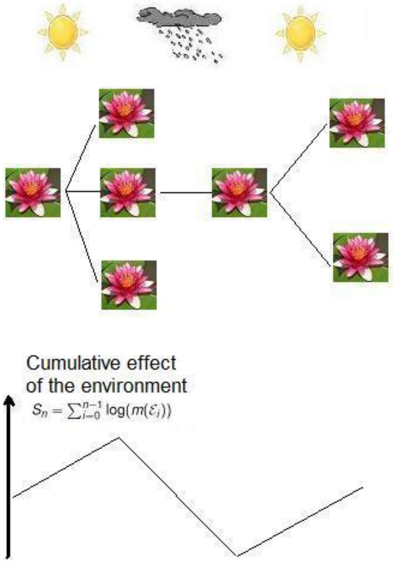
Exemple de PBEA



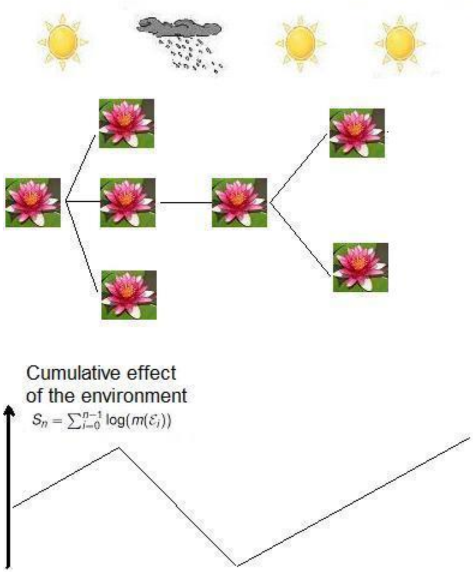
Exemple de PBEA



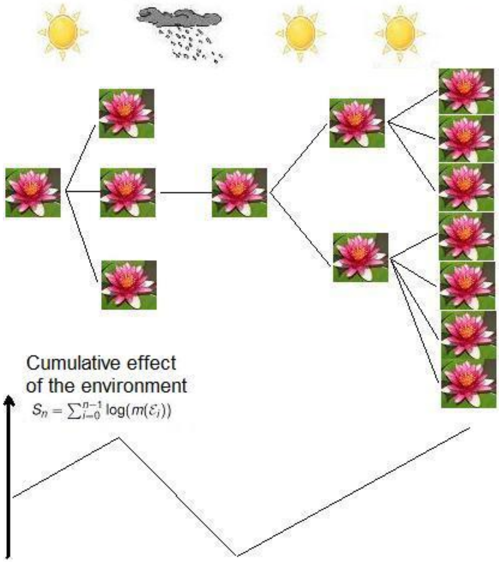
Exemple de PBEA



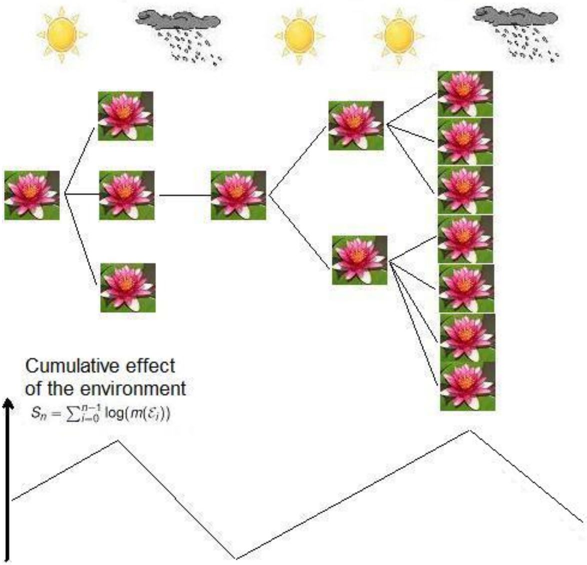
Exemple de PBEA



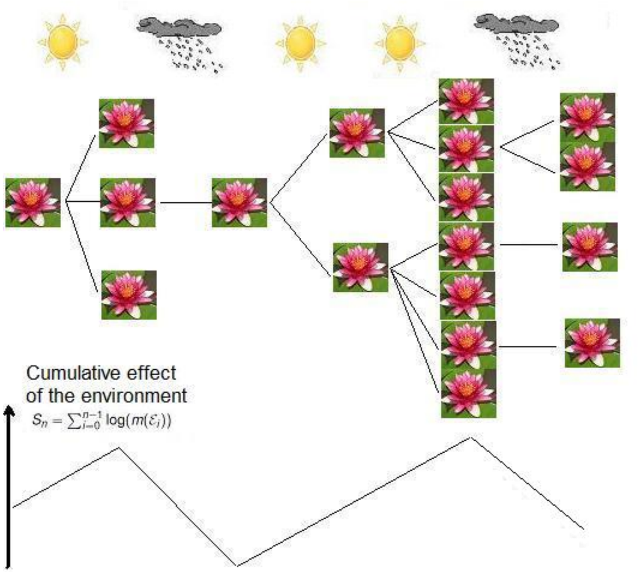
Exemple de PBEA



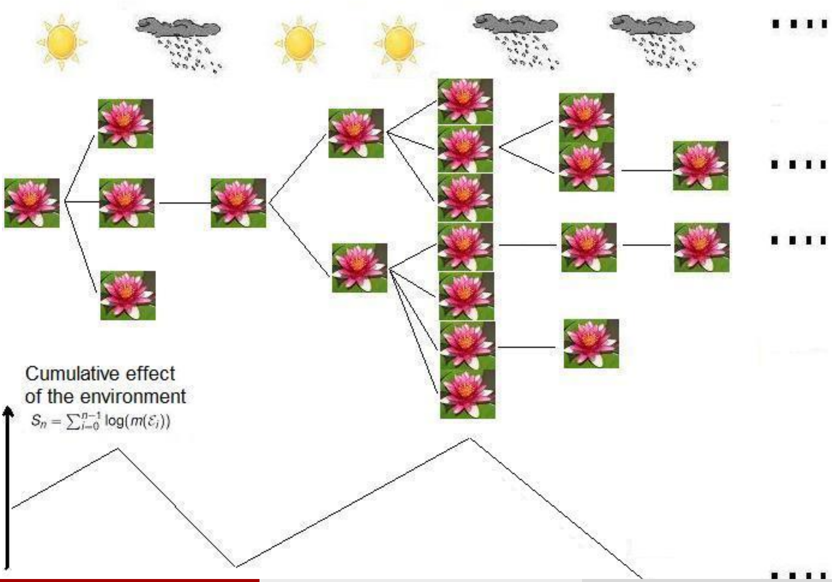
Exemple de PBEA



Exemple de PBEA



Exemple de PBEA



Vitesse d'extinction

Quand la population s'éteint p.s., la vitesse d'extinction est

$$\frac{\log \mathbb{P}(Z_n > 0)}{n} \xrightarrow{n\to\infty} -\gamma, \quad \mathbb{P}(Z_n > 0) \asymp \exp(-n\gamma).$$

Elle dépend de la variabilité de l'environnement [Dekking 88 ; Liu 96 ; D'Souza, Hambly 97 ; Guivarc'h, Liu 01 ; Geiger, Kersting, Vatutin 03] :

- Cas fortement ou moyennement sous-critique ($\mathbb{E}(m(\mathcal{E})\log(m(\mathcal{E}))) \leq 0$) :

$$\gamma = -\log \mathbb{E}(m(\mathcal{E})).$$

- Cas faiblement sous-critique ($\mathbb{E}(m(\mathcal{E})\log(m(\mathcal{E}))) > 0$) :

$$\gamma = -\log \inf_{s\in[0,1]} \mathbb{E}(m(\mathcal{E})^s) = \Lambda(0) > -\log \mathbb{E}(m(\mathcal{E}))$$

où Λ est la fonction de taux de la marche aléatoire $(S_n : n \geq 0)$.

