MARCHES ALÉATOIRES SUR LES GROUPES HYPERBOLIQUES

par **Peter Haïssinsky**

Soit Γ un groupe dénombrable que l'on munit de la topologie discrète et d'une mesure de probabilité μ. Si e désigne l'élément neutre de Γ, on construit la marche aléatoire $(Z_n)_n$ en posant $Z_0 = e$, puis, par récurrence, on choisit X_{n+1} selon la loi μ indépendamment de Z_n et on pose $Z_{n+1} = Z_n X_{n+1}$.

Le but est de comprendre le comportement asymptotique de $(Z_n)_n$. Dans la plupart des cas, on peut montrer que la marche est transiente, c'est-à-dire qu'elle quitte définitivement presque sûrement tout ensemble fini. On associe aussi deux caractéristiques numériques qui quantifient les propriétés de la marche : l'entropie asymptotique, h, qui ne dépend que de la loi μ, mesure la dispersion de la marche ; la vitesse de fuite, ℓ, mesure à quelle vitesse la marche part à l'infini, lorsque le groupe opère sur un espace métrique.

Lorsque l'on suppose que Γ est hyperbolique au sens de Gromov et muni d'une distance des mots d_m, on peut étudier les phénomènes à l'infini du groupe en utilisant son bord géométrique : c'est un compact $\partial\Gamma$ que l'on peut munir d'une famille de distances formant la jauge conforme. Parmi elles, les distances visuelles d_ε qui dépendent essentiellement d'un petit paramètre $\varepsilon > 0$ jouent un rôle particulier. En effet, il existe une mesure de Radon ρ sur $\partial\Gamma$ qui, pour chaque distance d_ε, est comparable à la mesure de Hausdorff de dimension v/ε, où v désigne l'entropie volumique de (Γ, d_m), et qui se comporte comme la mesure de Lebesgue dans un espace euclidien : la masse de toute boule $\mathcal{B}_\varepsilon(r) \subset \partial\Gamma$ de rayon r assez petit est comparable à $r^{v/\varepsilon}$.

Sous des hypothèses assez peu contraignantes sur Γ (hyperbolique) et sur μ, la marche tend presque sûrement vers un point $Z_\infty \in \partial\Gamma$. On considère la loi ν de Z_∞ que l'on appelle la mesure harmonique. Comprendre les comportements asymptotiques de $(Z_n)_n$ revient alors à étudier les propriétés de ν. Un des résultats principaux établis dans ces notes est le suivant.

Théorème. — Soit Γ un groupe hyperbolique non-élémentaire muni d'une mesure de probabilité μ. Soit d_ε une distance visuelle sur $\partial\Gamma$. Si μ est de support fini et symétrique et si son support engendre Γ, alors la dimension de la mesure harmonique vérifie

$$\mathrm{HD}(\nu) = \frac{h}{\varepsilon \ell}$$

où h désigne l'entropie asymptotique de la marche et ℓ sa vitesse de fuite. De plus, $h = \ell v$ si et seulement si ν est équivalente à ρ.

La dimension de la mesure ν quantifie la taille de l'ensemble des points de $\partial\Gamma$ atteints par la marche.

Un des intérêts de la démonstration repose sur la méthode utilisée qui consiste à adopter une approche géométrique en introduisant la distance de Green — une distance adaptée à la marche — et en travaillant sur ses propriétés. On illustre la plupart des notions rencontrées sur le groupe libre à d générateurs, $d \geq 2$, muni de la mesure uniforme sur ces générateurs.

Plan du texte. Les deux premières parties visent à introduire proprement les objets étudiés et à établir quelques-unes de leurs propriétés élémentaires. Ensuite, au § 3, on applique notre point de vue à l'étude du bord de Martin afin de l'identifier à un bord géométrique. Le paragraphe suivant est dévolu à la démonstration du théorème énoncé ci-dessus. Enfin, dans la dernière partie, on donne quelques applications de la distance de Green : la mesure stationnaire d'une marche de support fini sur un réseau non-uniforme de $PSL_2(\mathbb{R})$ est toujours singulière par rapport à la mesure de Lebesgue du cercle unité (Guivarc'h-Le Jan), la solution de la conjecture de Baum-Connes sans coefficients pour les groupes hyperboliques non-élémentaires (Lafforgue, Mineyev-Yu) et une approche de la conjecture de Cannon.

Notations. Nous reprenons l'essentiel des notations des autres articles de cet ouvrage. Le cardinal d'un ensemble E est noté $\#E$. Une distance sur un ensemble X est notée d_X et plus généralement d lorsqu'il n'y a pas de confusion. La boule ouverte de centre x et de rayon $r > 0$ est notée $\mathcal{B}(x, r)$. En général, Γ désigne un groupe dénombrable. Ses éléments sont notés γ s'ils sont vus comme opérant sur un ensemble, ou x, y, etc. s'ils sont considérés comme des points de l'ensemble Γ. Si Γ opère sur un espace métrique pointé (X, w), la fonction orbitale est définie par la formule

$$N_\Gamma(R) = \#\{\gamma \in \Gamma, \mathrm{dist}(w, \gamma w) \leq R\}\,.$$

La dimension de Hausdorff d'un espace métrique (X, d) est notée $\mathrm{HD}(X, d)$.

Les variables aléatoires seront notées par des majuscules de la fin de l'alphabet, p. ex. X_n, Y_n et Z_n ; on réserve les minuscules pour des objets déterministes.

Si a et b sont deux fonctions positives, on écrit $a \lesssim b$ ou $b \gtrsim a$ s'il existe une constante $u > 0$ indépendante de a et b telle que $a \leq ub$. De plus, on écrit $a \asymp b$ si $a \lesssim b$ et $b \lesssim a$. On utilise aussi les notations de Landau $O(\cdot)$ et $o(\cdot)$.

Remerciements. Ce sont des notes correspondant à un cours donné dans le cadre des « Regards croisés sur les marches aléatoires et la géométrie des groupes, en l'honneur d'Emile Le Page » organisés du lundi 26 septembre au vendredi 30 septembre 2011 sur l'île de Berder. Je remercie chaleureusement les organisateurs pour cette invitation. Cette version est légèrement plus longue que celle publiée dans la monographie de l'Enseignement Mathématique no. 43 *Géométrie Ergodique* éditée par Françoise Dal'Bo. Je tiens à remercier Pierre Mathieu pour ses conseils sur la rédaction de ces notes. J'ai profité de commentaires de Françoise Dal'Bo, Yves Derriennic, François Ledrappier et Frédéric Mathéus sur une première version de ce texte ; je leur en suis très reconnaissant. Je souhaite aussi remercier Sébastien Gouëzel pour avoir repéré et corrigé une erreur dans la démonstration de la proposition 4.13 : le lemme 4.16 lui est dû.

1. PREMIÈRES PROPRIÉTÉS DES MARCHES ALÉATOIRES

Soient Γ un groupe dénombrable muni de la topologie discrète et μ une mesure borélienne de probabilité sur Γ, c'est-à-dire $\mu \in \ell^1(\Gamma, \mathbb{R}_+)$ et $\sum_{x\in\Gamma} \mu(x) = 1$.

Hypothèses permanentes. Les hypothèses qu'il faut avoir en tête sont les « hypothèses permanentes » données ci-dessous, qui seront toujours réputées vérifiées par défaut. Cependant, les résultats seront énoncés sous des conditions plus faibles lorsque ce sera possible.

- Le groupe Γ est *non-moyennable*, c'est-à-dire qu'il n'existe pas de forme linéaire continue de norme 1 positive sur $\ell^\infty(\Gamma)$ et invariante par Γ.
- La mesure μ est *symétrique* c'est-à-dire $\mu(x) = \mu(x^{-1})$ pour tout $x \in \Gamma$.
- Le support $\operatorname{supp} \mu = \{x \in \Gamma, \mu(x) \neq 0\}$ engendre Γ.

1.1. Action de groupes

Dans toutes ces notes, les groupes étudiés opèrent sur des espaces métriques. Nos rassemblons ici quelques définitions et notations qui seront utilisées par la suite.

Soit (X, d) un espace métrique. On dit que cet espace est *propre* si les boules fermées de rayon fini sont compactes. Une *courbe géodésique* est une courbe isométrique à un intervalle I de $\mathbb{R}$. Elle est donnée par une application $g : I \to X$ telle que $d(g(t), g(s)) = |t-s|$ pour $s, t \in I$. On parle de segment lorsque I est compact, de rayon si I a un seul bout, p. ex. $I = \mathbb{R}_+$, et de géodésique lorsque $I = \mathbb{R}$. Si deux points quelconques de X sont joints par un segment géodésique, alors X est un *espace géodésique*.

Une action d'un groupe Γ sur X sera donnée par une représentation gauche $\rho : \Gamma \to \operatorname{Isom}(X)$ dans le groupe d'isométries de X : pour tout $x \in X$, tous $\gamma, \gamma' \in \Gamma$, $\rho(\gamma \cdot \gamma')(x) = (\rho(\gamma) \circ \rho(\gamma'))(x)$ et, pour tous $x, y \in X$ et tout $\gamma \in \Gamma$, $d(\rho(\gamma)(x), \rho(\gamma)(y)) = d(x, y)$. Par abus de notations, et même si l'action n'est pas fidèle, nous considérerons les éléments γ de Γ comme des isométries de X et nous noterons $\gamma(x)$ pour l'action de γ sur $x \in X$ au lieu de $\rho(\gamma)(x)$.

DÉFINITION 1.1 (Action géométrique). — Un groupe Γ opère *géométriquement* sur un espace métrique propre X si

(1) chaque élément opère par isométrie ;

(2) l'action est proprement discontinue (pour tous compacts K et L de X, le nombre d'éléments $\gamma \in \Gamma$ du groupe tels que $\gamma(K) \cap L \neq \emptyset$ est fini) ;

(3) l'action est cocompacte.

Par exemple, si Γ est de type fini et S est une famille finie et symétrique de générateurs de Γ, on peut munir Γ d'une distance invariante par translation à gauche de Γ : *la métrique des mots* (gauche) associée à S. La distance $d_S(x, x')$ entre deux éléments $x, x' \in \Gamma$ est le nombre minimal de générateurs dans S nécessaires pour écrire $x^{-1}x'$. On obtient une réalisation géométrique en considérant le graphe de Cayley $\mathcal{G}$ associé à S : les sommets sont les éléments du groupe, et une paire $(x, x') \in \Gamma \times \Gamma$ définit une arête si $x^{-1}x' \in S$. En munissant $\mathcal{G}$ de la métrique de longueur qui rend chaque arête isométrique au segment $[0, 1]$, on fait de $\mathcal{G}$ un espace géodésique et propre, et l'action de Γ sur lui-même par translations à gauche induit une action géométrique sur $\mathcal{G}$. La restriction de cette distance sur les sommets est isométrique à (Γ, d_S).

Il s'avère qu'un groupe n'admet essentiellement qu'une seule action géométrique au sens suivant :

DÉFINITIONS 1.2 (Quasi-isométrie, quasi-géodésique). — Soient X, Y des espaces métriques, et $\lambda \geq 1$, $c \geq 0$ deux constantes. Une application $f : X \to Y$ est un plongement (λ, c)-quasi-isométrique si, pour tous $x, x' \in X$, on a

$$\frac{1}{\lambda} d_X(x, x') - c \leq d_Y(f(x), f(x')) \leq \lambda d_X(x, x') + c. \tag{1}$$

On dit que f est une (λ, c)-quasi-isométrie s'il existe $g : Y \to X$ qui vérifie aussi (1) et telle que, pour tout $x \in X$, $d_X(g(f(x)), x) \leq c$. De manière équivalente, on demande que f soit *c-cobornée*, c'est-à-dire que le c-voisinage de $f(X)$ recouvre Y.

Une quasigéodésique est l'image d'un intervalle de $\mathbb{R}$ par un plongement quasi-isométrique.

LEMME 1.3 (Švarc-Milnor). — Soient X un espace quasigéodésique et propre, et Γ un groupe qui opère géométriquement sur X. Alors Γ est de type fini et X est quasi-isométrique à n'importe quel graphe de Cayley localement fini de Γ.

On dira par extension qu'un espace est quasi-isométrique à un groupe de type fini s'il est quasi-isométrique à l'un de ses graphes de Cayley localement fini.

1.2. **Distance de Green**

On considère l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ suivant. On note $\Omega = \Gamma^{\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ muni de la tribu borélienne produit $\mathcal{A}$ et de la probabilité $\mathbb{P} = \mu^{\otimes(\mathbb{N}\setminus\{0\})}$. La suite des projections $(X_n)_{n\geq 1}$ définit une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi μ.

On associe la marche droite $(Z_n)_{n\geq 0}$ partant de l'élément neutre e en posant $Z_0 = e$ et $Z_{n+1} = Z_n X_{n+1}$. La marche partant de $x \in \Gamma$ est alors donnée par $(xZ_n)_{n\geq 0}$. Il est parfois commode d'introduire l'espace des trajectoires $\mathcal{T} = \Gamma^{\mathbb{N}}$, muni de la tribu borélienne produit, et de considérer la famille de probabilités $(\mathbb{P}^x)_{x\in\Gamma}$ définies comme image de $\mathbb{P}$ par l'application $\omega \mapsto (xZ_n)_{n\geq 0}$. Cette famille de lois définit une chaîne de Markov (irréductible) homogène de probabilité de transition $p(x,y) = \mu(x^{-1}y)$.

On obtient une action à gauche de Γ sur $\mathcal{T}$ en posant $\gamma \cdot (z_n)_n = (\gamma z_n)_n$.

Pour chaque $n \geq 1$, la loi de Z_n est donnée par la puissance $n$ième du produit de convolution μ^n de μ. On rappelle que si Γ opère sur un espace mesuré (X, ν), alors le produit de convolution $\mu \star \nu$ est la loi image de $\mu \otimes \nu$ par cette action : pour toute fonction mesurable bornée h sur X, on a

$$\mu \star \nu(h) = \sum_{\gamma\in\Gamma} \mu(\gamma) \int_X h(\gamma \cdot x) d\nu(x) \,.$$

Lemme 1.4. — Pour $m, n \geq 1$ et $x \in \Gamma$, on a

$$\mu^{m+n}(x) = \sum_{y\in\Gamma} \mu^m(y) \cdot \mu^n(y^{-1}x) \,.$$

Démonstration. — Calculons la loi de Z_{m+n} ; soit $x \in \Gamma$,

$$\mathbb{P}[Z_{m+n} = x] = \sum_{y\in\Gamma} \mathbb{P}[Z_{m+n} = x; Z_m = y] = \sum_{y\in\Gamma} \mathbb{P}[Z_m^{-1} Z_{m+n} = y^{-1}x; Z_m = y] \,;$$

or, $Z_m^{-1} Z_{m+n} = X_{m+1} \ldots X_{m+n}$ donc $Z_m^{-1} Z_{m+n}$ est indépendante de Z_m et de même loi que Z_n :

$$\mathbb{P}[Z_{m+n} = x] = \sum_{y\in\Gamma} \mathbb{P}[Z_m^{-1} Z_{m+n} = y^{-1}x] \cdot \mathbb{P}[Z_m = y] = \sum_{y\in\Gamma} \mu^n(y^{-1}x) \cdot \mu^m(y) \,.$$

□

L'hypothèse de non-moyennabilité est utilisée pour avoir l'estimation suivante sur les lois des positions de la marche.

Théorème 1.5 (Kesten). — *Si Γ est non-moyennable, il existe $m > 0$ telle que $\mu^n(x) \leq e^{-mn}$ pour tout $n \geq 1$ et tout $x \in \Gamma$.*

Ce résultat implique notamment que la marche est *transiente*, c'est-à-dire qu'elle quitte définitivement presque sûrement tout sous-ensemble fini de Γ. Cela nous permet d'introduire la *fonction de Green* $G(x,y)$ qui compte le nombre moyen de visites d'un site $y \in \Gamma$

de la marche partant de x :

$$G(x,y) = \sum_{n\geq 0} \mathbb{P}[xZ_n = y] = \delta_x(y) + \sum_{n\geq 1} \mu^n(x^{-1}y)\,.$$

L'action diagonale par multiplication à gauche de Γ laisse invariante G : pour tout $\gamma \in \Gamma$, $G(\gamma x, \gamma y) = G(x,y)$.

Si $A \subset \Gamma$ et $x \in \Gamma$, la variable aléatoire $\tau_A^x = \min\{n \geq 0,\ xZ_n \in A\}$ définit un temps d'arrêt. En particulier, si on considère la probabilité d'atteinte $F(x,y) = \mathbb{P}[\tau_y^x < \infty]$, alors on a

$$G(x,y) = F(x,y)G(y,y) = F(x,y)G(e,e)\,.$$

En effet, à $n \geq k$ fixés, on a

$$(\tau_y^x = k; xZ_n = y) = (xZ_k = y; xZ_j \neq y, 0 \leq j < k; yX_{k+1}\dots X_n = y)$$

donc

$$\mathbb{P}[\tau_y^x = k; xZ_n = y] = \mathbb{P}[\tau_y^x = k]\cdot \mathbb{P}[yZ_{n-k} = y]$$

et

$$\begin{aligned} G(x,y) &= \sum_{n\geq 0}\sum_{0\leq k\leq n} \mathbb{P}[\tau_y^x = k; xZ_n = y] = \sum_{n\geq 0}\sum_{0\leq k\leq n} \mathbb{P}[\tau_y^x = k]\cdot\mathbb{P}[yZ_{n-k} = y] \\ &= \sum_{k\geq 0} \mathbb{P}[\tau_y^x = k] \sum_{n\geq k} \mathbb{P}[yZ_{n-k} = y] \\ &= \sum_{k\geq 0} \mathbb{P}[\tau_y^x = k] G(y,y) = F(x,y)G(y,y)\,. \end{aligned}$$

Définition 1.6 (Distance de Green). — Soit (Γ,μ) un groupe dénombrable muni d'une mesure de probabilité symétrique dont le support engendre Γ. On définit la *distance de Green* par la formule

$$d_G(x,y) \overset{\text{def.}}{=} -\operatorname{Ln} F(x,y) = \operatorname{Ln} G(e,e) - \operatorname{Ln} G(x,y)\,.$$

Cette distance a été introduite par S. Blachère et S. Brofferio [BB] pour des marches de support fini.

