

Regards croisés sur les marches aléatoires et la géométrie des groupes en l'honneur d'Émile Le Page

Résumés des minicours et des exposés

Marches aléatoires dans les groupes hyperboliques

Peter Haïssinsky (Université Aix-Marseille 1)

Résumé

On étudie le comportement asymptotique de marches aléatoires sur des groupes hyperboliques. On s'intéresse notamment au lieu des points d'aboutissement de la marche sur le bord à l'infini du groupe. Pour cela, on utilise une distance adaptée à la marche – la distance de Green – qui nous permet d'adopter un point de vue géométrique. Si le temps le permet, on présentera d'autres applications de la distance de Green aux groupes hyperboliques.

Moyennabilité et percolation

Tatiana Smirnova-Nagnibeda (Université de Genève)

Résumé

La percolation est un modèle de la physique statistique défini et étudié sur les réseaux euclidiens. Benjamini et Schramm ont initié l'étude de ce modèle sur des graphes de Cayley à géométrie non-euclidienne, qui a mené à un nombre de résultats intéressants, aussi bien du point de vue du comportement du modèle, que du point de vue de la géométrie des groupes. La conjecture la plus importante dans ce domaine relie le nombre de transitions de phase pour la percolation sur un graphe de Cayley avec la moyennabilité du graphe. Dans le minicours nous expliquerons toutes les notions nécessaires pour formuler et comprendre cette conjecture et discuterons des résultats partiels et de leurs conséquences, depuis la parution de l'article de Benjamini et Schramm en 1996 et jusqu'aujourd'hui.

Produits de matrices aléatoires et applications aux sous-groupes linéaires

Richard Aoun (Université Saint Joseph de Beyrouth)

Résumé

Il n'est pas nouveau que les marches aléatoires peuvent donner des informations ou des précisions de nature algébrique/géométrique sur la structure de certains groupes. Dans ce mini-cours, nous montrons comment la théorie des produits de matrices aléatoires, qui a débuté dans les années 60-70 avec Kesten, Furstenberg et poursuivie dans les années 80-90 par l'école française : Bougerol, Guivarc'h, Le Page, Raugi et autres, peut donner des précisions sur la fameuse alternative de Tits pour les groupes linéaires. En particulier, nous montrons que deux marches aléatoires indépendantes sur un groupe linéaire de type fini non virtuellement résoluble finissent par engendrer un groupe libre non abélien. Ceci répond par l'affirmative à une question de Guivarc'h, qui donne dans un article des années 90 une démonstration probabiliste de l'alternative de Tits.

La plus grande partie du cours sera consacrée à exposer la théorie des produits de matrices aléatoires et en donner quelques nouveaux résultats. L'idée intuitive est que les parties les plus significatives d'un groupe ou en d'autres termes le comportement d'un élément générique de celui-ci peuvent être repérées le long d'une marche aléatoire sur le groupe.

Le contenu de ce mini-cours reprend une grande partie de ma thèse de doctorat à l'université d'Orsay (Paris 11).

Différentes approches sur les séries de renouvellement

Nathanaël Enriquez (Université Paris 6)

Résumé

Il s'agit de montrer, sous des hypothèses adaptées, que la queue de variables aléatoires du type $X_1 + X_1 \cdot X_2 + \dots + X_1 \cdot X_2 \dots X_n + \dots$ est de la forme C/t^K . L'identification du K est aisée, celle du C sera l'objet de l'exposé. Nous présenterons trois approches possibles donnant trois représentations différentes de cette constante. Si le temps le permet, nous présenterons les liens qui existent avec les marches aléatoires en milieu aléatoire, ainsi qu'avec un problème classique de lois de temps d'atteinte pour le mouvement brownien.

Cet exposé est une synthèse de travaux avec C. Sabot, M. Yor, O. Zindy et de projets en cours. Ils traitent du cas particulier unidimensionnel des séries de renouvellement multidimensionnelles (beaucoup plus compliquées) étudiées par Émile Le Page, seul, puis conjointement avec Y. Guivarc'h, suite à l'article fondateur de Kesten en 1973.

Propriétés spectrales de certains opérateurs de transfert et homogénéité à l'infini de mesures stationnaires

Yves Guivarc'h (Université Rennes 1)

Résumé

On considère une probabilité non dégénérée sur le groupe linéaire, son action par convolution sur l'espace vectoriel et l'espace projectif correspondant, ainsi que l'opérateur Markovien P associé. On montre que l'action de P sur des espaces de fonctions homogènes a un trou spectral. On en déduit l'homogénéité à l'infini de la mesure stationnaire pour une relation de récurrence affine à coefficients aléatoires.

Le TCL pour des produits aléatoires d'automorphismes du tore, exemples dans le cas stationnaire

Jean-Pierre Conze (Université Rennes 1)

Résumé

Etant donné un système dynamique $(\Omega, \mathbb{P}, \theta)$ et un espace métrique (X, m) muni d'une probabilité m , soit $T : \omega \rightarrow T(\omega)$ une application mesurable de Ω dans un semi-groupe de transformations préservant m de X dans lui-même.