Vitesse d'extinction

Quand la population s'éteint p.s., la vitesse d'extinction est

$$\frac{\log \mathbb{P}(Z_n > 0)}{n} \xrightarrow{n\to\infty} -\gamma, \quad \mathbb{P}(Z_n > 0) \asymp \exp(-n\gamma).$$

Elle dépend de la variabilité de l'environnement [Dekking 88 ; Liu 96 ; D'Souza, Hambly 97 ; Guivarc'h, Liu 01 ; Geiger, Kersting, Vatutin 03] :

- Cas fortement ou moyennement sous-critique ($\mathbb{E}(m(\mathcal{E})\log(m(\mathcal{E}))) \leq 0$) :

$$\gamma = -\log \mathbb{E}(m(\mathcal{E})).$$

- Cas faiblement sous-critique ($\mathbb{E}(m(\mathcal{E})\log(m(\mathcal{E}))) > 0$) :

$$\gamma = -\log \inf_{s\in[0,1]} \mathbb{E}(m(\mathcal{E})^s) = \Lambda(0) > -\log \mathbb{E}(m(\mathcal{E}))$$

où Λ est la fonction de taux de la marche aléatoire $(S_n : n \geq 0)$.

Question :

Si après un temps long ($n >> 1$), quelques nénuphars survivent. Est ce du

- à des reproductions exceptionnelles (dans des environnements normaux), c-a-d à la stochasticité démographique ?
- à des environnements exceptionnels, c-a-d à la stochasticité environnementale ?

Question :

Si après un temps long ($n >> 1$), quelques nénuphars survivent. Est ce du

- à des reproductions exceptionnelles (dans des environnements normaux), c-a-d à la stochasticité démographique ?
- à des environnements exceptionnels, c-a-d à la stochasticité environnementale ?

Résultats plus fin

[Geiger, Kersting, Vatutin 2003] :

- Cas fortement sous critique : $\mathbb{E}(m(\mathcal{E})\log(m(\mathcal{E}))) < 0$, alors

$$\mathbb{P}(Z_n > 0) \sim c\mathbb{E}(m(\mathcal{E}))^n, \quad (n \to \infty).$$

- Cas moyennement sous critique : $\mathbb{E}(m(\mathcal{E})\log(m(\mathcal{E}))) = 0$, alors

$$\mathbb{P}(Z_n > 0) \sim c'\mathbb{E}(m(\mathcal{E}))^n / n^{1/2}, \quad (n \to \infty).$$

- Cas faiblement sous critique : $\mathbb{E}(m(\mathcal{E})\log(m(\mathcal{E}))) > 0$, alors

$$\mathbb{P}(Z_n > 0) \sim c''\gamma^n / n^{3/2}, \quad (n \to \infty),$$

avec $\gamma = \inf\{\mathbb{E}(m(\mathcal{E})^s) : s \in [0,1]\} < \mathbb{E}(m(\mathcal{E}))$.

Dépendence de la population initiale

Pour tout $k \geq 1$, $\qquad \mathbb{P}_k(Z_n > 0) \sim \alpha_k \mathbb{P}_1(Z_n > 0) \quad (n \to \infty)$.

- Dans les cas fortement et moyennement sous critique $(\mathbb{E}(m(\mathcal{E}) \log(m(\mathcal{E}))) \leq 0)$,

$$\alpha_k = k.$$

- Dans le cas faiblement sous critique $(\mathbb{E}(m(\mathcal{E}) \log(m(\mathcal{E}))) > 0)$,

$$C_1 \log(k) k^{\alpha} \leq \alpha_k \leq C_2 \log(k) k^{\alpha} \qquad (k \geq 1),$$

avec $\alpha \in (0, 1)$ donné par $\mathbb{E}(m(\mathcal{E})^{\alpha} \log(m(\mathcal{E}))) = 0$.

Dépendence de la population initiale

Pour tout $k \geq 1$, $\mathbb{P}_k(Z_n > 0) \sim \alpha_k \mathbb{P}_1(Z_n > 0) \quad (n \to \infty)$.