Lemme 1.7. — Soit μ une mesure de probabilité symétrique sur Γ qui définit une marche transiente. La fonction $d_G(\cdot,\cdot)$ est une distance sur Γ invariante sous l'action gauche de Γ sur lui-même.

Démonstration. — Tout d'abord, d_G est bien positive puisque $F(x,y)$ est bornée par 1. Comme le support de μ engendre Γ, on a, pour tous x, y, $F(x,y) > 0$ donc $d_G(x,y) < \infty$.

La symétrie de μ implique la symétrie de G et de F donc de d_G. On a bien $F(x,x) = 1$, donc $d_G(x,x) = 0$ pour tout $x \in \Gamma$. Réciproquement, si $d_G(x,y) = 0$ alors $F(x,y) = F(y,x) = 1$, ce qui, avec l'hypothèse de transience de la marche, implique $x = y$.

L'inégalité triangulaire $d_G(x,z) \leq d_G(x,y) + d_G(y,z)$ se déduit de l'inégalité

$$\mathbb{P}[\tau_z^x < \infty] \geq \mathbb{P}[\tau_y^x < \infty]\mathbb{P}[\tau_z^y < \infty]\,.$$

L'invariance de $F(\cdot,\cdot)$ par multiplication à gauche implique l'invariance de $d_G(\cdot,\cdot)$. □

LEMME 1.8. — Soit μ une mesure de probabilité symétrique sur Γ qui définit une marche transiente. Alors (Γ, d_G) est un espace métrique propre. Plus précisément, les boules de rayon fini sont finies.

La distance de Green définit donc la topologie discrète sur Γ.

Démonstration. — Il suffit de montrer que $G(e,x)$ tend vers 0 quand x quitte tout ensemble fini. Pour cela, on montre d'abord $\mu^{2n}(x), \mu^{2n+1}(x) \leq \mu^{2n}(e)$ pour tous $x \in \Gamma$ et $n \geq 1$, en utilisant la symétrie de μ.

Soit $n \geq 1$; par le lemme 1.4 et l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\mu^{2n}(x) = \sum_{y\in\Gamma} \mu^n(y)\mu^n(y^{-1}x) \leq \sqrt{\sum_{y\in\Gamma}\mu^n(y)^2}\sqrt{\sum_{y\in\Gamma}\mu^n(y^{-1}x)^2}\,.$$

Comme on somme sur le même ensemble, il vient

$$\sum_{y\in\Gamma}\mu^n(y)^2 = \sum_{y\in\Gamma}\mu^n(y^{-1}x)^2$$

et la symétrie de μ implique

$$\sum_{y\in\Gamma}\mu^n(y)^2 = \sum_{y\in\Gamma}\mu^n(y)\mu^n(y^{-1}) = \mu^{2n}(e)\,.$$

Du coup, $\mu^{2n}(x) \leq \mu^{2n}(e)$. De même,

$$\mu^{2n+1}(x) = \sum_{y\in\Gamma}\mu(y)\mu^{2n}(y^{-1}x) \leq \sum_{y\in\Gamma}\mu(y)\mu^{2n}(e) \leq \mu^{2n}(e)\,.$$

Comme la marche est transiente, la valeur de $G(e,e)$ est finie. Donc, étant donné $\varepsilon > 0$, on peut trouver $k \geq 1$ de sorte que

$$\sum_{n\geq k}\mu^{2n}(e) \leq \sum_{n\geq 2k}\mu^n(e) \leq \varepsilon\,.$$

Par ailleurs, puisque μ^n est une mesure de probabilité sur un ensemble dénombrable pour tout n, il existe un sous-ensemble fini K de Γ tel que, pour tout $n \in \{0,\dots,2k-1\}$, on ait $\mu^n(K) \geq 1 - \varepsilon/(2k)$. Par conséquent, si $x \notin K$, alors

$$G(e,x) = \sum_{0\leq n<2k}\mu^n(x) + \sum_{n\geq 2k}\mu^n(x) \leq \sum_{0\leq n<2k}\mu^n(\Gamma\setminus K) + 2\sum_{n\geq k}\mu^{2n}(e) \leq \varepsilon + 2\varepsilon\,.$$

Ceci conclut la démonstration du lemme. □

1.3. Point de vue dynamique

On considère le décalage $\sigma : \Omega \to \Omega$ défini par $(\sigma(\omega))_n = \omega_{n+1}$ pour tout $n \geq 1$. La propriété principale est la suivante

Proposition 1.9. — *La mesure $\mathbb{P}$ est invariante et ergodique sous l'action de σ, c'est-à-dire, pour tout borélien $A \subset \Omega$, $\mathbb{P}[\sigma^{-1}(A)] = \mathbb{P}[A]$ et, si $\sigma^{-1}(A) = A$ alors $\mathbb{P}[A](1-\mathbb{P}[A]) = 0$.*

Démonstration. — Soit $A \subset \Omega$ un borélien invariant. Nous allons montrer que $\mathbb{P}[A] = \mathbb{P}^2[A]$, ce qui nous permettra de conclure.

On se fixe $\varepsilon > 0$ et on considère un sous-ensemble B formé d'un nombre fini de cylindres tel que $\mathbb{P}[A\Delta B] \leq \varepsilon$, où Δ désigne la différence symétrique. Soit n la longueur du plus grand cylindre formant B. On utilise B pour obtenir l'identité suivante :

$$\mathbb{P}[B \cap \sigma^{-(n+1)}(B)] = \mathbb{P}[B] \cdot \mathbb{P}[\sigma^{-(n+1)}(B)] = \mathbb{P}[B]^2$$

par invariance et des faits (i) $\sigma^{-(n+1)}(B) = \Gamma^{(n+1)} \times B$ et (ii) $\mathbb{P}$ est une mesure produit.

Nous utiliserons à répétition que, si E_1 et E_2 sont mesurables, alors $|\mathbb{P}[E_1] - \mathbb{P}[E_2]| \leq \mathbb{P}[E_1 \Delta E_2]$.

On écrit

$$\begin{aligned}
|\mathbb{P}[A] - \mathbb{P}^2[A]| &\leq |\mathbb{P}[A] - \mathbb{P}^2[B]| + |\mathbb{P}[B]^2 - \mathbb{P}[A]^2| \\
&\leq |\mathbb{P}[A] - \mathbb{P}[B \cap \sigma^{-(n+1)}(B)]| + 2|\mathbb{P}[A] - \mathbb{P}[B]| \\
&\leq |\mathbb{P}[A] - \mathbb{P}[B \cap \sigma^{-(n+1)}(B)]| + 2\varepsilon\,.
\end{aligned}$$

Or, par invariance de A,

$$\begin{aligned}
|\mathbb{P}[A] - \mathbb{P}[B \cap \sigma^{-(n+1)}(B)]| &\leq |\mathbb{P}[A \cap \sigma^{-(n+1)}(A)] - \mathbb{P}[B \cap \sigma^{-(n+1)}(A)]| \\
&\quad + |\mathbb{P}[B \cap \sigma^{-(n+1)}(A)] - \mathbb{P}[B \cap \sigma^{-(n+1)}(B)]| \\
&\leq \mathbb{P}[A\Delta B] + \mathbb{P}[\sigma^{-(n+1)}(A) \Delta \sigma^{-(n+1)}(B)] \\
&\leq \mathbb{P}[A\Delta B] + \mathbb{P}[\sigma^{-(n+1)}(A\Delta B)] \\
&\leq 2\mathbb{P}[A\Delta B] \leq 2\varepsilon\,.
\end{aligned}$$

Par conséquent, on a obtenu $|\mathbb{P}[A] - \mathbb{P}^2[A]| \leq 4\varepsilon$ avec $\varepsilon > 0$ arbitraire. □

Cela nous permet d'appliquer en particulier le théorème sous-additif de Kingman :

Théorème 1.10 (Kingman). — *Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace de probabilité et $T : \Omega \to \Omega$ une transformation préservant la mesure. Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions mesurables sur Ω sous-additives au sens suivant : pour tous $m, n \geq 0$, on a*

$$f_{m+n} \leq f_m \circ T^n + f_n\,.$$

Si $f_1 \in L^1$, alors la suite $(f_n/n)_n$ est convergente presque partout vers une fonction f telle que

$$\int_\Omega f d\mu = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\int_\Omega f_n d\mu = \inf_{n\geq 1} \frac{1}{n}\int_\Omega f_n d\mu\,.$$

Si cette limite est finie (elle pourrait valoir $(-\infty)$), alors la convergence a aussi lieu dans L^1. Enfin, si de plus (T,μ) est ergodique alors f est constante presque partout.

Nous donnons deux applications aux marches aléatoires de ce théorème.

1.3.1. *Entropie.* On dit qu'une marche aléatoire est *d'entropie finie* si l'entropie de la mesure μ

$$H(\mu) \stackrel{\text{def.}}{=} -\sum_{x\in\Gamma} \mu(x) \operatorname{Ln} \mu(x)$$

est finie. On peut montrer que la suite numérique $(H(\mu^n))_n$ est sous-additive (voir ci-dessous), ce qui permet de définir *l'entropie asymptotique de la marche*

$$h \stackrel{\text{def.}}{=} \inf_{n\geq 1} \frac{1}{n} H(\mu^n)\,.$$

Proposition 1.11. — *Supposons μ d'entropie finie, alors*

$$h = \lim_{n\to\infty} \frac{-1}{n} \operatorname{Ln} \mu^n(Z_n)$$

presque sûrement et dans L^1.

Remarque 1.12. — L'entropie métrique de σ est justement $H(\mu)$.

Démonstration. — Posons, pour $\omega \in \Omega$ et $n \geq 1$,

$$h_n(\omega) = -\operatorname{Ln} \mathbb{P}[Z_n = \omega_1\omega_2\ldots\omega_n]\,.$$

Soient $m,n \geq 1$ et $\omega\in\Omega$. Puisque

$$(Z_{m+n} = \omega_1\omega_2\ldots\omega_{m+n}) \supset (Z_m = \omega_1\omega_2\ldots\omega_m; Z_m^{-1}Z_{m+n} = \omega_{m+1}\ldots\omega_{m+n}),$$

on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[Z_{m+n} = \omega_1\omega_2\ldots\omega_{m+n}] &\geq \mathbb{P}[Z_m = \omega_1\omega_2\ldots\omega_m; Z_m^{-1}Z_{m+n} = \omega_{m+1}\ldots\omega_{m+n}]\\
&\geq \mathbb{P}[Z_m = \omega_1\omega_2\ldots\omega_m]\cdot\mathbb{P}[Z_m^{-1}Z_{m+n} = \omega_{m+1}\ldots\omega_{m+n}]\\
&\geq \mathbb{P}[Z_m = \omega_1\omega_2\ldots\omega_m]\cdot\mathbb{P}[Z_n = \omega_{m+1}\ldots\omega_{m+n}],
\end{aligned}$$

on obtient $h_{m+n}(\omega) \leq h_m(\omega) + (h_n\circ\sigma^m)(\omega)$. Par ailleurs

$$\mathbb{E}[h_1] = -\sum_{x\in\Gamma} \operatorname{Ln} \mathbb{P}[Z_1 = x]\mu(x) = H(\mu) < \infty$$

donc le théorème 1.10 s'applique. Comme la suite $(\frac{-1}{n}\operatorname{Ln}\mu^n(Z_n))_n$ est positive, la convergence a aussi lieu dans L^1. On remarque aussi que, pour tout $n\geq 1$, on a $\mathbb{E}[h_n] = H(\mu^n)$. □

La notion d'entropie est très utile pour étudier le bord de Poisson de (Γ, μ), voir notamment [KV, Kai2]. On peut en déduire l'interprétation suivante :

Proposition 1.13. — *Soit $\varepsilon > 0$.*
- *Il existe une suite d'ensembles finis $(A_n)_n$ de Γ telle que $\mathrm{Ln}\,\#A_n \leq (h+\varepsilon)n$ et, presque sûrement, $Z_n \in A_n$ pour tout n assez grand.*
- *Pour toute suite d'ensembles finis $(B_n)_n$ de Γ telle que $\mathrm{Ln}\,\#B_n \leq (h-\varepsilon)n$, pour presque toute trajectoire $(Z_n)_n$ de la marche, on a $Z_n \in B_n$ pour au plus un nombre (aléatoire) fini de temps n.*

On voit ainsi l'entropie asymptotique comme une mesure de la dispersion de la marche quand n tend vers l'infini.

Démonstration. — Soit $\varepsilon > 0$. Posons $A_n = \{\gamma \in \Gamma,\ \mu^n(\gamma) \geq e^{-n(h+\varepsilon)}\}$. D'une part, on a

$$1 \geq \mu^n(A_n) \geq \sum_{\gamma \in A_n} \mu^n(\gamma) \geq \#A_n e^{-n(h+\varepsilon)}\,,$$

donc $\mathrm{Ln}\,\#A_n \leq (h+\varepsilon)n$.

D'autre part, la limite presque sûre vers h implique que $Z_n \in A_n$ presque sûrement pour n assez grand.

On choisit B_n de sorte que $\mathrm{Ln}\,\#B_n \leq (h-\varepsilon)n$ et on considère

$$\Omega_n = \{\omega \in \Omega,\ \mu^n(Z_n) \leq e^{-(h-\varepsilon/2)n}\}$$

de sorte que, comme ci-dessus, presque toute trajectoire vit dans Ω_n à partir d'un certain rang. Cependant, on a

$$\mathbb{P}[\omega \in \Omega_n,\ Z_n \in B_n] \leq \#B_n \cdot e^{-(h-\varepsilon/2)n} \leq e^{-(\varepsilon/2)n}\,.$$

Par conséquent, le lemme de Borel-Cantelli affirme que $(Z_n)_n$ visite au plus un nombre fini de B_n presque sûrement. □

1.3.2. *Vitesse de fuite.* On suppose que Γ opère par isométries sur un espace métrique pointé (X, w). Nous pouvons alors faire agir la marche sur X afin d'obtenir une trajectoire aléatoire $(Z_n(x))_n$ à valeurs dans X, où $x \in X$. On rappelle que l'action est une représentation gauche de Γ et que la marche est droite, ce qui préserve la propriété markovienne de la marche. On a en particulier $Z_{n+1}(x) = Z_n(X_{n+1}(x))$ pour tout $x \in X$. On dit que μ a un *premier moment fini* si

$$\mathbb{E}[d(w, X_1(w))] = \sum_{\gamma \in \Gamma} d(w, \gamma(w))\mu(\gamma) < \infty\,.$$

Proposition 1.14. — *Supposons μ de premier moment fini. Alors, pour tout $x \in X$, la limite*

$$\ell \stackrel{def.}{=} \lim \frac{1}{n} d(x, Z_n(x))$$

existe presque sûrement et dans L^1, et ne dépend ni de $x \in X$ ni de $\omega \in \Omega$. On l'appelle la vitesse de fuite de la marche dans la métrique d.

La vitesse de fuite de la marche dans la distance de Green joue un rôle important dans ce travail. Elle est notée ℓ_G tout au long du texte.

Démonstration. — On remarque tout d'abord que si $x, y \in X$ et $n \geq 1$, alors

$$|d(x, Z_n(x)) - d(y, Z_n(y))| \leq d(x, y) + d(Z_n(x), Z_n(y)) \leq 2d(x, y)$$

donc on a $\mathbb{E}[d(x, Z_n(x))] < \infty$ pour tout x et la limite de $(d(x, Z_n(x))/n)_n$, si elle existe, sera indépendante de $x \in \Gamma$.

Par l'inégalité triangulaire, si $m, n \geq 1$, alors $d(x, Z_{m+n}(x)) \leq d(x, Z_m(x)) + d(Z_m(x), Z_{m+n}(x))$. Or, puisque Γ opère par isométries, on a aussi $d(Z_m(x), Z_{m+n}(x)) = d(x, Z_m^{-1} Z_{m+n}(x))$. Du coup,

$$L_{m+n}(\omega) \leq L_m(\omega) + L_n(\sigma^m(\omega))$$

où on a posé $L_n(\omega) = d(x, \omega_1 \ldots \omega_n(x))$ pour $\omega \in \Omega$. Donc le théorème de Kingman s'applique pour montrer l'existence de ℓ. La limite a bien lieu dans L^1 puisque la suite est positive. $\square$

Remarque 1.15. — Sous les conditions de la proposition 1.14, on a aussi, pour tout $x \in X$,

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} d(Z_n(x), Z_{n+1}(x)) = 0$$

presque sûrement. En effet, en fixant $\varepsilon > 0$:

$$\begin{aligned}
\sum_{n \geq 0} \mathbb{P}[d(Z_n(x), Z_{n+1}(x)) \geq \varepsilon n] &= \sum_{n \geq 0} \mathbb{P}[d(x, X_{n+1}(x)) \geq \varepsilon n] \\
&= \sum_{n \geq 0} \mathbb{P}[d(x, X_1(x)) \geq \varepsilon n] \\
&\leq \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\infty \mathbb{P}[d(x, X_1(x)) \geq t] dt \\
&\leq \frac{1}{\varepsilon} \mathbb{E}[d(x, X_1(x))] \,.
\end{aligned}$$

Donc le lemme de Borel-Cantelli permet de conclure.