Considérons le système dynamique sur $(\Omega \times X, \mathbb{P} \otimes m)$ défini par $\theta_T(\omega, x) = (\theta\omega, T(\omega)x)$. Les itérées de θ_T s'écrivent : $(\theta^k\omega, T_1^k(\omega)x)$ avec $T_1^k(\omega) = T(\theta^{k-1}\omega) \circ \dots \circ T(\theta\omega) \circ T(\omega)$, et les sommes ergodiques d'une fonction f sur X : $S_n f(\omega, x) = \sum_{k=0}^{n-1} f(T_1^k(\omega)x)$.

Nous dirons que le théorème central limite "quenched" est vérifié pour un sous-espace de fonctions réelles $\mathcal{H} \subset L_0^2(X, m)$, si pour $f \in \mathcal{H}$, pour presque tout $\omega \in \Omega$,

- la variance $\sigma^2(f) = \lim \frac{1}{n} \|S_n f(\omega, \cdot)\|_{2,m}^2$ existe et ne dépend pas de ω ;
- (pour $\sigma^2(f) > 0$), $\frac{1}{\sigma\sqrt{n}} S_n f(\omega, \cdot)$ converge en loi pour la mesure m vers $\mathcal{N}(0, 1)$.

Dans l'exposé nous présenterons des situations où un TCL quenched peut être obtenu, en particulier dans le cas indépendant en présence d'un trou spectral, et dans le cas stationnaire pour $X = \mathbb{T}^2$ et certains choix de l'application T à valeurs dans $SL(2, \mathbb{Z})$. Ce dernier modèle peut, dans certains cas, être interprété comme une perturbation stationnaire des itérés d'un automorphisme.

Travaux en collaboration avec Stéphane Le Borgne et Mikhaël Roger.

Mouvement Brownien sur les groupes AN et fonctions de Whittaker

Philippe Bougerol (Université Paris 6)

Résumé

Il s'agit d'exposer des résultats récents de Reda Chhaibi concernant des liens entre les cristaux géométriques de Berenstein et Kazhdan et les fonctions de Whittaker.

Quasi-compacité des noyaux markoviens sur des espaces à poids. Lien avec l'ergodicité géométrique

Loïc Hervé (INSA Rennes)

Résumé

Soit P un noyau markovien sur un espace mesurable E , et soit V une fonction positive sur E . Nous présentons diverses hypothèses sous lesquelles l'opérateur P associé admet une action quasi-compacte sur l'espace à poids B_V constitué des fonctions de E dans \mathbb{C} vérifiant la condition $\sup_{x \in E} |f(x)|/V(x) < \infty$. Nous donnons également une borne supérieure pour le rayon spectral essentiel de P . Ces résultats nous permettent de calculer dans certains cas le trou spectral de P , c'est-à-dire la vitesse de convergence des itérés de P vers la probabilité invariante. Enfin nous donnons des applications aux chaînes de Markov discrètes et aux modèles itératifs lipschitziens.

Travail en collaboration avec Denis Guibourg et James Ledoux.

Remarques sur les chaînes de Markov conditionnées

Emmanuel Lesigne (Université de Tours)

Résumé

On étudie dans quels cas on peut donner un sens à la notion de chaîne de Markov conditionnée à rester dans un domaine de l'espace des états. On examine la situation abstraite, et celle des marches aléatoires où des calculs peuvent être menés.

Sur les processus de branchement en milieu markovien (d'après la thèse de Yinna Ye)

Marc Peigné (Université de Tours)

Résumé

Nous exposerons un résultat de Yinna Ye concernant le comportement asymptotique de la probabilité de survie d'un processus de branchement en milieu markovien. Cette étude est liée aux fluctuations des marches de Markov sur \mathbb{R} et nécessite une factorisation de type "Wiener-Hopf" dans le cadre markovien ; nous soulignerons les difficultés qui apparaissent alors et l'approche que Y. Ye a dû privilégier pour mener à bien son étude.

Modèle parabolique d'Anderson en temps discret avec un potentiel à queue lourde

Nicolas Pétrélis (Université de Nantes)

Résumé

Nous considérons une version du modèle parabolique d'Anderson en temps discret. Ce modèle permet par exemple d'étudier un polymère dirigé en dimension $(1 + d)$ en interaction avec un potentiel aléatoire, constant dans la direction privilégiée et i.i.d dans les d directions orthogonales. Le potentiel en chaque site est donné par une variable aléatoire positive à queue lourde (décroissance polynomiale). Nous prouvons que, lorsque la taille du polymère diverge, son extrémité libre se localise presque sûrement en un site qui, lui-même, s'éloigne de l'origine balistiquement. Nous donnons une caractérisation explicite du site de localisation ainsi que des trajectoires typiques du modèle.

Processus de branchement en environnement aléatoire et marches aléatoires

Vincent Bansaye (École Polytechnique)

Résumé

Les processus de branchement en environnement aléatoire sont des généralisations des processus de Galton-Watson où à chaque génération, un environnement est tiré de manière aléatoire. Ce dernier détermine la loi de reproduction des individus. La croissance et la survie de la population est intimement liée au comportement de la marche aléatoire associée aux effets moyens de l'environnement. Nous verrons en particulier que dans le cas de loi de reproduction géométrique (ou linéaire

fractionnaire), les théorèmes asymptotiques des processus de branchement s'obtiennent à partir de l'étude de cette marche aléatoire. Nous verrons également comment ces résultats se généralisent mais que pour décrire les comportements exceptionnels tels que les grandes déviations, l'étude de la marche aléatoire ne suffit plus.