- Dans les cas fortement et moyennement sous critique $(\mathbb{E}(m(\mathcal{E}) \log(m(\mathcal{E}))) \leq 0)$,

$$\alpha_k = k.$$

- Dans le cas faiblement sous critique $(\mathbb{E}(m(\mathcal{E}) \log(m(\mathcal{E}))) > 0)$,

$$C_1 \log(k) k^{\alpha} \leq \alpha_k \leq C_2 \log(k) k^{\alpha} \qquad (k \geq 1),$$

avec $\alpha \in (0,1)$ donné par $\mathbb{E}(m(\mathcal{E})^{\alpha} \log(m(\mathcal{E}))) = 0$.

Dépendence de la population initiale

Pour tout $k \geq 1$, $\quad \mathbb{P}_k(Z_n > 0) \sim \alpha_k \mathbb{P}_1(Z_n > 0) \quad (n \to \infty)$.

- Dans les cas fortement et moyennement sous critique $(\mathbb{E}(m(\mathcal{E}) \log(m(\mathcal{E}))) \leq 0)$,

$$\alpha_k = k.$$

- Dans le cas faiblement sous critique $(\mathbb{E}(m(\mathcal{E}) \log(m(\mathcal{E}))) > 0)$,

$$C_1 \log(k) k^\alpha \leq \alpha_k \leq C_2 \log(k) k^\alpha \qquad (k \geq 1),$$

avec $\alpha \in (0,1)$ donné par $\mathbb{E}(m(\mathcal{E})^\alpha \log(m(\mathcal{E}))) = 0$.

Les idées derrière

Par un couplage des lois de reproduction, on peut se ramener au cas où ces lois sont toutes linéaires fractionnaires, i.e.

$$f_{\mathcal{E}_k}(s) \;=\; 1-\frac{1-s}{m(\mathcal{E}_k)^{-1}+b(\mathcal{E}_k)\;m(\mathcal{E}_k)^{-2}(1-s)/2}$$

avec $b(\mathcal{E}_k)=f''_{\mathcal{E}_k}(1)=\mathbb{E}(N(\mathcal{E}_k)^2-N(\mathcal{E}_k))$. Alors

$$\mathbb{E}(s^{Z_n}\,|\,\mathcal{E}_0,\cdots,\mathcal{E}_{n-1})=1-\frac{1-s}{\exp(-S_n)+(1-s)\sum_{k=0}^{n-1}\frac{b(\mathcal{E}_{k+1})}{2m(\mathcal{E}_{k+1})^2}\exp(-S_k)}$$

et en particulier

Les idées derrière

Par un couplage des lois de reproduction, on peut se ramener au cas où ces lois sont toutes linéaires fractionnaires, i.e.

$$f_{\mathcal{E}_k}(s) \;=\; 1 - \frac{1-s}{m(\mathcal{E}_k)^{-1} + b(\mathcal{E}_k)\; m(\mathcal{E}_k)^{-2}(1-s)/2}$$

avec $b(\mathcal{E}_k) = f''_{\mathcal{E}_k}(1) = \mathbb{E}(N(\mathcal{E}_k)^2 - N(\mathcal{E}_k))$. Alors

$$\mathbb{E}(s^{Z_n} \mid \mathcal{E}_0, \cdots, \mathcal{E}_{n-1}) = 1 - \frac{1-s}{\exp(-S_n) + (1-s)\sum_{k=0}^{n-1} \frac{b(\mathcal{E}_{k+1})}{2m(\mathcal{E}_{k+1})^2} \exp(-S_k)}$$

et en particulier

$$\mathbb{P}_1(Z_n > 0) = \mathbb{E}\left[\frac{1}{\exp(-S_n) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b(\mathcal{E}_{k+1})}{2m(\mathcal{E}_{k+1})^2} \exp(-S_k)}\right],$$

et

$$\mathbb{P}_k(Z_n > 0) = 1 - \mathbb{E}\left(\left[1 - \frac{1}{\exp(-S_n) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b(\mathcal{E}_{k+1})}{2m(\mathcal{E}_{k+1})^2} \exp(-S_k)}\right]^k\right),$$