1.3.3. *Inégalité fondamentale.* On suppose toujours que Γ opère par isométries sur un espace métrique pointé (X, w). On note

$$v \stackrel{\text{def.}}{=} \limsup_{R\to\infty} \frac{1}{R} \operatorname{Ln} N_\Gamma(R) = \limsup_{R\to\infty} \frac{1}{R} \operatorname{Ln} \#\{\gamma \in \Gamma, \operatorname{dist}(w, \gamma w) \leq R\}\,.$$

PROPOSITION 1.16. — *Supposons μ de premier moment fini et v fini. Alors μ est d'entropie finie et on a l'inégalité fondamentale*

$$h \leq \ell v\,.$$

Notons que h est une quantité qui ne dépend que du groupe et de la loi μ et v est une quantité qui ne dépend que de l'action du groupe sur X, alors que ℓ dépend à la fois de la marche et de la distance de X. L'idée de la démonstration, lorsque μ est de support fini, est la suivante. Au temps n, Z_n se trouve approximativement sur la sphère de rayon ℓn, ce qui fait environ $e^{n\ell v}$ positions possibles. Or l'entropie d'une mesure de support fini est maximale pour la mesure uniforme, donc, en première approximation, on obtient $H(\mu^n) \leq n\ell v$, d'où $h \leq \ell v$.

Démonstration. — Montrons tout d'abord que μ est d'entropie finie. On écrit

$$H(\mu) = \int_0^\infty \mu\left(\{\mu(\gamma) \leq e^{-t}\}\right) dt$$

et on découpe $\{\mu(\gamma) \leq e^{-t}\}$ selon que $d(w, \gamma(w)) \leq at$ ou non, où $a > 0$ est une constante à déterminer.

Soit $\varepsilon > 0$; si t est assez grand, alors $\#\mathcal{B}(w, at) \leq e^{at(v+\varepsilon)}$ et donc on a

$$\mu\left(\{\mu(\gamma) \leq e^{-t}; d(w, \gamma(w)) \leq at\}\right) \leq \#\mathcal{B}(w, at)e^{-t} \leq e^{[a(v+\varepsilon)-1]t}\,;$$

par ailleurs, on a

$$\mu\left(\{\mu(\gamma) \leq e^{-t}; d(w, \gamma(w)) \geq at\}\right) \leq \mu\left(\{d(w, \gamma(w)) \geq at\}\right)$$

donc

$$H(\mu) \leq \int_0^\infty e^{[a(v+\varepsilon)-1]t} dt + \int_0^\infty \mu\left(\{d(w, \gamma(w)) \geq at\}\right) dt\,.$$

Par conséquent, si on choisit $a > 0$ assez petit pour que $a(v + \varepsilon) < 1$ alors

$$H(\mu) \lesssim 1 + \mathbb{E}[d(w, Z_1(w))] < \infty\,.$$

Comme μ est de premier moment fini, la vitesse de fuite de la marche ℓ est bien définie. On considère maintenant $\mathcal{B}(w, (\ell + \varepsilon)n)$. D'après la proposition 1.14, on a $Z_n \in \mathcal{B}(w, (\ell + \varepsilon)n)$ presque sûrement et $\#\mathcal{B}(w, (\ell + \varepsilon)n) \leq \exp(\ell + \varepsilon)(v + \varepsilon)n$ pour n assez grand. Donc, en appliquant la contraposée de la proposition 1.13 (2), on obtient

$$h - \varepsilon \leq (\ell + \varepsilon)(v + \varepsilon)\,.$$

L'arbitraire sur $\varepsilon > 0$ nous conduit à $h \leq \ell v$. $\square$

1.4. Le cas du groupe libre

Nous illustrons les notions abordées dans ce chapitre par une situation particulièrement simple où quasiment tous les calculs peuvent être conduits. Considérons pour cela le groupe libre engendré par $d \geq 2$ générateurs $a_1, \ldots, a_d$, que l'on désigne par $\mathbb{F}_d$. Le graphe de Cayley associé est un arbre régulier infini où chaque sommet a $2d$ voisins. On considère la distance de longueur d qui rend chaque arête isométrique au segment $[0,1]$. On munit $\mathbb{F}_d$ de la loi uniforme μ portée par les générateurs et leurs inverses : on a donc $\mu(a_j^{\pm 1}) = 1/2d$.

Ce groupe est un archétype de groupe non-moyennable, donc la marche est automatiquement transiente. On peut consulter [Woe, pp. 9-10] pour une démonstration « à la main ».

PROPOSITION 1.17. — *Sous les conditions ci-dessus, on a*

$$d_G(x,y) = d(x,y)\,\mathrm{Ln}(2d-1),$$

$h = (1-1/d)\,\mathrm{Ln}(2d-1)$, $\ell = 1-1/d$ *et* $v = \mathrm{Ln}(2d-1)$. *En particulier, l'inégalité fondamentale est une égalité dans ce cas précis.*

Démonstration. — Comme un arbre est uniquement connexe par arcs et comme la marche est au plus proche voisin, on en déduit que si $x, y, z \in \mathbb{F}_d$ et y est sur le segment géodésique $[x,z]$, alors une marche qui va de x à z doit passer par y. Cela se traduit par l'identité $F(x,z) = F(x,y)F(y,z)$. En utilisant le rôle symétrique des générateurs et en posant $p = F(e,a_1)$, on en déduit $F(x,y) = p^{d(x,y)}$. Il reste à déterminer p.

On calcule p en fonction de la position de la marche au temps 1 :

$$F(e,a_1) = \mathbb{P}[\tau_{a_1} < \infty; Z_1 \neq a_1] + \mathbb{P}[\tau_{a_1} < \infty; Z_1 = a_1]\,.$$

Or, par la propriété de Markov et la forme de F, si $Z_1 \neq a_1$, alors $d(Z_1, a_1) = 2$, donc

$$\mathbb{P}[\tau_{a_1} < \infty; Z_1 \neq a_1] = p^2 \mathbb{P}[Z_1 \neq a_1] = \left(1 - \frac{1}{2d}\right) p^2\,;$$

par ailleurs, on a $\mathbb{P}[\tau_{a_1} < \infty; Z_1 = a_1] = \mathbb{P}[Z_1 = a_1] = 1/(2d)$. Par conséquent, on trouve

$$p = (1 - 1/(2d))p^2 + 1/(2d).$$

On résoud et on trouve

$$p = \frac{d \pm (d-1)}{2d-1}\,.$$

Comme la marche est transiente, on doit avoir $p = 1/(2d-1)$, ce qui nous fournit d_G.

Pour la vitesse de fuite, on calcule $\mathbb{E}[d(e, Z_{n+1})] - \mathbb{E}[d(e, Z_n)]$. Si $Z_n = e$, alors forcément $d(e, Z_{n+1}) = 1$ et $\mathbb{E}[(d(e,Z_{n+1}) - (d(e,Z_n))\chi_{Z_n=e}] = \mathbb{P}[Z_n = e]$. Sinon, on a $(2d-1)$ cas avec $d(e,Z_{n+1}) = d(e,Z_n) + 1$ et un seul avec $d(e,Z_{n+1}) = d(e,Z_n) - 1$. Du coup, on obtient

$$\mathbb{E}[(d(e,Z_{n+1}) - (d(e,Z_n))\chi_{Z_n \neq e}] = \mathbb{P}[Z_n \neq e]\left(\frac{2d-1}{2d} - \frac{1}{2d}\right) = \mathbb{P}[Z_n \neq e]\left(1 - \frac{1}{d}\right).$$

On en déduit

$$\mathbb{E}[d(e, Z_{n+1})] - \mathbb{E}[d(e, Z_n)] = \mathbb{P}[Z_n = e] + \mathbb{P}[Z_n \neq e]\left(1 - \frac{1}{d}\right).$$

En passant à la limite et en appliquant le théorème de Cesàro, on trouve

$$\ell = \lim \mathbb{E}[d(e, Z_{n+1})] - \mathbb{E}[d(e, Z_n)] = 1 - \frac{1}{d}.$$

Si on calcule la vitesse de fuite ℓ_G de la marche dans la distance de Green, on obtient $\ell_G = (1 - 1/d)\,\mathrm{Ln}(2d-1)$. Or, le théorème 3.2 implique $h = \ell_G$.

Enfin, pour le volume, on remarque que la sphère de rayon $(n+1)$ a $(2d-1)$ fois plus d'éléments que la sphère de rayon n dès que $n \geq 1$. Ceci montre que $v = \mathrm{Ln}(2d-1)$. □

Notes bibliographiques

Le théorème 1.5 est montré dans [Kes], voir aussi [Day] ; aujourd'hui, on relie la croissance de $(\mu^n(e))_n$ avec le rayon spectral de l'opérateur de Markov associé sur $\ell^2(\Gamma)$, voir p. ex. [Woe, Furm] ; puis ce dernier avec les propriétés de moyennabilité [DG]. Le théorème de Kingman est d'abord montré dans [Kin] ; voir aussi [Der1, AB]. L'entropie asymptotique de la marche apparaît dans la note d'A. Avez dans [Ave]. Y. Derriennic montre qu'on peut la voir comme limite presque sûre [Der2]. Enfin, l'inégalité fondamentale est d'abord établie par Y. Guivarc'h [Gui], voir aussi [Ver] ; on en trouve une démonstration dans la situation la plus générale dans [BHM1] (plus compliquée qu'ici !).

2. RUDIMENTS DE GÉOMÉTRIE HYPERBOLIQUE

L'hyperbolicité au sens de M. Gromov conceptualise dans le cadre des espaces métriques les propriétés à grande échelle des variétés de Cartan-Hadamard de courbure strictement négative, les groupes hyperboliques correspondant aux groupes fondamentaux des variétés compactes obtenues comme quotient.

2.1. Espaces métriques hyperboliques

DÉFINITION 2.1 (Espace hyperbolique). — On dit que (X, d) est *δ-hyperbolique* ($\delta \geq 0$) si, pour tous $w, x, y, z \in X$, on a

$$(y|z)_w \geq \min\{(x|y)_w, (x|z)_w\} - \delta, \tag{2}$$

où

$$(x|y)_w \stackrel{\text{def.}}{=} (1/2)\{d(x,w) + d(y,w) - d(x,y)\}.$$

On écrira $(\cdot|\cdot)_w = (\cdot|\cdot)$ lorsque le choix de w sera sans ambigüité. Lorsque X est géodésique, l'hyperbolicité peut s'exprimer par la finesse des triangles, où un *triangle* de X est la donnée de trois points et de trois segments géodésiques qui les relient : un espace géodésique (X,d) est hyperbolique si et seulement s'il existe une constante δ telle que n'importe quel côté d'un triangle est contenu dans le δ-voisinage des deux autres.

Les espaces géodésiques hyperboliques jouissent de nombreuses propriétés dont les suivantes.

(1) Le produit de Gromov $(x|y)_w$ est comparable à la distance de w à n'importe quel segment géodésique $[x,y]$.

(2) Le *lemme de poursuite* de M. Morse affirme que toute quasigéodésique d'un espace hyperbolique est à distance finie d'une géodésique. Plus précisément, pour toute (λ,c)-quasigéodesique q, il existe une géodésique g telle que $d_H(g,q)\le K$, où d_H désigne la distance de Hausdorff, et K ne dépend que de δ, λ and c [GdlH, Th. 5.6].

Le lemme de poursuite de Morse implique que la propriété d'hyperbolicité est invariante par quasi-isométries dans la catégorie des espaces métriques géodésiques.

Compactification

Soit (X,w) un espace hyperbolique propre pointé. Selon la terminologie usuelle, une suite $(x_n)_n$ *tend vers l'infini* si $\liminf_{m,n\to\infty}(x_m|x_n)_w=\infty$. Cette condition implique que la suite quitte tout compact, mais pas seulement : en géométrie de courbure strictement négative, elle impose aussi une direction asymptotique de la suite, Le *bord visuel* ∂X (ou de Gromov) de X est l'ensemble des suites qui tendent vers l'infini modulo la relation d'équivalence $(x_n)\sim(y_n)$ si $(x_n|y_n)_w$ tend vers l'infini.

On prolonge le produit de Gromov à l'infini en posant

$$(\xi|\zeta)_w = \inf \liminf_{i,j\to\infty}(x_i|y_j)_w\,,$$

où l'infimum est pris sur tous les représentants de ξ et ζ (pour deux représentants quelconques, on obtient $(\xi|\zeta)_w \le \liminf_{i,j\to\infty}(x_i|y_j)_w \le (\xi|\zeta)_w+2\delta$). On remarque que l'inégalité (2) reste vraie avec $\{x,y,z\}\in(X\cup\partial X)$. Dans un espace hyperbolique géodésique et propre, on peut définir le bord en considérant les rayons géodésiques modulo les rayons qui sont à distance bornée pour la distance de Hausdorff.

Si γ est une isométrie de X, alors γ opère aussi sur ∂X puisque

$$|(\gamma(x)|\gamma(y))_w-(x|y)_w|\le d(w,\gamma(w))$$

pour tous $x,y\in X$.

Une *métrique visuelle* vue de w et de paramètre visuel $\varepsilon > 0$ est une distance d_ε sur ∂X telle que $d_\varepsilon(\xi, \zeta)$ est comparable à $e^{-\varepsilon(\xi|\zeta)_w}$. On établit l'existence de métriques visuelles pour des paramètres $\varepsilon > 0$ assez petit en utilisant le lemme suivant avec $q(x, y) = e^{-(x|y)_w}$:

LEMME 2.2. — Soit $q : X \times X \to \mathbb{R}_+$ telle que $q(x, y) = q(y, x)$, $q(x, y) = 0$ si et seulement si $x = y$, et $q(x, z) \leq K \max\{q(x, y), q(y, z)\}$ pour une constante $K > 1$.

Si $\varepsilon \leq \operatorname{Ln} \sqrt{2}/ \operatorname{Ln} K$, alors il existe une métrique d_ε telle que

$$K^{-2\varepsilon} q^\varepsilon(x, y) \leq d_\varepsilon(x, y) \leq q^\varepsilon(x, y)\,.$$

2.2. Espaces hyperboliques quasiréglés

La plupart des propriétés intéressantes des espaces et des groupes hyperboliques sont établies dans le cadre des espaces géodésiques (et propres). Cependant, la notion de quasi-isométrie ne préserve pas ce type de propriétés. Il s'avère important de pouvoir travailler avec des espaces hyperboliques non géodésiques.

La notion de *structure quasiréglée* s'est dégagée. Elle est issue d'une lecture approfondie du lemme de poursuite de Morse. En effet, non seulement celui-ci affirme que toute quasigéodésique est à distance bornée d'une véritable géodésique, il établit aussi une propriété d'alignement des points : si $q : \mathbb{R} \to X$ est une (λ, c)-quasigéodésique dans un espace δ-hyperbolique géodésique, alors il existe une constante $\tau = \tau(\delta, \lambda, c)$ telle que, pour tous $s < t < u$, on ait

$$(q(s)|q(u))_{q(t)} \leq \tau\,.$$

Cela nous a conduit aux définitions suivantes.

DÉFINITIONS 2.3 (Quasirègles, structures quasiréglées, espaces quasiréglés et quasi-isométries quasiréglantes). — Soit (X, d) un espace métrique. Une (λ, c, τ)-quasirègle est une (λ, c)-quasigéodésique $q : I \to X$ telle que, pour tous $s < t < u$ dans I,

$$(q(s)|q(u))_{q(t)} \leq \tau\,.$$

Une structure quasiréglée $\mathcal{G}$ sur X est un ensemble de (λ, c, τ)-quasirègles tel que toute paire de points de X est liée par un élément de $\mathcal{G}$, où (λ, c, τ) sont des constantes.

L'espace métrique X sera dit quasiréglé s'il existe des constantes (λ, c, τ) telles que X est (λ, c)-quasigéodésique et toute (λ, c)-quasigéodésique est une (λ, c, τ)-quasirègle.

Un plongement quasi-isométrique $f : X \to Y$ d'un espace géodésique est quasiréglant si l'image des géodésiques définit une structure quasiréglée sur $f(X)$.

Nous énonçons deux résultats qui justifient cette notion et qui généralisent le cadre géodésique [GdlH]. Ils sont établis dans l'Appendice B.

THÉORÈME 2.4. — *Soit (X, w) un espace δ-hyperbolique et soit $k \geq 0$.*

(i) Si $\#X \leq 2^k + 2$, alors il existe un arbre métrique fini (T, d_T) et une application $\phi : X \to T$ tels que :
- $\to$ *$\forall x \in X$, $d_T(\phi(x), \phi(w)) = d(x, w)$,*
- $\to$ *$\forall x, y \in X$, $d(x, y) - 2k\delta \leq d_T(\phi(x), \phi(y)) \leq d(x, y)$.*

(ii) Si $(X_i, w_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont des rayons (λ, c, τ)-quasiréglés avec $n \leq 2^k$, tels que $X = \cup X_i$, alors il existe un arbre réel pointé T et une application $\phi : X \to T$ tels que
- $\to$ *$\forall x \in X$, $d_T(\phi(x), \phi(w)) = d(x, w)$,*
- $\to$ *$\forall x, y \in X$, $d(x, y) - 2(k+1)\delta - 4c - 2\tau \leq d_T(\phi(x), \phi(y)) \leq d(x, y)$, où $c = \max\{d(w, w_i)\}$.*

THÉORÈME 2.5. — *Soient X un espace métrique hyperbolique géodésique et $\varphi : X \to Y$ une quasi-isométrie sur un espace métrique Y. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) *l'espace Y est hyperbolique ;*

(ii) *l'espace Y est quasiréglé ;*

(iii) *l'application φ est quasiréglante.*

2.3. **Groupes hyperboliques**

Soient X un espace métrique propre et hyperbolique et Γ un groupe d'isométries qui opère proprement discontinûment. Pour tout $x \in X$, son orbite $\Gamma(x)$ ne peut s'accumuler que sur le bord ∂X, et l'ensemble des points d'accumulation s'avère être indépendant du choix de x ; par définition, $\overline{\Gamma(x)} \cap \partial X$ est *l'ensemble limite* $L(\Gamma)$ de Γ.

DÉFINITION 2.6 (Groupe hyperbolique). — Un groupe est *hyperbolique* s'il opère géométriquement sur un espace hyperbolique, propre et géodésique.

D'après le lemme 1.3, un groupe Γ est hyperbolique si seulement s'il est de type fini et tout graphe de Cayley associé à un système de générateurs fini est hyperbolique. Dans ce cas, $L(\Gamma)$ est tout le bord visuel ∂X. Un groupe hyperbolique est dit *élémentaire* s'il est fini ou quasi-isométrique à $\mathbb{Z}$. On supposera toujours les groupes non-élémentaires. Dans ce cas, il contient un sous-groupe libre à deux générateurs, ce qui implique qu'il est non-moyennable.

REMARQUE 2.7. — Au vu du théorème 2.5, il est facile de construire des métriques dans la classe de quasi-isométrie d'un groupe hyperbolique Γ, qui sont invariantes à gauche, mais qui ne sont pas hyperboliques. Par exemple, si $|\cdot|$ est une métrique des mots sur Γ, la formule $d(\gamma, \gamma') = |\gamma - \gamma'| + \mathrm{Ln}(1 + |\gamma - \gamma'|)$ définit une telle distance, *cf.* prop. B.6 pour plus de détails.

Motivé par cette remarque, on note $\mathcal{D}(\Gamma)$ l'ensemble des espaces propres hyperboliques quasiréglés qui admettent une action géométrique de Γ. Par abus de notation, on écrit aussi $d \in \mathcal{D}(\Gamma)$ si d est une distance sur Γ invariante à gauche, hyperbolique et quasi-isométrique à Γ, c'est-à-dire $(\Gamma, d) \in \mathcal{D}(\Gamma)$.

2.4. **Mesures quasiconformes**

On introduit d'abord quelques notions supplémentaires issues de la géométrie riemannienne, voir p.ex. [Pei].

Soit (X, w) un espace métrique propre hyperbolique et quasiréglé. Soient $\xi \in \partial X$, $x, y \in X$. La fonction

$$B_\xi(x,y) \stackrel{\text{def.}}{=} \sup \left\{ \limsup_{n\to\infty} [d(x,x_n) - d(y,x_n)] \right\} ,$$

où le supremum est pris sur toutes les suites $(x_n)_n$ de X qui tendent vers ξ, est appelée la *fonction de Busemann* au point ξ.

Les fonctions de Busemann, les distances visuelles et l'action des isométries sont liées par la propriété suivante : pour tout $\xi \in \partial X$ et toute isométrie γ, il existe un voisinage V de ξ tel que, pour tous $\zeta, \zeta' \in V$,

$$d_\varepsilon(\gamma(\zeta), \gamma(\zeta')) \asymp L_\gamma(\xi) d_\varepsilon(\zeta, \zeta')$$

où $L_\gamma(\xi) \stackrel{\text{def.}}{=} e^{\varepsilon B_\xi(w, \gamma^{-1}(w))}$. De plus, γ opère aussi sur les mesures de ∂X selon les règles suivantes : $(\gamma_* \rho)(A) = \rho(\gamma^{-1} A)$ et $(\gamma^* \rho)(A) = \rho(\gamma A)$.

Le prochain théorème, démontré par M. Coornaert [Coo] dans le cadre des espaces géodésiques en généralisant les travaux de D. Sullivan [Sul], résume les propriétés des mesures quasiconformes. Rappelons la définition de la mesure de Hausdorff d'un espace métrique Z, voir [Led2] pour plus de précisions : soient $s, t \geq 0$, on pose

$$\mathcal{H}_s^t(Z) = \inf \left\{ \sum (\operatorname{diam} U_i)^s,\ Z \subset (\cup U_i), \operatorname{diam} U_i \leq t \right\} ,$$

et on définit $\mathcal{H}_s(Z) = \lim_{t\to 0} \mathcal{H}_s^t(Z)$. La *dimension de Hausdorff* de Z est le nombre $\mathrm{HD}(Z) \stackrel{\text{def.}}{=} s \in [0, \infty]$ telle que pour tout $s' < s$, on ait $\mathcal{H}_{s'}(Z) = \infty$ et pour tout $s' > s$, on ait $\mathcal{H}_{s'}(Z) = 0$.

Enfin, on rappelle la notation suivante :

$$v \stackrel{\text{def.}}{=} \limsup_{R\to\infty} \frac{1}{R} \operatorname{Ln} N_\Gamma(R) \,.$$

THÉORÈME 2.8. — *Soit (X, w) un espace hyperbolique propre quasiréglé pointé muni d'une action géométrique d'un groupe Γ, et soit d_ε une métrique visuelle. On a $v = \varepsilon \cdot \mathrm{HD}(\partial X, d_\varepsilon)$ et il existe une mesure de Radon et de probablité ρ sur ∂X, indépendante de ε, avec les propriétés suivantes :*

(i) *la mesure ρ est Ahlfors-régulière de dimension $\alpha = v/\varepsilon$ i.e., $\rho(\mathcal{B}_\varepsilon(r)) \asymp r^\alpha$ pour toute boule de rayon r, $r \leq \operatorname{diam}(\partial X, d_\varepsilon)$;*

(ii) *la mesure ρ est une mesure Γ-quasiconforme i.e., pour tout $\gamma \in \Gamma$, $\rho \ll \gamma^* \rho \ll \rho$ et*

$$\frac{d(\gamma^*\rho)}{d\rho} \asymp (L_\gamma)^\alpha \ \ \rho - \textit{presque partout;}$$

(iii) *l'action de* Γ *est ergodique pour* ρ *(les ensembles boréliens* Γ*-invariants sont de mesure totale ou nulle).*
De plus, si ρ' *est une autre mesure* Γ*-quasiconforme, alors* $\rho \ll \rho' \ll \rho$ *et*

$$\frac{d\rho'}{d\rho} \asymp 1\,.$$

Il en ressort que v ne dépend pas du groupe opérant géométriquement sur X ; lorsque X est l'espace hyperbolique $\mathbb{H}^n$, alors $v = \mathrm{H}_{\mathrm{vol}}(\mathbb{H}^n) = n-1$ et lorsque X est le groupe Γ muni d'une distance des mots localement finie, alors on aussi $v = \mathrm{H}_{\mathrm{vol}}(\Gamma)$. Ces observations justifient d'appeler v *l'entropie volumique de* X. La mesure ρ est définie comme une limite faible de

$$\frac{1}{\sum_{\gamma\in\Gamma} e^{-sd(w,\gamma(w))}} \sum_{\gamma\in\Gamma} e^{-sd(w,\gamma(w))}\delta_{\gamma(w)}$$

quand s décroît vers v.

Soient $R>0$ et $x\in X$. *L'ombre* $O_w(x,R)$ d'une boule $\mathcal{B}(x,R)$ vue de $w\in X$ est l'ensemble des points $\xi\in\partial X$ tels que $(\xi|x)_w \geq d(w,x)-R$, à comparer avec [Pei].

Par le théorème 2.4, on obtient :

Proposition 2.9. — *Soit* (X,d) *un espace hyperbolique. Pour tout* $\tau\geq 0$*, il existe des constantes strictement positives* C, R_0 *telles que, pour tous* $R>R_0$*,* $\xi\in\partial X$ *et* $x\in X$ *tels que* $(w|\xi)_x\leq\tau$*, on ait*

$$\mathcal{B}_\varepsilon\left(\xi,\frac{1}{C}e^{R\varepsilon}e^{-\varepsilon d(w,x)}\right)\subset O_w(x,R)\subset \mathcal{B}_\varepsilon\left(\xi, Ce^{R\varepsilon}e^{-\varepsilon d(w,x)}\right)\,.$$

Remarque 2.10. — Soit (X,w) un espace hyperbolique quasiréglé dont le bord contient au moins deux points. Si son groupe d'isométries est cocompact, alors il existe τ_0 telle que, pour tout point $x\in X$, il existe $\xi\in\partial X$ tel que $(w|\xi)_x\leq\tau_0$. En effet, considérons deux points distincts $\xi,\zeta\in\partial X$ et une quasirègle q reliant ces deux points. Soit maintenant $x\in X$; il existe une isométrie γ telle que $d(x,\gamma(q))\leq K$ pour une constante K uniforme. Du coup, on a $\min\{(w|\gamma(\xi))_x,(w|\gamma(\zeta)_x)\}\leq\tau_0$ pour une constante uniforme τ_0 en approchant $[w,\gamma(\xi)[$, $[w,\gamma(\zeta)[$ et $[w,x]$ par un arbre.

L'étude des mesures quasiconformes conduit à l'estimation suivante sur la mesure des ombres.

Lemme 2.11 (de l'ombre). — Sous les hypothèses du théorème 2.8, il existe R_0, tel que si $R>R_0$, alors, pour tout $x\in X$,

$$\rho(O_w(x,R))\asymp e^{-vd(w,x)}$$

où les constantes implicites dépendent de R mais pas de x.

2.5. **Marches sur un groupe d'isométries**

Soit X un espace hyperbolique et considérons un sous-groupe discret Γ du groupe d'isométries de X muni d'une loi de probabilité μ. On note $(Z_n)_n$ la marche sur Γ partant de l'élément neutre. Pour chaque $x \in X$, on obtient une trajectoire $(Z_n(x))_{n\geq 0}$ dans X partant de x. Si on se fixe $\gamma \in \Gamma$, les trajectoires $(Z_n(\gamma(x)))_n$ et $(\gamma Z_n(x))_n$ partent toutes les deux de $\gamma(x)$ mais sont en général différentes si Γ n'est pas abélien. Dans le premier cas, il s'agit de la marche partant de l'élément neutre appliquée à $\gamma(x)$ de sorte que $d(Z_n(x), Z_n(\gamma(x))) = d(x, \gamma(x))$ pour chaque n, alors que dans le second cas, nous considérons la marche partant de γ appliquée à x.

THÉORÈME 2.12. — *Soit Γ un groupe discret d'isométries non-moyennable d'un espace hyperbolique propre pointé (X, w) et soit μ une probabilité sur Γ de premier moment fini dont le support engendre Γ. On suppose en outre que*

$$\limsup \frac{1}{R} \operatorname{Ln} N_\Gamma(R) < \infty\,.$$

Alors la vitesse de fuite ℓ est strictement positive, et $(Z_n(w))_n$ est convergente presque sûrement vers un point Z_∞ du bord de X, indépendant de w.

De plus, si X est quasiréglé et si on choisit mesurablement un rayon quasigéodésique $[w, \xi)$ pour chaque $\xi \in \partial X$, alors, pour chaque n, il existe une fonction mesurable $\pi_n : \partial X \to X$ telle que $\pi_n(\xi) \in [w, \xi)$, et, pour presque toute trajectoire de la marche, on ait

$$\lim_{n\to\infty} \frac{d(Z_n(w), \pi_n(Z_\infty))}{n} = 0\,. \tag{3}$$

L'existence d'un choix mesurable d'un rayon quasigéodésique découle par exemple de [Par, Thm I.4.2]. La convergence de la marche ne requiert pas un premier moment fini ; elle peut se démontrer directement avec les techniques de l'Appendice C.

Démonstration. — Posons $\Gamma_R = \{\gamma \in \Gamma,\ d(w, \gamma(w)) \leq R\}$. Tout d'abord, on note m la constante du théorème 1.5, et on choisit une constante $v < \infty$ de sorte que $N_\Gamma(R) \leq e^{vR}$ pour R assez grand. Soit $c > 0$; on a

$$\mathbb{P}[d(w, Z_n(w)) \leq nc] \leq N_\Gamma(nc) \cdot \sup_{\gamma \in \Gamma_{nc}} \mu^n(\gamma) \leq e^{(vc-m)n}\,.$$

Donc, si on choisit $c \leq (1/2)(m/v)$, alors le lemme de Borel-Cantelli implique que presque toute trajectoire (Z_n) vérifie $d(w, Z_n(w)) \geq nc$ pour n assez grand, ce qui implique $\ell > 0$ par la proposition 1.14.

Comme $\Gamma(w)$ est discret, on peut appliquer le lemme 2.2 à $\Gamma(w) \cup \partial X$ avec $q(x, y) = e^{-(x|y)_w}$ pour obtenir une métrique visuelle d_ε sur $\Gamma(w) \cup \partial X$.

On note que l'hypothèse de premier moment fini implique que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} d(Z_n(w), Z_{n+1}(w)) = 0$$

presque sûrement (voir la remarque 1.15). Du coup, étant donnée $0 < \eta < \ell/2$, pour une trajectoire typique $(Z_n)_n$ et pour n assez grand, on aura $|d(w, Z_n(w)) - n\ell| \le n(\eta/2)$, $d(Z_n(w), Z_{n+1}(w)) \le n\eta$ et $(Z_n(w)|Z_{n+1}(w)) \ge n(\ell - \eta)$; par suite, il vient $d_\varepsilon(Z_n(w), Z_{n+1}(w)) \le e^{-\varepsilon n(\ell-\eta)}$. Donc l'inégalité triangulaire implique, pour n assez grand et $p \ge 1$,

$$d_\varepsilon(Z_n(w), Z_{n+p}(w)) \le \sum_{0 \le k \le p-1} e^{-\varepsilon(n+k)(\ell-\eta)} \lesssim e^{-\varepsilon n(\ell-\eta)}$$

ce qui montre que $(Z_n(w))_n$ est une suite qui tend vers un point Z_∞ à l'infini ; mais comme Γ est un groupe d'isométries, la limite ne dépend pas du point w car pour tout $x \in X$, on a $d(Z_n(x), Z_n(w)) = d(x, w)$. De plus, il existe C_0 telle que $(Z_n(w)|Z_\infty) \ge n(\ell - \eta) - C_0$.

On suppose maintenant X muni d'une structure quasiréglée ; il existe une constante $C_1 < \infty$ telle que, pour pour chaque quasirègle $q : [0, M[\to X$ et pour chaque $s \in [0, d(q(0), q(M))[$, il existe $t \in [0, M[\cap \mathbb{N}$ telle que l'on ait $|d(q(0), q(t)) - s| \le C_1$. Pour chaque n et $\xi \in \partial X$, on choisit mesurablement $\pi_n(\xi) \in [w, \xi)$ de sorte que $|d(w, \pi_n(\xi)) - n\ell| \le C_1$. Par hyperbolicité, on a

$$(Z_n(w)|\pi_n(Z_\infty)) \ge n(\ell - \eta) - C_0 - \delta$$

donc

$$d(Z_n(w), \pi_n(Z_\infty)) \le 2n\eta + 2C_0 + 2\delta + C_1\,.$$

$\square$

L'estimée (3) sera améliorée dans le Corollaire 4.7 sous l'hypothèse que d_G appartient à $\mathcal{D}(\Gamma)$.

On définit la mesure harmonique ν comme la loi de Z_∞, c'est-à-dire, pour un borélien $A \subset \partial X$, $\nu(A)$ désigne la probabilité que Z_∞ soit dans A. Par définition, on a supp $\nu \subset L(\Gamma)$. Si $\gamma \in \Gamma$, on note ν_γ la mesure harmonique de la marche commençant par γ, correspondant donc à la loi de $\gamma(Z_\infty)$.

COROLLAIRE 2.13. — *Sous les conditions du théorème 2.12,*

(1) *la suite $(ev_*\mu^n)_n$ tend vers ν pour la topologie faible-étoile, où $ev : \gamma \in \Gamma \mapsto \gamma(w)$;*

(2) *la mesure ν est μ-stationnaire : $\mu \star \nu = \nu$;*

(3) *on a $\nu_\gamma = \gamma_*\nu$;*

(4) *les mesures ν_γ ont les mêmes ensembles négligeables.*

Démonstration. — Comme $(Z_n(w))_n$ tend presque sûrement vers Z_∞, le théorème de convergence dominée implique que, pour toute fonction continue φ sur $X \cup \partial X$, on ait

$$\lim_{n\to\infty} \int \varphi(x) d(ev_*\mu^n)(x) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[\varphi(Z_n(w))] = \mathbb{E}[\varphi(Z_\infty)] = \int \varphi(x) d\nu(x)\,.$$

Par définition, $\mu\star\nu$ est la loi de $X\cdot Z_\infty$ où X est une variable aléatoire à valeurs dans Γ de loi μ indépendante de $(X_n)_{n\geq 1}$. Par conséquent, c'est la limite des lois de $(X\cdot Z_n(w))$, soit $ev_*\mu^{n+1}$. Donc $\mu\star\nu=\nu$.

Par définition, ν_γ est la loi de γZ_∞, donc limite des lois de $\gamma Z_n(w)$, c'est-à-dire des lois $ev_*\gamma_*\mu^n$ puisque, pour une fonction test φ, on a

$$\mathbb{E}[\varphi(\gamma Z_n(w))]=\int\varphi(\gamma x(w))d\mu^n(x)=\int\varphi(x(w))d(\gamma_*\mu^n)(x)\,.$$

Soit $\gamma\in\Gamma$. Il existe $n\geq 1$ tel que γ soit dans le support de μ^n. Or on a

$$\nu(A)=\mu^n\star\nu(A)=\sum_{x\in\Gamma}(x_*\nu)(A)\mu^n(x)$$

donc, si $\nu(A)=0$, alors $\gamma_*\nu(A)=0$ donc $\nu_\gamma(A)=0$. Réciproquement, si $\nu_\gamma(A)=0$ alors en utilisant que μ est symétrique (donc ses puissances aussi), on obtient

$$0=\nu(\gamma^{-1}A)=\sum_{x\in\Gamma}(x_*\nu)(\gamma^{-1}A)\mu^n(x)$$

donc, comme $\mu^n(\gamma^{-1})>0$, on trouve $\gamma_*^{-1}\nu(\gamma^{-1}A)=\nu(A)=0$. $\square$

REMARQUE 2.14. — La proposition C.1 montre qu'il n'existe qu'une mesure stationnaire.