Cas faiblement sous critique

On considère le changement de probabilité

$$\widetilde{\mathbb{P}}(\mathcal{E} \in de) = \frac{m(e)^\alpha}{\mathbb{E}(m(\mathcal{E})^\alpha)} \mathbb{P}(\mathcal{E} \in de)$$

avec α défini par $\mathbb{E}(m(\mathcal{E})^\alpha \log(m(\mathcal{E}))) = 0$. De sorte que

$$\widetilde{\mathbb{E}}(\log m(\mathcal{E})) = 0$$

et sous $\widetilde{\mathbb{P}}$, S_n est une marche aléatoire centrée. Alors

$$\mathbb{P}(Z_n > 0) = \mathbb{E}(m(\mathcal{E})^\alpha)^n \mathbb{E}\left[\phi(\Pi_{i=0}^{n-1} m(\mathcal{E}_i)).\psi(\sum_{k=0}^{n-1} c(\mathcal{E}_k)\Pi_{i=0}^{k} m(\mathcal{E}_i))\right].$$

Et on peut appliquer un théorème limite local sur le produit semi direct de $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}$ de Le Page et Peigné [97] pour obtenir un équivalent.

Cas faiblement sous critique

On considère le changement de probabilité

$$\widetilde{\mathbb{P}}(\mathcal{E} \in de) = \frac{m(e)^{\alpha}}{\mathbb{E}(m(\mathcal{E})^{\alpha})}\mathbb{P}(\mathcal{E} \in de)$$

avec α défini par $\mathbb{E}(m(\mathcal{E})^{\alpha}\log(m(\mathcal{E}))) = 0$. De sorte que

$$\widetilde{\mathbb{E}}(\log m(\mathcal{E})) = 0$$

et sous $\widetilde{\mathbb{P}}$, S_n est une marche aléatoire centrée. Alors

$$\mathbb{P}(Z_n > 0) = \mathbb{E}(m(\mathcal{E})^{\alpha})^n\mathbb{E}\left[\phi(\Pi_{i=0}^{n-1} m(\mathcal{E}_i)).\psi(\sum_{k=0}^{n-1} c(\mathcal{E}_k)\Pi_{i=0}^{k} m(\mathcal{E}_i))\right].$$

Et on peut appliquer un théorème limite local sur le produit semi direct de $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}$ de Le Page et Peigné [97] pour obtenir un équivalent.

Processus surcritique

Dans le cas surcritique, si $\mathbb{E}(Z_1 \log^+(Z_1)/m(\mathcal{E}_1)) < \infty$, on a p.s. [Athreya Karlin 71] :

$$Z_n \sim W\Pi_{i=0}^{n-1} m(\mathcal{E}_i) = W \exp(S_n) \quad (n \to \infty)$$

avec $S_n = \sum_{i=0}^{n-1} \log(m(\mathcal{E}_i))$. Alors, en posant $L = \mathbb{E}(\log(m(\mathcal{E}))) > 0$

$$Z_n \asymp \exp(Ln) \quad (n \to \infty) \quad \text{p.s.}$$

Quelle est la probabilité d'observer une croissance anormale :

$$Z_n \asymp \exp(\theta n) \quad \text{p.s.}, \quad \theta < L$$

pour $n >> 1$ et comment peut elle se produire ?

Références : Kozlov (06,10), B. & Berestycki (08), Boeinghoff & Kersting (09), B. & Boeinghoff (10,11), Liu & al (10).

Processus surcritique

Dans le cas surcritique, si $\mathbb{E}(Z_1 \log^+(Z_1)/m(\mathcal{E}_1)) < \infty$, on a p.s. [Athreya Karlin 71] :

$$Z_n \sim W\Pi_{i=0}^{n-1} m(\mathcal{E}_i) = W \exp(S_n) \quad (n \to \infty)$$

avec $S_n = \sum_{i=0}^{n-1} \log(m(\mathcal{E}_i))$. Alors, en posant $L = \mathbb{E}(\log(m(\mathcal{E}))) > 0$

$$Z_n \asymp \exp(Ln) \quad (n \to \infty) \quad \text{p.s.}$$

Quelle est la probabilité d'observer une croissance anormale :

$$Z_n \asymp \exp(\theta n) \quad \text{p.s.}, \quad \theta < L$$

pour $n >> 1$ et comment peut elle se produire ?