2.6. **Le cas du groupe libre**

Nous reprenons le cas du groupe libre défini au paragraphe § 1.4. Tout d'abord, le produit de Gromov $(x|y)_w$ dans un arbre correspond exactement à la distance $d(w,[x,y])$. On en déduit que $(\mathbb{F}_d,d)$ est 0-hyperbolique.

Le bord du groupe libre s'identifie aux mots réduits infinis munis de la topologie produit : ce sont les bouts de l'arbre. On peut associer une distance visuelle (ultramétrique) en posant $d(\xi,\zeta)=e^{-|\xi\wedge\zeta|}$ où $|\xi\wedge\zeta|$ désigne la longueur du préfixe commun de ξ et ζ.

Si m est un mot réduit qui désigne un élément de $\mathbb{F}_d$, alors son ombre vu de l'identité correspond aux sous-arbre enraciné en m et donc à tous les mots réduits infinis de préfixe m.

La mesure définie par $\rho(O_e(m,1/2))=\frac{1}{2d(2d-1)^{d(e,m)-1}}$ définit une mesure conforme (les formules de changement de variables sont exactes). On peut vérifier à la main que ρ est aussi la mesure stationnaire de la marche.

Notes bibliographiques

Il existe de nombreux articles et ouvrages concernant la géométrie hyperbolique. On peut par exemple consulter [CDP, GdlH, A *et al.*]. La notion de quasirègle est définie dans [BHM2]. Le théorème 2.8 est dû à M. Coornaert [Coo], où il établit aussi le lemme de l'ombre. Le théorème 2.12 est dû à V. Kaimanovich suivant une idée de T. Delzant dans [Kai2, Thm 7.2].

3. COMPACTIFICATION DE MARTIN

Soient Γ un groupe dénombrable et μ une mesure de probabilité symétrique dont le support engendre Γ. Nous supposons que μ engendre une marche transiente. Lorsque l'on munit Γ de la topologie discrète, on associe une compactification naturelle pour les marches de loi μ : la compactification de Martin [Dyn]. Le noyau de Martin est par définition

$$K(x,y) = K_y(x) \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{G(x,y)}{G(e,y)} .$$

La *compactification de Martin* $\Gamma \cup \partial_M \Gamma$ est la plus petite compactification de Γ telle que le noyau de Martin se prolonge continûment à $\Gamma \times (\Gamma \cup \partial_M \Gamma)$. On appelle $\partial_M \Gamma$ le *bord de Martin*.

On rassemble quelques résultats classiques, sous les conditions ci-dessus :

THÉORÈME 3.1. — *L'action de Γ sur lui-même par translation à gauche se prolonge continûment en une action par homéomorphismes sur $\partial_M \Gamma$ et la marche aléatoire $(xZ_n)_n$ partant de $x \in \Gamma$ converge presque sûrement en un point xZ_∞ du bord de Martin. Soit ν_x la mesure harmonique, c'est-à-dire la loi de xZ_∞ (on note $\nu = \nu_e$).*

(1) *Les mesures harmoniques $(\nu_x)_{x\in\Gamma}$ sont toutes absolument continues les unes par rapport aux autres. Plus précisément, on a, pour ν-presque tout $\xi \in \partial_M \Gamma$,*

$$\frac{d\nu_x}{d\nu}(\xi) = K_\xi(x) .$$

(2) *On a*

$$h = -\int_\Gamma \int_{\partial_M \Gamma} \operatorname{Ln} \frac{d\gamma^* \nu}{d\nu}(\xi) d\nu(\xi) d\mu(\gamma) .$$

3.1. Entropie et vitesse de fuite dans la distance de Green

Le résultat principal de [BHM1] est le suivant.

THÉORÈME 3.2. — *Pour toute marche aléatoire transiente et d'entropie finie sur un groupe dénombrable, l'entropie asymptotique h et la vitesse de fuite ℓ_G dans la métrique de Green sont égales.*

Nous proposons une démonstration dans le cas où μ est de support fini et symétrique afin d'éluder les problèmes techniques. Pour le cas général, on pourra consulter [BHM1].

PROPOSITION 3.3. — *Soit μ une mesure de probabilité symétrique sur Γ de support fini. Alors*

$$\ell_G = \sum_{x\in\Gamma} \mathbb{E}[-\operatorname{Ln} K(x, Z_\infty)] \mu(x) .$$

Démonstration. — Comme μ est de support fini, ℓ_G est bien définie comme limite presque sûre et dans L^1. Nous allons montrer que la suite

$$\mathbb{E}[d_G(e, Z_{n+1}) - d_G(e, Z_n)] = \mathbb{E}[-\operatorname{Ln} G(e, Z_{n+1}) + \operatorname{Ln} G(e, Z_n)]$$

est convergente de limite $\sum_{x \in \Gamma} \mathbb{E}[-\operatorname{Ln} K(x, Z_\infty)]\mu(x)$. Comme sa limite au sens de Cesàro vaut ℓ_G, on en déduira la formule recherchée.

Par invariance de d_G, on a $d_G(e, Z_{n+1}) = d_G(X_1^{-1}, X_1^{-1}Z_{n+1})$. Mais d'une part $X_1^{-1}Z_{n+1} = X_2 \dots X_{n+1}$ a la même loi que Z_n et d'autre part X_1^{-1} est indépendante de $X_2, \dots, X_{n+1}$ et de loi μ car μ est symétrique donc

$$\mathbb{E}[d_G(X_1^{-1}, X_1^{-1}Z_{n+1})] = \sum_{x \in \Gamma} \mathbb{E}[d_G(x, Z_n)]\mu(x)\,,$$

où on a utilisé le fait que μ est de support fini pour inverser l'ordre de sommation. Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[-\operatorname{Ln} G(e, Z_{n+1}) + \operatorname{Ln} G(e, Z_n)] &= \sum_{x \in \Gamma} \mathbb{E}[-\operatorname{Ln} G(x, Z_n) + \operatorname{Ln} G(e, Z_n)]\mu(x) \\
&= \sum_{x \in \Gamma} \mathbb{E}[-\operatorname{Ln} K(x, Z_n)]\mu(x)\,.
\end{aligned}$$

La démonstration du théorème 3.1 établit que la suite $(K(x, Z_n))_n$ tend presque sûrement vers $K(x, Z_\infty)$ pour tout $x \in \Gamma$. De plus, pour tout $x \in \Gamma$, on a $|\operatorname{Ln} K(x, Z_n)| \leq d_G(e, x)$ et comme $\operatorname{supp} \mu$ est fini, on peut majorer $|\operatorname{Ln} K(x, Z_n)|$ indépendamment de n par une fonction intégrable, donc le théorème de convergence dominée s'applique pour montrer que

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{E}[-\operatorname{Ln} G(e, Z_{n+1}) + \operatorname{Ln} G(e, Z_n)] = \sum_{x \in \Gamma} \mathbb{E}[-\operatorname{Ln} K(x, Z_\infty)]\mu(x)\,.$$

□

Démonstration du théorème 3.2. — D'après la proposition précédente, il suffit de montrer que

$$h = \sum_{x \in \Gamma} \mathbb{E}[-\operatorname{Ln} K(x, Z_\infty)]\mu(x)\,.$$

D'après le théorème 3.1, on a

$$h = -\sum_{x \in \Gamma} \int_{\partial_M \Gamma} \operatorname{Ln} \frac{dx^*\nu}{d\nu}(\xi) d\nu(\xi)\mu(x)\,.$$

Or, $x^*\nu = x_*^{-1}\nu = \nu_{x^{-1}}$ et

$$\frac{d\nu_{x^{-1}}}{d\nu}(\xi) = K(x^{-1}, \xi)$$

donc, en utilisant la symétrie de μ et le fait que ν est la loi de Z_∞, on trouve

$$h = -\sum_{x \in \Gamma} \int_{\partial_M \Gamma} \operatorname{Ln} K(x^{-1}, \xi) d\nu(\xi)\mu(x) = \sum_{x \in \Gamma} \mathbb{E}[-\operatorname{Ln} K(x^{-1}, Z_\infty)]\mu(x)$$

d'où $h = \ell_G$. □

3.2. Bords de Martin, de Busemann et de Gromov

Un thème général consiste à identifier le bord de Martin d'un groupe avec un bord géométrique de ce groupe (également pour une chaîne de Markov ou une diffusion). On présente d'abord une réalisation du bord de Martin qui était préalablement défini de façon abstraite. Soit $\Psi : \Gamma \to C(\Gamma)$ l'application $y \longmapsto K(\cdot, y)$ à valeurs dans l'espace des fonctions continues définies sur Γ muni de la topologie de la convergence simple. Cette application est injective et nous permet d'identifier Γ avec son image $\Psi(\Gamma)$. La fermeture $\overline{\Psi(\Gamma)}$ est compacte dans $C(\Gamma)$, et on a $\partial_M \Gamma \stackrel{\text{def.}}{=} \overline{\Psi(\Gamma)} \setminus \Psi(\Gamma)$.

On remarque que la distance de Green permet d'identifier le bord de Martin au bord de Busemann. Rappelons que le bord de Busemann d'un espace métrique propre (X, d) est construit selon le même principe *via* l'application $\Phi : X \to C(X)$ définie par $y \longmapsto d(\cdot, y) - d(x, y)$, où $x \in X$ est un point base arbitraire et $C(X)$ est muni de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts. La compactification de Busemann de X est l'adhérence de l'image $\Phi(X)$ dans $C(X)$ (qui est compacte par le théorème d'Ascoli). Si un groupe Γ opère par isométries sur X, alors on obtient une action sur $\overline{\Phi(X)}$ en posant $\gamma \cdot \beta = \beta(\gamma^{-1}(\cdot)) - \beta(\gamma^{-1}(x))$ pour $\beta \in \overline{\Phi(X)}$.

Si on choisit pour (X, d) le groupe Γ muni de la distance de Green d_G, alors les deux constructions des compactifications de Martin et de Busemann coïncident puisque

$$d_G(\cdot, y) - d_G(e, y) = -\operatorname{Ln} K(\cdot, y)\,.$$

REMARQUE 3.4. — Les constructions des bords de Busemann et de Martin suivent le principe suivant : Soit $\alpha : \Gamma \times \Gamma \to \mathbb{R}_+$ une fonction telle que $y \mapsto \alpha(x, y)$ est bornée pour tout $x \in \Gamma$. On peut alors définir une distance δ sur X en posant

$$\delta(x, y) = \sum_{z \in \Gamma} w_z |\alpha(x, z) - \alpha(y, z)|$$

où $(w_z)_{z \in \Gamma}$ est une suite de poids tendant vers 0 assez vite. La compactification de Γ est alors donnée par la complétion de (Γ, δ). Pour la compactification de Martin, on prend $\alpha(x, y) = K(x, y)$ et pour celle de Busemann, $\alpha(x, y) = d(x, w) - d(y, w)$. La construction du bord de Gromov ne semble pas reposer sur ce principe en général.

THÉORÈME 3.5. — [BHM2, théorème 1.7] *Soient Γ un groupe dénombrable et μ une mesure de probabilité symétrique dont le support engendre Γ. Nous supposons que μ engendre une marche transiente. Si la distance de Green est hyperbolique, alors le bord de Martin est homéomorphe au bord de Gromov de (Γ, d_G). Plus précisément, si Γ est muni de la topologie discrète, alors l'application identité sur Γ se prolonge en homéomorphisme équivariant entre $\Gamma \cup \partial_M \Gamma$ et $\Gamma \cup \partial_G \Gamma$.*

Dans un espace métrique hyperbolique géodésique propre, on peut projeter le bord de Busemann sur le bord de Gromov. Mais ici, la situation de (Γ, d_G) est beaucoup plus générale, et il n'existe même pas d'application définie *a priori* d'un bord sur l'autre.

Rappelons qu'une fonction $h : \Gamma \to \mathbb{R}$ est *harmonique* si $h \in L^1(\mu)$ ainsi que toutes ses translatées et si elle vérifie la propriété de la moyenne

$$h(x) = \sum_{\gamma \in \Gamma} h(x\gamma)\mu(\gamma)$$

(on peut vérifier que la fonction $x \mapsto G(x, y)$ est harmonique en dehors de y). Une fonction harmonique positive $h \geq 0$ est dite *minimale* si toute autre fonction harmonique positive h' plus petite que h $(0 \leq h' \leq h)$ lui est proportionnelle.

A chaque point $\xi \in \partial_M \Gamma$ correspond une fonction harmonique positive K_ξ. Chaque fonction minimale apparaît ainsi : si h est minimale, alors il existe une constante $c > 0$ et $\xi \in \partial_M \Gamma$ telle que $h = cK_\xi$. On désigne par $\partial_m \Gamma$ le sous-ensemble de $\partial_M \Gamma$ qui consiste en les fonctions harmoniques minimales normalisées.

La représentation intégrale de Choquet implique que, pour toute fonction harmonique positive h, il existe une unique mesure de probabilité κ^h sur $\partial_m \Gamma$ telle que

$$h = \int K_\xi d\kappa^h(\xi) .$$

Nous utiliserons aussi le noyau de L. Naïm Θ sur $\Gamma \times \Gamma$ défini par

$$\Theta(x, y) \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{G(x, y)}{G(e, x)G(e, y)} = \frac{K_y(x)}{G(e, x)} .$$

Comme le noyau de Martin, le noyau de Naïm admet un prolongement continu à $\Gamma \times (\Gamma \cup \partial_M \Gamma)$. En langage géométrique, il s'interprète ainsi :

$$\log \Theta(x, y) = 2(x|y)_e^G - \log G(e, e) , \tag{4}$$

où $(x|y)_e^G$ désigne le produit de Gromov dans la distance de Green. Voir [Naï] pour les propriétés de ce noyau.

On suppose dorénavant que la distance de Green d_G est hyperbolique, et on notera le bord visuel de (Γ, d_G) ainsi : $\partial_G \Gamma$.

On prépare la démonstration du théorème 3.5 en introduisant la relation d'équivalence $\sim_M$ sur $\partial_M \Gamma$ suivante : on écrit $\xi \sim_M \zeta$ s'il existe une constante $C \geq 1$ telle que

$$\frac{1}{C} \leq \frac{K_\xi}{K_\zeta} \leq C .$$

Etant donné $\xi \in \partial_M \Gamma$, on notera sa classe $M(\xi)$.

On établit quelques propriétés de cette relation.

LEMME 3.6. — (i) Il existe une constante $E \geq 1$ telle que, pour toutes suites $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ de Γ qui tendent vers ξ et ζ dans $\partial_M \Gamma$ respectivement et telles que $(\Theta(x_n, y_n))_n$ tend vers l'infini, alors

$$\frac{1}{E} \leq \frac{K_\xi}{K_\zeta} \leq E\,;$$

en particulier, $\xi \sim_M \zeta$.

(ii) Pour tout $\xi \in \partial_M \Gamma$, il existe $\zeta \in M(\xi)$ et une suite $(y_n)_n$ de Γ qui tend vers un point $a \in \partial_G \Gamma$ au sens de Gromov, vers $\zeta \in \partial_M \Gamma$ au sens de Martin et telle que $\Theta(y_n, \xi)$ tend vers l'infini.

(iii) Soit $\xi, \zeta \in \partial_M \Gamma$. Si $\zeta \notin M(\xi)$, alors il existe un voisinage $V(\zeta)$ de ζ dans Γ et une constante M tels que

$$K_\xi(x) \leq M G(e, x)$$

pour tout $x \in V(\zeta)$.

Démonstration. — (i) Soient $z \in \Gamma$ et n assez grand pour que $(x_n | y_n)_e^G \gg d_G(e, z)$; on considère l'arbre approché T associé à $F = \{e, z, x_n, y_n\}$ et la $(1, C)$-quasi-isométrie $\varphi : (F, d_G) \to (T, d_T)$ (*cf.* théorème 2.4).

Sur l'arbre T, on a

$$|d_T(\varphi(e), \varphi(x_n)) - d_T(\varphi(z), \varphi(x_n))| = |d_T(\varphi(e), \varphi(y_n)) - d_T(\varphi(z), \varphi(y_n))|\,,$$

donc

$$|(d_G(e, x_n) - d_G(z, x_n)) - (d_G(e, y_n) - d_G(z, y_n))| \leq 2C\,.$$

Exprimé avec le noyau de Martin, cela dit

$$|\log K_{x_n}(z) - \log K_{y_n}(z)| \leq 2C\,.$$

En faisant tendre n vers l'infini, on obtient le résultat.

(ii) Soit $(y_n)_n$ une suite telle que

$$\lim K_\xi(y_n) = \sup K_\xi\,.$$

Comme K_ξ est harmonique, le principe du maximum implique que $(y_n)_n$ quitte tout ensemble compact. Mais la marche est symétrique et transiente donc le lemme 1.8 implique que $(G(e, y_n))_n$ tend vers 0.

De plus, pour n assez grand, $K_\xi(y_n) \geq K_\xi(e) = 1$, de sorte que

$$\Theta(y_n, \xi) \geq \frac{1}{G(e, y_n)} \to \infty\,.$$

Soit $(x_n)_n$ une suite de Γ qui tend vers ξ. Pour tout n, il existe m tel que

$$|K_\xi(y_n) - K_{x_m}(y_n)| \leq G(e, y_n)\,.$$

Du coup,

$$\Theta(y_n, x_m) \geq \Theta(y_n, \xi) - \frac{|K_\xi(y_n) - K_{x_m}(y_n)|}{G(e, y_n)} \geq \Theta(y_n, \xi) - 1\,.$$

Par conséquent, en appliquant la partie (i) de ce lemme, on montre que toute limite de $(y_n)_n$ dans $\partial_M\Gamma$ appartient à $M(\xi)$.

De plus, pour toute limite $\zeta \in \partial_M\Gamma$ ainsi obtenue, on obtient

$$\Theta(y_n, \zeta) \geq \frac{1}{E}\Theta(y_n, \xi)\,.$$

Avec le même argument que ci-dessus, on voit que, pour tout $M > 0$, il existe n et m_n tels que si $m \geq m_n$ alors

$$\Theta(y_n, y_m) \geq M - 1\,.$$

En utilisant un procédé diagonal et (4), on peut conclure qu'il existe une sous-suite (n_k) telle que (y_{n_k}) tend vers l'infini au sens de Gromov.

(iii) Puisque $\zeta \notin M(\xi)$, il existe un voisinage $V(\zeta)$ et une constante M tels que $\Theta(x, \xi) \leq M$ pour tout $x \in V(\zeta)$. Sinon, on pourrait trouver $y_n \to \zeta$ de sorte que $\Theta(y_n, \xi)$ tendrait vers l'infini, et l'argument précédent impliquerait $\zeta \in M(\xi)$. En conclusion,

$$K_\xi(x) \leq MG(e, x)\,.$$

□

PROPOSITION 3.7. — *Tout point du bord de Martin est minimal.*

Démonstration. — On observe que si K_ξ est minimale, alors $M(\xi) = \{\xi\}$. En effet, si $\zeta \in M(\xi)$ alors

$$K_\xi \geq K_\xi - \frac{1}{C}K_\zeta \geq 0$$

où $C \geq 1$ est une constante. La minimalité de K_ξ implique que K_ξ et K_ζ sont proportionnelles et, puisqu'elles prennent la valeur 1 en e, on doit avoir $K_\xi = K_\zeta$ *i.e.*, $\xi = \zeta$.

Soit $\xi \in \partial_M\Gamma$; il existe une unique mesure de probabilité κ^ξ sur $\partial_m\Gamma$ telle que

$$K_\xi = \int K_\zeta d\kappa^\xi(\zeta)\,.$$

Par le théorème de Fatou-Doob-Naïm, pour κ^ξ-presque tout ζ, le rapport $G(e, x)/K_\xi(x)$ tend vers 0 quand x tend vers ζ dans la topologie fine [Anc2, théorème II.1.8]. D'après le lemme 3.6 (iii), on en déduit que κ^ξ a son support contenu dans $M(\xi)$. En particulier, $M(\xi)$ contient un point minimal. □

Démonstration du théorème 3.5. — Puisque chaque point Martin est minimal, le lemme 3.6, (ii), implique que pour tout $\xi \in \partial_M\Gamma$, il existe une suite $(x_n)_n$ de Γ qui tend vers ξ au sens de Martin et vers un point a au sens de Gromov.

Montrons que ce point a ne dépend pas de la suite considérée. Si $(y_n)_n$ est une autre suite qui tend vers ξ, alors

$$\limsup_{n,m\to\infty} \Theta(x_n, y_m) = \infty$$

car $(\Theta(\xi,x_n))_n$ tend vers l'infini. Du coup, on peut trouver une sous-suite de $(y_n)_n$ qui tend vers a au sens de Gromov. Puisqu'il n'y a qu'un seul point d'accumulation, le point limite a est bien défini. Cela nous définit une application $\phi : \partial_M\Gamma \to \partial_G\Gamma$.

Maintenant, si $(x_n)_n$ tend vers un point a au sens de Gromov, alors il n'y a qu'un seul point d'accumulation sur le bord de Martin d'après le lemme 3.6, (i). Donc l'application ϕ est injective. La surjectivité provient de la compacité du bord de Martin.

Pour terminer cette démonstration, il suffit de montrer la continuité de ϕ puisque $\partial_M\Gamma$ est compact. Soient $M > 0$ et $\xi \in \partial_M\Gamma$. On considère une suite $(x_n)_n$ qui tend vers ξ comme dans le lemme 3.6. Soit C la constante donnée par le théorème 2.4 pour 4 points. On choisit n assez grand de sorte que $(x_n|\phi(\xi))_e^G \ge M + 2C + \log 2$. Soit

$$A = \min\{K_\xi(x), x \in \mathcal{B}_G(e, d_G(x_n, e))\}.$$

Soit $\zeta \in \partial_M\Gamma$ tel que $|K_\xi - K_\zeta| \le (A/2)$ sur $\mathcal{B}_G(e, d_G(x_n, e))$. Il vient

$$1/2 \le \frac{K_\zeta}{K_\xi} \le 3/2\,.$$

En approchant $\{e, x_n, \phi(\xi), \phi(\zeta)\}$ par un arbre, on montre que $(\phi(\xi)|\phi(\zeta))_e^G \ge M$, ce qui établit la continuité de ϕ. $\square$

Exemples

On présente quelques exemples de groupes munis de mesures de probabilité pour lesquels la distance de Green est hyperbolique. Comme nous le verrons par la suite, si on considère une marche de support fini sur un groupe hyperbolique, alors la distance de Green est quasi-isométrique à une distance des mots et est hyperbolique, et le bord de Martin s'identifie au bord de Gromov du groupe.

Une autre source d'exemples provient de la discrétisation du mouvement brownien de variétés de Hadamard M de courbure sectionnelle strictement négative pincée. Lorsque Γ est un sous-groupe d'isométries qui opère sur M proprement discontinûment et avec quotient de volume fini, la construction de T. Lyons et D. Sullivan associe au mouvement brownien sur M une marche aléatoire sur Γ de support tout le groupe et de même mesure harmonique que le mouvement brownien [LS]. Le raffinement de W. Ballmann et F. Ledrappier permet d'obtenir une marche symétrique dont la fonction de Green est proportionnelle à la fonction de Green de M hors de la diagonale [BL]. Les estimées de la fonction de Green sur M sont alors utilisées pour montrer que d_G est hyperbolique et que son bord est la sphère visuelle à l'infini ∂M. Cette construction permet en particulier de construire des exemples de groupes non hyperboliques pour lesquels la distance de Green est hyperbolique, et aussi des exemples de groupes hyperboliques pour lesquels la distance de Green est aussi hyperbolique, mais pas dans la classe de quasi-isométrie du groupe en question. On peut ainsi munir le groupe libre à deux générateurs d'une mesure de probabilité de sorte que la distance de Green soit hyperbolique et son bord de Martin homéomorphe au cercle unité. Et on peut également munir le groupe fondamental d'une variété hyperbolique de dimension 3 complète de volume fini ayant un *cusp* de rang 2 d'une mesure de probabilité de sorte que la distance de Green soit hyperbolique (observez que ce groupe n'est pas hyperbolique puisqu'il contient un sous-groupe isomorphe à $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$) ; dans ce cas, le bord de Martin est homéomorphe à $\mathbb{S}^2$.

On conclut par la propriété suivante :

PROPOSITION 3.8 (quasiconformité de la mesure harmonique). — *Soient* Γ *un groupe dénombrable et* μ *une mesure de probabilité symétrique dont le support engendre* Γ. *Nous supposons que* μ *engendre une marche transiente. Si la distance de Green est hyperbolique, alors la mesure harmonique est une mesure quasiconforme de dimension* $1/\varepsilon$, *quand* $\partial_G\Gamma$ *est muni d'une distance visuelle de paramètre* $\varepsilon > 0$ *induite par* d_G.

Démonstration. — Le théorème 3.5 implique que le bord de Martin est homéomorphe au bord de Gromov de (Γ, d_G), autrement dit à $\partial_G\Gamma$. Nous pouvons ainsi identifier ces deux bords. Calculons les fonctions de Busemann B_ξ^G : en faisant tendre y vers un point $\xi \in \partial_G\Gamma$ dans l'équation $d_G(e, y) - d_G(x, y) = \operatorname{Ln} K(x, y)$, on trouve

$$B_\xi^G(e, x) = \operatorname{Ln} K_\xi(x). \tag{5}$$

Par conséquent, on a, pour $\xi \in \partial_G\Gamma$,

$$K(x, \xi) = \exp B_\xi^G(e, x),$$

où B_ξ^G désigne la fonction de Busemann au point ξ dans la distance d_G.

Par ailleurs, si on note ν la mesure harmonique sur $\partial\Gamma$, le théorème 3.1 implique, pour $\gamma \in \Gamma$ et ν-presque tout $\xi \in \partial\Gamma$,

$$\frac{d\gamma^*\nu}{d\nu}(\xi) = \frac{d\nu_{\gamma^{-1}}}{d\nu}(\xi) = K_\xi(\gamma^{-1}) = \exp B_\xi^G(e, \gamma^{-1})\,.$$

Donc ν est clairement une mesure quasiconforme de dimension $(1/\varepsilon)$. $\square$

Notes bibliographiques

La référence principale sur la compactification de Martin dans le cas discret est [Dyn] ; voir aussi [Anc1, Anc2]. La formule pour l'entropie vient de [KV] et [Der3]. L'identification du bord de Martin avec un bord de Gromov est due à A. Ancona [Anc2]. Le contexte présenté ici est plus général [BHM2], mais les arguments suivent de près ceux d'A. Ancona (une démonstration alternative apparaît dans [Kai1] et [Woe], mais n'est pas complète : dans la démonstration, un point est construit en prenant une combinaison *non convexe* de points d'un cône convexe et il est affirmé qu'il appartient aussi à ce cône). La discrétisation du mouvement brownien part d'idées de H. Furstenberg et de J. Eells [Eel]. Les raffinements utilisés ici viennent essentiellement de [LS, BL] ; dans cette dernière, on trouve la construction de l'exemple de la probabilité sur le groupe libre ; voir [BHM2] pour un peu plus de détails.

4. MARCHE SUR UN GROUPE HYPERBOLIQUE

Nous supposons dorénavant que Γ est un groupe hyperbolique non-élémentaire et que μ est une mesure de probabilité symétrique dont le support engendre Γ.

On considère l'ensemble $\mathcal{D}(\Gamma)$ des espaces propres hyperboliques quasiréglés qui admettent une action géométrique de Γ, voir la fin de § 2.3.

4.1. Hyperbolicité de la métrique de Green

On a le résultat suivant.

THÉORÈME 4.1. — [BHM2, théorème 1.1] *Soient Γ un groupe hyperbolique non-élémentaire et μ une mesure de probabilité symétrique sur Γ dont le support engendre Γ. Si μ est de support fini, alors $d_G \in \mathcal{D}(\Gamma)$.*

On montre d'abord

LEMME 4.2. — Soit Γ un groupe de type fini muni d'une mesure de probabilité symétrique dont le support engendre Γ et avec un moment exponentiel fini. Alors (Γ, d_G) est quasi-isométrique à Γ.

La loi μ a un moment exponentiel fini s'il existe $\lambda > 0$ tel que, pour une distance des mots d_m,

$$\mathbb{E}[\exp(\lambda d_m(e, Z_1))] = \sum_{\gamma\in\Gamma} e^{\lambda d_m(e,\gamma)}\mu(\gamma) < \infty\,.$$

Démonstration. — On munit Γ d'une distance des mots d_S associée à un système de générateurs S fini. Comme d_S et d_G sont invariantes par l'action gauche de Γ, il suffit de montrer l'existence de constantes $A \geq 1$ et $B \geq 0$ telles que, pour tout $\gamma \in \Gamma$,

$$(1/A)d_S(e,\gamma) - B \leq d_G(e,\gamma) \leq Ad_S(e,\gamma) - B\,.$$

Soit $C = \max\{d_G(e,s),\ s \in S\}$. Pour tout $\gamma \in \Gamma$, on écrit $\gamma = s_1 s_2 \dots s_n$, avec (s_j) dans S et $d_S(e,\gamma) = n$, et on pose $\gamma_j = s_1 s_2 \dots s_j$. L'inégalité triangulaire implique

$$d_G(e,\gamma) \leq \sum_j d_G(\gamma_j, \gamma_{j+1}) \leq Cd_S(e,\gamma)\,.$$

Pour l'inégalité opposée, nous exploitons la condition de moment exponentiel : on se donne $\lambda > 0$ telle que $\mathbb{E}[\exp \lambda d_S(e, Z_1)] = E < \infty$. Pour tout $b > 0$, l'inégalité de Tchebychev exponentielle montre

$$\mathbb{P}\left[\sup_{1\le k\le n} d_S(e,Z_k) \ge nb\right] \le e^{-\lambda bn}\mathbb{E}\left[\exp\left(\lambda \sup_{1\le k\le n} d_S(e,Z_k)\right)\right].$$

Mais alors, si $k \le n$, on obtient

$$d_S(e,Z_k) \le \sum_{1\le j\le n-1} d_S(Z_j, Z_{j+1}) = \sum_{1\le j\le n-1} d_S(e, Z_j^{-1}Z_{j+1}).$$

Les incréments $(Z_j^{-1}Z_{j+1})$ sont des variables aléatoires indépendantes de loi μ. Par conséquent

$$\mathbb{P}\left[\sup_{1\le k\le n} d_S(e,Z_k) \ge nb\right] \le e^{-\lambda bn}E^n = e^{(-\lambda b + \mathrm{Ln}\, E)n}. \tag{6}$$

On choisit b suffisamment grand pour vérifier $c \overset{\text{def.}}{=} -\lambda b + \mathrm{Ln}\, E < 0$.

Du coup, on a

$$G(e,\gamma) = \sum_n \mu^n(\gamma) = \sum_{1\le k\le |\gamma|/b} \mu^k(\gamma) + \sum_{k>|\gamma|/b} \mu^k(\gamma),$$

où on a posé $|\gamma| = d_S(e,\gamma)$. En utilisant (6) et la non-moyennabilité (*cf.* théorème 1.5), on obtient

$$\begin{aligned}\sum_{1\le k\le |\gamma|/b} \mu^k(\gamma) &\le \frac{|\gamma|}{b} \sup_{1\le k\le |\gamma|/b} \mu^k(\gamma) \le \frac{|\gamma|}{b}\mathbb{P}[\exists\, k \le |\gamma|/b \text{ t.q. } Z_k = \gamma] \\ &\le \frac{|\gamma|}{b}\mathbb{P}\left[\sup_{1\le k\le |\gamma|/b} d_S(e,Z_k) \ge |\gamma|\right] \lesssim |\gamma|e^{c|\gamma|}\end{aligned}$$

et

$$\sum_{k>|\gamma|/b} \mu^k(\gamma) \lesssim e^{-(m/b)|\gamma|}.$$

Donc il existe $C, C' > 0$ telles que $G(e,\gamma) \le C' e^{-Cd_S(e,\gamma)}$ ce qui implique

$$d_G(e,\gamma) \ge Cd_S(e,\gamma) - \mathrm{Ln}\, C'.$$

□

Nous avons vu que le fait que d_G et d_S sont quasi-isométriques n'assure pas que d_G est hyperbolique. Pour montrer l'hyperbolicité, nous aurons recours au résultat d'A. Ancona suivant qui impose à la marche d'être de support fini.

THÉORÈME 4.3 (A. Ancona). — *Soient Γ un groupe hyperbolique non-élémentaire et X un graphe de Cayley localement fini de Γ et μ une mesure de probabilité symétrique sur Γ dont le support — fini — engendre Γ. Pour tout $r \ge 0$, il existe une constante $C(r) \ge 1$ telle que*

$$F(x,v)F(v,y) \le F(x,y) \le C(r)F(x,v)F(v,y)$$

pour $x, y \in X$ et v à distance au plus r d'un segment géodésique entre x et y.

Démonstration du théorème 4.1. — Comme μ est de support fini, la marche a un moment exponentiel fini, et le lemme 4.2 implique donc que d_G est quasi-isométrique à une distance des mots d_S associée à un système de générateurs fini. D'après le théorème 2.5, il suffit de montrer que $Id : (\Gamma, d_S) \to (\Gamma, d_G)$ est quasiréglante pour montrer que d_G est hyperbolique. D'après le théorème 4.3, pour tout segment géodésique $[\gamma_1, \gamma_2]$ dans (Γ, d_S) et pour tout $\gamma \in [\gamma_1, \gamma_2]$, on a

$$d_G(\gamma_1, \gamma) + d_G(\gamma, \gamma_2) \leq 2\tau + d_G(\gamma_1, \gamma_2)\,,$$

où $\tau = \operatorname{Ln} C(1) + \operatorname{Ln} G(e, e)$. Ceci montre que $[\gamma_1, \gamma_2]$ est quasiréglé dans (Γ, d_G), et donc que d_G est une distance de $\mathcal{D}(\Gamma)$. □

4.2. **Propriétés découlant de l'hyperbolicité de la distance de Green**

Sachant maintenant que (Γ, d_G) est hyperbolique et quasiréglé, la proposition 3.8 nous dit que ν est quasiconforme et que le théorème 2.8 s'applique, ainsi que le lemme 2.11 de l'ombre. Il découle du théorème 2.8 que l'entropie volumique de (Γ, d_G) vaut exactement 1 (résultat vrai pour tout groupe non-moyennable d'après [BB, BHM1]). De plus, on a

PROPOSITION 4.4. — *Soient Γ hyperbolique non-élémentaire, $(X, d) \in \mathcal{D}(\Gamma)$ et μ une mesure de probabilité sur Γ telle que $d_G \in \mathcal{D}(\Gamma)$. Il existe $R_0 > 0$ tel que, pour $R \geq R_0$ et $\gamma \in \Gamma$, on a*

$$\nu(O_w(\gamma(w), R)) \asymp e^{-d_G(e,\gamma)}$$

où les constantes implicites dépendent de R, de μ et de X.