Références : Kozlov (06,10), B. & Berestycki (08), Boeinghoff & Kersting (09), B. & Boeinghoff (10,11), Liu & al (10)

Processus surcritique

Dans le cas surcritique, si $\mathbb{E}(Z_1 \log^+(Z_1)/m(\mathcal{E}_1)) < \infty$, on a p.s. [Athreya Karlin 71] :

$$Z_n \sim W \Pi_{i=0}^{n-1} m(\mathcal{E}_i) = W \exp(S_n) \quad (n \to \infty)$$

avec $S_n = \sum_{i=0}^{n-1} \log(m(\mathcal{E}_i))$. Alors, en posant $L = \mathbb{E}(\log(m(\mathcal{E}))) > 0$

$$Z_n \asymp \exp(Ln) \quad (n \to \infty) \quad \text{p.s.}$$

Quelle est la probabilité d'observer une croissance anormale :

$$Z_n \asymp \exp(\theta n) \quad \text{p.s.}, \quad \theta < L$$

pour $n >> 1$ et comment peut elle se produire ?

Références : Kozlov (06,10), B. & Berestycki (08), Boeinghoff & Kersting (09), B. & Boeinghoff (10,11), Liu & al (10)

Probabilité de survie en restant borné

Quelle est la valeur de

$$\varrho := \lim_{n\to\infty} -\frac{1}{n} \log \mathbb{P}(0 < Z_n \leq K) \text{ ?}$$

Si $(Z_n : n \geq 0)$ est un processus de Galton Watson, alors

$$\varrho = -\log(f'(p_{ext}))$$

où $p_{ext} = \inf\{s \in [0,1] : f(s) = s\}$.

Probabilité de survie en restant borné

Quelle est la valeur de

$$\varrho := \lim_{n\to\infty} -\frac{1}{n} \log \mathbb{P}(0 < Z_n \leq K) \text{ ?}$$

Si $(Z_n : n \geq 0)$ est un processus de Galton Watson, alors

$$\varrho = -\log(f'(p_{ext}))$$

où $p_{ext} = \inf\{s \in [0,1] : f(s) = s\}$.

Proposition

La limite ϱ existe et sous des hypothèses de moments,

$$\varrho \leq \Lambda(0).$$

Proposition

Si $\mathbb{P}(Z_1 \geq 1) = 1$, *alors*

$$\varrho = -\log \mathbb{P}(Z_1 = 1).$$

Theorem

Si $N(\mathcal{E})$ est p.s. fractionnaire linéaire, alors

$$\varrho = \begin{cases} -\log \mathbb{E}[1/m(\mathcal{E})] & , \quad \textit{if } \mathbb{E}[\log(m(\mathcal{E}))/m(\mathcal{E})] \geq 0 \\ \Lambda(0) & , \quad \textit{else} \end{cases}.$$

Proposition

La limite ϱ existe et sous des hypothèses de moments,

$$\varrho \leq \Lambda(0).$$

Proposition

Si $\mathbb{P}(Z_1 \geq 1) = 1$*, alors*

$$\varrho = -\log \mathbb{P}(Z_1 = 1).$$

Theorem

Si $N(\mathcal{E})$ *est p.s. fractionnaire linéaire, alors*

$$\varrho = \begin{cases} -\log \mathbb{E}\left[1/m(\mathcal{E})\right] & , \quad \textit{if } \mathbb{E}[\log(m(\mathcal{E}))/m(\mathcal{E})] \geq 0 \\ \Lambda(0) & , \quad \textit{else} \end{cases}.$$