Nous aurons recours au résultat suivant. Munissons X d'une structure quasiréglée $\mathcal{G}$. On associe alors la notion d'ombre suivante : $O_{\mathcal{G}}(x, R)$ est l'ensemble des points ξ de ∂X pour lesquels il existe une quasirègle $[w, \xi) \in \mathcal{G}$ qui intersecte $\mathcal{B}(x, R)$. Par approximation par les arbres (théorème 2.4), on obtient

PROPOSITION 4.5. — *Soit X un espace hyperbolique muni d'une structure quasiréglée $\mathcal{G}$. Il existe des constantes $C, R_0 > 0$ telles que, pour tous $R > R_0$, $\xi \in \partial X$ et $x \in [w, \xi) \in \mathcal{G}$, on a*

$$O_{\mathcal{G}}(x, R - C) \subset O_w(x, R) \subset O_{\mathcal{G}}(x, R + C)\,.$$

Démonstration de la prop. 4.4. — Il est pratique d'introduire une distance des mots d_m auxiliaire qui est bien sûr géodésique. Cette distance induit une structure quasiréglée $\mathcal{G}$ pour les deux espaces (X, d) et (Γ, d_G), donc les bords sont aussi canoniquement identifiés. Par la proposition 4.5 appliquée aux deux espaces, on a pour R assez grand et $\gamma \in \Gamma$, les inclusions $O_e(\gamma, R-C) \subset O_w(\gamma(w), R) \subset O_e(\gamma, R+C)$ donc le lemme de l'ombre permet de conclure. $\square$

PROPOSITION 4.6. — *Supposons que* Γ *est un groupe hyperbolique non-élémentaire,* $(X,d) \in \mathcal{D}(\Gamma)$*, et* μ *est une loi symétrique telle que sa distance de Green appartienne à* $\mathcal{D}(\Gamma)$*.*

(i) Il existe une constante $b > 0$ *telle que, pour tous* $D \geq 0$ *et* $n \geq 0$*,*

$$\mathbb{P}[d(Z_n(w), [w, Z_\infty)) \geq D] \lesssim e^{-bD}\,.$$

(ii) Il existe τ_0 *telle que, pour tout triple d'entiers naturels* m, n, k*, on ait*

$$\mathbb{E}[(Z_m(w)|Z_{m+n+k}(w))_{Z_{m+n}(w)}] \leq \tau_0\,.$$

Autrement dit, la trajectoire de la marche est quasiréglée en moyenne.

Démonstration de (i). — On observe que

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[d(Z_n(w), [w, Z_\infty)) \geq D] &= \sum_{\gamma\in\Gamma} \mathbb{P}[d(Z_n(w), [w, Z_\infty)) \geq D\,,\ Z_n = \gamma] \\
&= \sum_{\gamma\in\Gamma} \mathbb{P}[d(\gamma(w), [w, \gamma Z_n^{-1} Z_\infty)) \geq D\,,\ Z_n = \gamma] \\
&= \sum_{\gamma\in\Gamma} \mathbb{P}[d(\gamma(w), [w, \gamma Z_n^{-1} Z_\infty)) \geq D]\mathbb{P}[Z_n = \gamma] \\
&= \sum_{\gamma\in\Gamma} \mathbb{P}[d(\gamma(w), [w, \gamma Z_\infty)) \geq D]\mathbb{P}[Z_n = \gamma]\,.
\end{aligned}$$

La troisième égalité provient de l'indépendance de $Z_n = X_1 X_2 \cdots X_n$ et $Z_n^{-1} Z_\infty = X_{n+1} X_{n+2} \cdots$. La dernière égalité repose sur le fait que $Z_n^{-1} Z_\infty$ et Z_∞ suivent la même loi.

Sous l'événement $\{d(\gamma(w), [w, \gamma Z_\infty)) \geq D\}$, on a en particulier $d(w, \gamma(w)) \geq D$ et on peut choisir $x \in [w, \gamma(w)) \cap \Gamma(w)$ pour que $d(\gamma(w), x) = D + O(1)$. Du coup, puisque le quasitriangle $(w, \gamma(w), \gamma Z_\infty)$ est fin et que $d(\gamma(w), [w, \gamma Z_\infty)) \geq D$, on doit avoir $Z_\infty \in O_{\gamma(w)}(x, R)$. Comme d'habitude, R est une constante qui ne dépend ni de $\gamma(w)$, ni de D et ni de Z_∞. On peut donc appliquer la proposition 4.4 pour en déduire

$$\mathbb{P}[d(\gamma(w), [w, \gamma Z_\infty)) \geq D] \leq \mathbb{P}[\gamma Z_\infty \in O_{\gamma(w)}(x, R)] = \nu_\gamma(O_{\gamma(w)}(x, R)) \lesssim e^{-d_G(e,\gamma)}\,.$$

Enfin, en utilisant la quasi-isométrie entre d et d_G, on obtient

$$\mathbb{P}[d(Z_n(w), [w, Z_\infty)) \geq D] \lesssim e^{-bD}\,.$$

$\square$

Démonstration de (ii). — En utilisant l'indépendance des incréments de la marche, on peut tout d'abord supposer $m = 0$.

Choisissons $Y_n(w) \in [w, Z_\infty)$ telle que $d(w, Y_n(w))$ soit aussi proche de $(Z_n(w)|Z_\infty)$ que possible. Puisque (X, d) est quasiréglé, on a $d(w, Y_n(w)) = (Z_n(w)|Z_\infty) + O(1)$, où le $O(1)$ est indépendant de la trajectoire.

Posons

$$A_0 = \{d(w, Y_n(w)) \leq d(w, Y_{n+k}(w))\}$$

et, pour $j \geq 1$,

$$A_j = \{j - 1 < d(w, Y_n(w)) - d(w, Y_{n+k}(w)) \leq j\}\,.$$

En approchant $\{w, Z_n(w), Z_{n+k}(w), Z_\infty\}$ par un arbre, on montre que, sous l'événement A_0,

$$(w|Z_{n+k}(w))_{Z_n(w)} \leq d(Z_n(w), [w, Z_\infty)) + O(1)$$

et, sous l'événement A_j,

$$(w|Z_{n+k}(w))_{Z_n(w)} \leq d(Z_n(w), [w, Z_\infty)) + j + O(1)\,.$$

Donc

$$\mathbb{E}[(w|Z_{n+k}(w))_{Z_n(w)}] \leq \mathbb{E}[d(Z_n(w), [w, Z_\infty))] + \sum_{j \geq 1} j\mathbb{P}(A_j) + O(1)\,.$$

Si $d(w, Y_n(w)) - d(w, Y_{n+k}(w)) \geq j$ alors $d(Z_{n+k}(w), [Z_n(w), Z_\infty)) \geq j$ de sorte que

$$\mathbb{P}(A_{j+1}) \leq \mathbb{P}[d(Z_{n+k}(w), [Z_n(w), Z_\infty)) \geq j]\,.$$

En utilisant (i) pour la marche commençant en Z_n, on obtient

$$\sum_{j \geq 1} j\mathbb{P}(A_j) \lesssim 1\,.$$

D'autre part,

$$\mathbb{E}[d(Z_n(w), [w, Z_\infty))] = \int_0^\infty \mathbb{P}[d(Z_n(w), [w, Z_\infty)) \geq D]\, dD \lesssim \int_0^\infty e^{-bD}\, dD = 1/b\,.$$

La proposition suit. $\square$

Nous pouvons maintenant améliorer l'estimée (3) du théorème 2.12 quand $d_G \in \mathcal{D}(\Gamma)$.

COROLLAIRE 4.7. — *Soient Γ un groupe hyperbolique non-élémentaire, $(X, d) \in \mathcal{D}(\Gamma)$, et μ une loi symétrique telle que sa distance de Green appartienne à $\mathcal{D}(\Gamma)$. On a*

$$\limsup \frac{d(Z_n(w), [w, Z_\infty))}{\operatorname{Ln} n} < \infty \quad \mathbb{P}\ p.s. \tag{7}$$

Démonstration. — D'après la proposition 4.6 on peut trouver une constante $\kappa > 0$ telle que

$$\mathbb{P}[d(Z_n(w), [w, Z_\infty)) \geq \kappa \operatorname{Ln} n] \leq \frac{1}{n^2}\,.$$

Par conséquent, le lemme de Borel-Cantelli montre que

$$\limsup \frac{d(Z_n(w), [w, Z_\infty))}{\operatorname{Ln} n} < \infty \quad \mathbb{P} \text{ p.s.}$$

et le corollaire suit. □

REMARQUE 4.8. — Ce corollaire était déjà connu dans le cas du groupe libre [Led1] et du mouvement brownien sur une variété riemannienne hyperbolique au sens de Gromov et pour des marches de support fini sur un graphe hyperbolique [Anc2, théorème 7.3].

On rappelle qu'une mesure de Radon m est *doublante* s'il existe une constante $C > 0$ telle que, pour toute boule B de rayon majoré par le diamètre de l'espace, on a $m(2B) \leq Cm(B)$, où $2B$ est la boule de même centre que B et de rayon double.

PROPOSITION 4.9. — *Soient Γ un groupe hyperbolique non-élémentaire, $(X, d) \in \mathcal{D}(\Gamma)$, et μ une loi symétrique telle que sa distance de Green appartienne à $\mathcal{D}(\Gamma)$. La mesure harmonique est doublante dans la distance visuelle d_ε de ∂X.*

Démonstration. — La formulation moderne du théorème de Efremovich et Tichonirova affirme qu'une quasi-isométrie entre espaces géodésiques propres et hyperboliques $\Phi : X \to Y$ s'étend en un homéomorphisme quasisymétrique $\phi : \partial X \to \partial Y$ entre leur bord visuel, c'est-à-dire qu'il existe un homéomorphisme croissant $\eta : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ tel que

$$d_{\varepsilon,Y}(\phi(\xi), \phi(\zeta)) \leq \eta(t) d_{\varepsilon,Y}(\phi(\xi), \phi(\zeta'))$$

dès que $d_{\varepsilon,X}(\xi, \zeta) \leq t d_{\varepsilon,X}(\xi, \zeta')$.

Comme $d_G \in \mathcal{D}(\Gamma)$, les espaces sont visuels. Donc, ce résultat reste vrai pour la distance de Green puisque l'on peut utiliser l'approximation par les arbres.

Comme (X, d) et (X, d_G) sont quasi-isométriques, leurs bords sont quasisymétriques pour les distances d_ε et d_ε^G. De plus, ν est doublante pour d_ε^G, puisqu'Ahlfors-régulière et comme cette propriété est invariante par quasisymétrie, ν est aussi doublante pour d_ε. □

On conclut ce paragraphe par un théorème central limite et la loi du log itéré pour la distance à l'origine dû à M. Björklund [Bjö], complétant le théorème 2.12, lorsque Γ est muni de la distance de Green :

THÉORÈME 4.10. — *Soit Γ un groupe hyperbolique non-élémentaire muni d'une marche symétrique de support engendrant Γ et admettant un moment exponentiel fini et telle que $d_G \in \mathcal{D}(\Gamma)$. La suite de variables aléatoires*

$$\left(\frac{d_G(e, Z_n) - n\ell}{\sqrt{n}}\right)_n$$

tend en loi vers une variable normale centrée de variance $\sigma > 0$ et de plus

$$\sigma = \limsup_{n\to\infty} \frac{d_G(e, Z_n) - n\ell}{\sqrt{n \operatorname{Ln} \operatorname{Ln} n}}\,,$$

presque sûrement.

La démonstration utilise de manière essentielle que les bords de Busemann et de Gromov de (Γ, d_G) coïncident.

4.3. **Dimension de la mesure harmonique**

On établit une formule « dimension-entropie-vitesse de fuite », bien connue en dynamique géométrique, qui donne une interprétation géométrique de « l'inégalité fondamentale » $h \leq \ell v$. La *dimension* $\mathrm{HD}(\nu)$ *de la mesure* ν est le plus grand minorant des dimensions de Hausdorff des ensembles mesurables de mesure positive, voir l'appendice § A.

THÉORÈME 4.11. — *Soient Γ un groupe hyperbolique non-élémentaire, $(X, d) \in \mathcal{D}(\Gamma)$, et μ une loi symétrique de premier moment fini et telle que sa distance de Green appartienne à $\mathcal{D}(\Gamma)$. On désigne par d_ε une métrique visuelle sur ∂X et par $\mathcal{B}_\varepsilon(\xi, r)$ la boule de centre $\xi \in \partial X$ et de rayon r pour cette distance d_ε. Soient ρ une mesure quasiconforme sur ∂X et ν la mesure harmonique de la marche $(Z_n)_n$.*

Pour ν-presque tout ξ, on a

$$\lim_{r\to 0} \frac{\operatorname{Ln} \nu(\mathcal{B}_\varepsilon(\xi, r))}{\operatorname{Ln} r} = \frac{h}{\varepsilon\ell}$$

où $\ell > 0$ désigne la vitesse de fuite par rapport à d et h l'entropie asymptotique. En particulier, on a $\mathrm{HD}(\nu) = h/\varepsilon\ell$.

De plus, les propositions suivantes sont équivalentes.

(i) On a l'égalité $h = \ell v$.

(ii) Les mesures ρ et ν définissent la même classe.

(iii) Les mesures ρ et ν sont équivalentes et leur dérivées de Radon-Nikodym sont bornées supérieurement et inférieurement.

(iv) L'application $(\Gamma, d_G) \xrightarrow{Id} (X, vd)$ est une $(1, C)$-quasi-isométrie.

(v) La mesure ν est une mesure quasiconforme sur $(\partial X, d_\varepsilon)$.

4.3.1. *Dimension ponctuelle.* On montre d'abord

PROPOSITION 4.12. — *Soient Γ un groupe hyperbolique non-élémentaire, $(X, d) \in \mathcal{D}(\Gamma)$, et μ une loi symétrique de premier moment fini et telle que sa distance de Green appartienne à $\mathcal{D}(\Gamma)$. Soit ν la mesure harmonique de la marche $(Z_n(w))$.*

Pour ν-presque tout $\xi \in \partial X$,

$$\lim_{r\to 0} \frac{\operatorname{Ln} \nu(B_\varepsilon(\xi, r))}{\operatorname{Ln} r} = \frac{\ell_G}{\varepsilon\ell}\,,$$

où $\mathcal{B}_\varepsilon(\xi, r)$ désigne la boule de centre $\xi \in \partial X$ et de rayon r dans la distance visuelle d_ε sur ∂X et ℓ_G la vitesse de fuite dans la distance de Green.

La proposition montre $\mathrm{HD}(\nu) = \ell_G/\varepsilon\ell$, voir [Led2, Prop. 2.5]. L'idée motrice de la démonstration repose sur les propositions 4.4 et 2.9 pour avoir

$$\lim \frac{\mathrm{Ln}\,\nu(O(Z_n))}{\mathrm{Ln}\,\mathrm{diam}\,O(Z_n)} = \lim \frac{-d_G(e, Z_n)/n}{-\varepsilon d(w, Z_n(w))/n} = \frac{\ell_G}{\varepsilon\ell}\,.$$

La propriété de doublement permet de rendre cet argument rigoureux.

Démonstration. — Il est pratique d'introduire une distance des mots d_m auxiliaire qui est bien sûr géodésique. Cette distance induit une structure quasiréglée $\mathcal{G}$ pour les deux distances d et d_G.

On combine les propositions 2.9 et 4.5 pour obtenir, pour un rayon R assez grand mais fixé, pour tout $\xi \in \partial X$ et tout $x \in [w, \xi) \subset \mathcal{G}$, $x = \gamma(w)$,

$$\mathcal{B}_\varepsilon(\xi, (1/C)e^{-\varepsilon d(w,x)}) \subset O_{\mathcal{G}}(x, R) \subset \mathcal{B}_\varepsilon(\xi, Ce^{-\varepsilon d(w,x)})$$

et

$$\mathcal{B}^G_\varepsilon(\xi, (1/C)e^{-\varepsilon d_G(e,\gamma)}) \subset O_{\mathcal{G}}(x, R) \subset \mathcal{B}^G_\varepsilon(\xi, Ce^{-\varepsilon d_G(e,\gamma)})$$

où $C > 0$ est une constante. On rappelle que les ombres $O_{\mathcal{G}}(x, R)$ sont définies à partir des géodésiques de la distance d_m.

La propriété de doublement de ν dans la distance de Green nous indique

$$\nu(\mathcal{B}_\varepsilon(\xi, Ce^{-\varepsilon d(w,x)})) \asymp \nu(O_{\mathcal{G}}(x, R)) \tag{8}$$

pour tout $x \in [w, \xi)$, *cf.* prop. 4.4.

Soit $\eta > 0$; par définition de la vitesse de fuite, les trajectoires de la marche $(Z_n(w))_n$ vérifient presque sûrement $|d(w, Z_n(w)) - \ell n| \le \eta n$ et $|d_G(e, Z_n) - \ell_G n| \le \eta n$ pour tout n assez grand.

D'après le théorème 2.12 appliqué à la distance d_m, on obtient pour n assez grand $d_m(Z_n, \pi_n(Z_\infty)) \le \eta n$ et, puisque d et d_G sont quasi-isométriques à d_m par hypothèses, on peut aussi supposer $d(Z_n(w), \pi_n(Z_\infty)(w)) \le \eta n$ et $d_G(Z_n, \pi_n(Z_\infty)) \le \eta n$.