Proposition

La limite ϱ existe et sous des hypothèses de moments,

$$\varrho \leq \Lambda(0).$$

Proposition

Si $\mathbb{P}(Z_1 \geq 1) = 1$*, alors*

$$\varrho = -\log \mathbb{P}(Z_1 = 1).$$

Theorem

Si $N(\mathcal{E})$ *est p.s. fractionnaire linéaire, alors*

$$\varrho \quad = \quad \begin{cases} -\log \mathbb{E}\left[1/m(\mathcal{E})\right] & , \quad \textit{if } \mathbb{E}[\log(m(\mathcal{E}))/m(\mathcal{E})] \geq 0 \\ \Lambda(0) & , \quad \textit{else} \end{cases} .$$

Fonction de taux inférieure

Plaçons nous dans le cas du processus de Galton Watson et supposons $\mathbb{P}(Z_1 = 0) = 0$. Comment réaliser

$$1 \leq Z_n \leq \exp(cn), \qquad c < L.$$

Et en environnement aléatoire ? $\{1 \leq Z_n \leq \exp(cn)\} \supset \{S_n \approx cn\}$

$$\chi(c) = \inf_{t \in [0,1)} \{t\varrho + (1-t)\Lambda(c/(1-t))\}.$$

Theorem

Sous quelques hypothèses de moment, pour tout $c < L$,

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{P}(1 \leq Z_n \leq e^{cn}) \quad = \quad -\chi(c) \, .$$

Fonction de taux inférieure

Plaçons nous dans le cas du processus de Galton Watson et supposons $\mathbb{P}(Z_1 = 0) = 0$. Comment réaliser

$$1 \leq Z_n \leq \exp(cn), \qquad c < L.$$

Et en environnement aléatoire ? $\{1 \leq Z_n \leq \exp(cn)\} \supset \{S_n \approx cn\}$

$$\chi(c) = \inf_{t \in [0,1)} \{t\varrho + (1-t)\Lambda(c/(1-t))\}.$$

Theorem

Sous quelques hypothèses de moment, pour tout $c < L$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{P}(1 \leq Z_n \leq e^{cn}) \quad = \quad -\chi(c) \, .$$

Fonction de taux inférieure

Plaçons nous dans le cas du processus de Galton Watson et supposons $\mathbb{P}(Z_1 = 0) = 0$. Comment réaliser

$$1 \leq Z_n \leq \exp(cn), \qquad c < L.$$

Et en environnement aléatoire ? $\{1 \leq Z_n \leq \exp(cn)\} \supset \{S_n \approx cn\}$

$$\chi(c) = \inf_{t \in [0,1)} \{t\varrho + (1-t)\Lambda(c/(1-t))\}.$$

Theorem

Sous quelques hypothèses de moment, pour tout $c < L$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{P}(1 \leq Z_n \leq e^{cn}) \quad = \quad -\chi(c)\,.$$

Fonction de taux inférieure

Plaçons nous dans le cas du processus de Galton Watson et supposons $\mathbb{P}(Z_1 = 0) = 0$. Comment réaliser

$$1 \leq Z_n \leq \exp(cn), \qquad c < L.$$

Et en environnement aléatoire ? $\{1 \leq Z_n \leq \exp(cn)\} \supset \{S_n \approx cn\}$

$$\chi(c) = \inf_{t \in [0,1)} \{t\varrho + (1-t)\Lambda(c/(1-t))\}.$$

Theorem

Sous quelques hypothèses de moment, pour tout $c < L$,

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{P}(1 \leq Z_n \leq e^{cn}) \quad = \quad -\chi(c)\,.$$

Ressort de la preuve

La borne inférieure est facile.
Pour la borne supérieure, on décompose en fonction du dernier temps de passage sous K grand

$$\mathbb{P}(1 \leq Z_n \leq \exp(cn))$$
$$\leq \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(1 \leq Z_i \leq K)\mathbb{P}(1 \leq Z_n \leq \exp(cn); Z_{i+1} \geq K, ..., Z_n \geq K)$$

puis

Proposition

Pour tout $A > 0$ et $\epsilon > 0$, il existe $K_0 \geq 1$ et C tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{P}(Z_n \leq \exp(S_n - n\varepsilon) \mid Z_1 \geq K, ..., Z_n \geq K) \leq C\exp(-An)$$