Cela nous permet de conclure que

$$\left\{ \begin{array}{l} |d(w, \pi_n(Z_\infty)(w)) - \ell n| \le 2\eta n\,, \\ |d_G(e, \pi_n(Z_\infty)) - \ell_G n| \le 2\eta n\,. \end{array} \right. \tag{9}$$

Posons

$$r_n = e^{-\varepsilon d(w, \pi_n(Z_\infty))}\,.$$

En utilisant (8) avec $\xi = Z_\infty$ et $x = \pi_n(Z_\infty)(w)$, on obtient

$$\nu(\mathcal{B}_\varepsilon(Z_\infty, r_n)) \asymp \nu(O_{\mathcal{G}}(\pi_n(Z_\infty), R)) \asymp e^{-d_G(e, \pi_n(Z_\infty))}$$

où l'estimée de droite provient de la proposition 4.4. Du coup, on déduit de (9) que, pour n assez grand,

$$\left|\frac{\mathrm{Ln}\,\nu(\mathcal{B}_\varepsilon(Z_\infty, r_n))}{\mathrm{Ln}\,r_n} - \frac{\ell_G}{\varepsilon\ell}\right| \lesssim \eta\,. \tag{10}$$

Comme la mesure ν est doublante (proposition 4.9), ν est aussi α-homogène pour un certain $\alpha > 0$, (*cf.* [Hei, Chap. 13]), c'est-à-dire qu'il existe une constante $C > 0$ telle que, si $0 < r < R < \mathrm{diam}\,\partial X$ and $\xi \in \partial X$, alors

$$\frac{\nu(\mathcal{B}_\varepsilon(\xi, R))}{\nu(\mathcal{B}_\varepsilon(\xi, r))} \leq C\left(\frac{R}{r}\right)^\alpha\,.$$

A partir de

$$\left|\mathrm{Ln}\,\frac{e^{-\varepsilon n\ell}}{r_n}\right| \leq 2n\varepsilon\eta$$

il vient

$$\left|\mathrm{Ln}\,\frac{\nu(\mathcal{B}_\varepsilon(Z_\infty, e^{-\varepsilon n\ell}))}{\nu(\mathcal{B}_\varepsilon(Z_\infty, r_n))}\right| \leq 2n\alpha\varepsilon\eta + O(1)\,.$$

Par conséquent,

$$\limsup_n \left|\frac{\mathrm{Ln}\,\nu(\mathcal{B}_\varepsilon(Z_\infty, e^{-\varepsilon n\ell}))}{\mathrm{Ln}\,e^{-\varepsilon n\ell}} - \frac{\mathrm{Ln}\,\nu(\mathcal{B}_\varepsilon(Z_\infty, r_n))}{\mathrm{Ln}\,r_n}\right| \lesssim \eta\,.$$

Puisque $\eta > 0$ est arbitraire, on déduit de (10) que

$$\lim_{r\to 0}\frac{\mathrm{Ln}\,\nu(\mathcal{B}_\varepsilon(Z_\infty, r))}{\mathrm{Ln}\,r} = \lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{Ln}\,\nu(\mathcal{B}_\varepsilon(Z_\infty, e^{-\varepsilon n\ell}))}{\mathrm{Ln}\,e^{-\varepsilon n\ell}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{Ln}\,\nu(\mathcal{B}_\varepsilon(Z_\infty, r_n))}{\mathrm{Ln}\,r_n} = \frac{\ell_G}{\varepsilon\ell}\,.$$

En d'autres termes, pour ν-presque tout $\xi \in \partial X$,

$$\lim_{r\to 0}\frac{\mathrm{Ln}\,\nu(\mathcal{B}_\varepsilon(\xi, r))}{\mathrm{Ln}\,r} = \frac{\ell_G}{\varepsilon\ell}\,.$$

□

4.3.2. *Egalité fondamentale.* On se donne $(X, d) \in \mathcal{D}(\Gamma)$, une mesure de probabilité μ sur Γ admettant un moment exponentiel et telle que $d_G \in \mathcal{D}(\Gamma)$. Donc il existe $\lambda > 0$ telle que

$$E \stackrel{\text{def.}}{=} \mathbb{E}\left[e^{\lambda d(w, Z_1(w))}\right] < \infty\,.$$

On commence par un résultat clef concernant le cas de dimension maximale.

PROPOSITION 4.13. — *Sous les hypothèses du théorème 4.11, si $h = \ell v$, alors ρ et ν sont équivalentes.*

Nous en ferons la preuve en supposant μ de support fini. Pour le cas général, se reporter à [BHM2].

On note R la constante donnée par le lemme de l'ombre (lemme 2.11) et on écrira plus simplement $\mho(x)$ au lieu de $O_w(x, R)$.

Posons
$$\varphi_n = \frac{\rho(\mho(Z_n(w)))}{\nu(\mho(Z_n(w)))} \quad \text{et} \quad \phi_n = \operatorname{Ln}\varphi_n\,.$$
Puisque μ^n est la loi de Z_n, on a
$$\mathbb{E}[\varphi_n] = \sum_{\gamma\in\Gamma}\mu^n(\gamma)\frac{\rho(\mho(\gamma(w)))}{\nu(\mho(\gamma(w)))} \text{ et } \mathbb{E}[\phi_n] = \sum_{\gamma\in\Gamma}\mu^n(\gamma)\operatorname{Ln}\left(\frac{\rho(\mho(\gamma(w)))}{\nu(\mho(\gamma(w)))}\right)\,.$$
On commence par établir trois lemmes, avec les mêmes notations.

Lemme 4.14. — Il existe une constante $C_1 > 0$ telle que, pour tout $N \geq 1$,
$$\frac{1}{N}\sum_{1\leq n\leq N}\mathbb{E}[\varphi_n] \leq C_1\,.$$

Démonstration. — Comme μ est supposée de support fini, on a $\operatorname{supp}\mu^n \subset \mathcal{B}(e,\kappa n)$ pour tout $n\geq 1$, où $\kappa = \max\{d(e,\gamma),\ \gamma\in\operatorname{supp}\mu\}$.

Soient $N\geq 1$ et $1\leq n\leq N$ fixés. D'après le lemme de l'ombre (lemme 2.11) appliqué aux deux distances, on obtient

$$\nu(\mho(\gamma(w))) \asymp e^{-d_G(e,\gamma)} = F(e,\gamma) \asymp G(e,\gamma) = \sum_k \mu^k(\gamma) \tag{11}$$

et

$$\rho(\mho(\gamma(w))) \asymp e^{-vd(w,\gamma(w))}\,. \tag{12}$$

On a
$$\begin{aligned}\frac{1}{N}\sum_{1\leq n\leq N}\mathbb{E}[\varphi_n] &\lesssim \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\sum_{\gamma\in\Gamma:d(e,\gamma)\leq\kappa N}\frac{\rho(\mho(\gamma(w)))}{\nu(\mho(\gamma(w)))}\mu^n(\gamma)\\ &\lesssim \frac{1}{N}\sum_{\gamma\in\Gamma:d(e,\gamma)\leq\kappa N}\frac{\sum_{n=1}^{N}\mu^n(\gamma)}{\nu(\mho(\gamma(w)))}\rho(\mho(\gamma(w))).\end{aligned}$$

Mais (11) implique que
$$\frac{\sum_{n=1}^{N}\mu^n(\gamma)}{\nu(\mho(\gamma(w)))} \lesssim 1$$
de sorte que

$$\frac{1}{N}\sum_{1\leq n\leq N}\mathbb{E}[\varphi_n] \lesssim \frac{1}{N}\sum_{d(w,x)\leq\kappa N}\rho(\mho(x))\,. \tag{13}$$

Mais $\rho(\mho(x)) \asymp e^{-vd(w,x)}$ d'après (12) et puisqu'il y a approximativement e^{vk} éléments dans la d-boule de rayon k (*cf.* théorème 2.8), on a
$$\sum_{d(w,x)\leq\kappa N}\rho(\mho(x)) \asymp \sum_{1\leq n\leq\kappa N} e^{vn}e^{-vn}\,,$$

et
$$\sum_{d(w,x)\leq \kappa N} \rho(\mho(x)) \lesssim N\,.$$
Le lemme suit. □

LEMME 4.15. — Il existe une constante finie $C_2 \geq 0$ telle que la suite $(\mathbb{E}(\phi_n) + C_2)_{n\geq 1}$ est sous-additive et $(1/n)\phi_n$ tend vers $h - \ell v$ presque sûrement et en moyenne.

Démonstration. — D'après le lemme de l'ombre (lemme 2.11),
$$\frac{1}{n}\phi_n = \frac{1}{n}d_G(e, Z_n) - \frac{1}{n}vd(w, Z_n(w)) + O(1/n)$$
donc le théorème 1.10 implique que $(1/n)\phi_n$ tend presque sûrement et en moyenne vers
$$\ell_G - \ell v = h - \ell v\,,$$
puisque $h = \ell_G$ d'après le théorème 3.2.

Soient $m, n \geq 1$. Le lemme de l'ombre et l'inégalité triangulaire dans la métrique d_G impliquent
$$\mathbb{E}[\phi_{m+n}]-(\mathbb{E}[\phi_m]+\mathbb{E}[\phi_n]) \leq v\mathbb{E}[d(w, Z_m(w))+d(Z_m(w), Z_{m+n}(w))-d(w, Z_{m+n}(w))]+O(1)\,.$$
Donc la proposition 4.6 implique l'existence d'une constante C_2 telle que
$$\mathbb{E}[\phi_{m+n}] - (\mathbb{E}[\phi_m] + \mathbb{E}[\phi_n]) \leq C_2\,.$$
Cela nous donne la sous-additivité. □

LEMME 4.16. — Si ρ et ν ne sont pas équivalentes, alors $(\varphi_n)_n$ tend vers zéro en probabilité.

Démonstration. — Soit $\alpha > 0$. on doit montrer que
$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[\varphi_n \geq \alpha] = 0\,.$$
Soit $\eta > 0$.

Comme ρ et ν sont supposées non équivalentes, l'ergodicité des deux mesures implique qu'elles sont totatlement étrangères, donc, comme ν est doublante (Prop. 4.9), pour ν-presque tout $\xi \in \partial X$, on a
$$\lim_{r\to 0} \frac{\rho(\mathcal{B}_\varepsilon(x,r))}{\nu(\mathcal{B}_\varepsilon(x,r))} = 0\,.$$
Voir [Hei, Chap. 1] pour une démonstration du théorème de différentiation de Lebesgue dans les espaces métriques mesurés doublants.

Par le théorème d'Egorov, on peut supposer qu'il existe deux ensembles boréliens $A \subset \partial X$ et $B = A^c$ tels que $\nu(A) < \eta$ et $x \mapsto \rho(\mathcal{B}_\varepsilon(x,r))/\nu(\mathcal{B}_\varepsilon(x,r))$ tend uniformément vers 0 sur B avec r. Notons $\psi(r) = \sup_{x\in B, 0<s<r} \rho(\mathcal{B}_\varepsilon(x,s))/\nu(\mathcal{B}_\varepsilon(x,s))$, qui tend vers 0 avec r.

Par ailleurs, si $D>0$ est une constante fixée, alors, la proposition 4.6 implique

$$\mathbb{P}[d(Z_n(w),[w,Z_\infty))\geq D]\lesssim e^{-bD}$$

donc on peut choisir D pour que l'événement $E=(d(Z_n(w),[w,Z_\infty[)\geq D)$ ait lieu avec probabilité au plus η, indépendamment de n. Par le théorème d'Egorov, on peut aussi supposer que $(d(w,Z_n(w)))_n$ tend vers l'infini uniformément sur E^c. Notons, sous l'événement E^c, $Y_n\in[w,Z_\infty[$ un point à distance au plus D de $Z_n(w)$. Il existe une constante $C=C(D)$ telle que $\mho(Z_n)\subset\mathcal{B}_\varepsilon(Z_\infty,Ce^{-\varepsilon d(w,Y_n)})$. D'autre part, d'après la remarque 2.10 et la proposition 2.9, on trouve une constante c et un point $\xi_n\in\partial X$ tels que $B_\varepsilon(\xi_n,ce^{-\varepsilon d(w,Y_n)})\subset\mho(Z_n)$. Comme ν est doublante, on trouve C_d telle que

$$\nu(\mathcal{B}_\varepsilon(Z_\infty,Ce^{-\varepsilon d(w,Y_n)}))\leq C_d\nu(\mathcal{B}_\varepsilon(\xi_n,ce^{-\varepsilon d(w,Y_n)})\leq C_d\nu(\mho(Z_n))\,.$$

Si de plus $Z_\infty\in B$ a lieu alors

$$\rho(\mho(Z_n))\leq\rho(\mathcal{B}_\varepsilon(Z_\infty,Ce^{-\varepsilon d(w,Y_n)}))\leq\psi(Ce^{-\varepsilon d(w,Y_n)})C_d\nu(\mho(Z_n))\,.$$

Par conséquent, si n est assez grand, alors $\psi(Ce^{-\varepsilon d(w,Y_n)})C_d<\alpha$ et donc $\varphi_n<\alpha$.

L'inclusion $(\varphi_n\geq\alpha)\subset E\cup(Z_\infty\in A)$ découle de l'analyse précédente donc

$$\mathbb{P}[\varphi_n\geq\alpha]\leq\mathbb{P}[E]+\nu(A)\leq 2\eta$$

si n est assez grand. L'arbitraire sur η permet de conclure. □

Démonstration de la proposition 4.13. — Nous allons montrer que si ρ et ν ne sont pas équivalentes, alors $h<\ell v$.

Prenons $\eta\in(0,e^{-1}]$ et notons $A_n=(\varphi_n\geq\eta)$ et $B_n=(\varphi_n<\eta)$.

Pour tout $n\geq 1$,

$$\mathbb{E}[\phi_n]=\int_{A_n}\phi_n d\mathbb{P}+\int_{B_n}\phi_n d\mathbb{P}\,.$$

D'après le lemme 4.16, la suite $(\varphi_n)_n$ tend vers 0 en probabilité donc il existe n_0 tel que, pour $n\geq n_0$, on ait $\mathbb{P}[B_n]\geq 1-\eta$ donc

$$\int_{B_n}\phi_n d\mathbb{P}\leq\mathbb{P}[B_n]\operatorname{Ln}\eta\leq(1-\eta)\operatorname{Ln}\eta\,.$$

Prenons la constante C_1 qui apparaît dans le lemme 4.14. L'inégalité de Jensen nous conduit à

$$\int_{A_n}\phi_n d\mathbb{P}\leq\mathbb{P}[A_n]\operatorname{Ln}\int_{A_n}\varphi_n\frac{d\mathbb{P}}{\mathbb{P}[A_n]}\leq\eta\operatorname{Ln}(1/\eta)+\eta\operatorname{Ln}^+\mathbb{E}[\varphi_n]\,,$$

où on a utilisé $\eta\leq 1/e$.

Mais le lemme 4.14 implique que $\liminf\mathbb{E}[\varphi_n]<2C_1$. Donc il existe $p\geq n_0$ tel que $\mathbb{E}[\varphi_p]\leq 2C_1$.

Du coup,

$$\mathbb{E}[\phi_p]\leq(1-\eta)\operatorname{Ln}\eta+\eta\operatorname{Ln}(1/\eta)+\eta\operatorname{Ln}(2C_1)\,.$$

Quand η tend vers 0, le terme de droite tend vers $-\infty$. Par conséquent, si on fixe η assez petit, il existera p tel que

$$\mathbb{E}[\phi_p] + C_2 \leq -1\,,$$

où C_2 est la constante du lemme 4.15. Ce lemme 4.15 nous dit maintenant

$$\frac{1}{k}(\mathbb{E}[\phi_{kp}] + C_2) \leq \mathbb{E}[\phi_p] + C_2 \leq -1$$

pour $k \geq 1$. Comme $(1/pk)\mathbb{E}[\phi_{pk}]$ tend vers $(h - \ell v)$, en faisant tendre k vers l'infini, on obtient

$$(h - \ell v) \leq \frac{-1}{p} < 0\,.$$

□

4.3.3. *Mesures équivalentes.* Soient Γ un groupe hyperbolique non-élémentaire, $(X, d) \in \mathcal{D}(\Gamma)$, et μ une mesure de probabilité sur Γ telle que $d_G \in \mathcal{D}(\Gamma)$. L'objet de ce paragraphe est de montrer le résultat suivant.

PROPOSITION 4.17. — *Soient ν la mesure harmonique de la marche et ρ une mesure quasiconforme sur ∂X. Si ρ et ν sont équivalentes alors leur densité est presque sûrement bornée, c'est-à-dire qu'il existe une constante $C \geq 1$ telle que, pour tout borélien $A \subset \partial X$,*

$$\frac{1}{C}\nu(A) \leq \rho(A) \leq C\nu(A)\,.$$

Nous allons travailler sur l'espace $\partial^2 X$ des couples de points distincts $(\xi, \zeta) \in \partial X \times \partial X$, $\xi \neq \zeta$, qui prend son origine dans le flot géodésique d'une variété de courbure négative [Led2, Pei]. Le groupe Γ opère sur $\partial^2 X$ par l'action diagonale $\gamma \cdot (\xi, \zeta) = (\gamma(\xi), \gamma(\zeta))$, $\gamma \in \Gamma$.

On définit les mesures σ-finies suivantes sur $\partial^2 X$:

$$d\tilde{\rho}(\xi, \zeta) = \frac{d\rho(\xi) \otimes d\rho(\zeta)}{\exp 2v(\xi|\zeta)} \quad \text{et} \quad d\tilde{\nu}(\xi, \zeta) = \frac{d\nu(\xi) \otimes d\nu(\zeta)}{\exp 2(\xi|\zeta)^G},$$

où

$$(\xi|\zeta)^G \stackrel{\text{def.}}{=} \liminf_{(x_n),(y_n) \to \xi,\zeta} (x_n|y_n)^G\,.$$

On rappelle que comme ν est conforme, $\tilde{\nu}$ est invariante, et est de plus ergodique [Kai1, Thm 3.3] ; la démonstration suit l'argument de E. Hopf et repose donc sur l'existence d'un « bon » espace du flot géodésique. D'autre part, ρ n'étant qu'une mesure quasiconforme, on sait seulement que $\tilde{\rho}$ est quasi-invariante, *cf.* [Coo]. Cela implique l'existence d'une constante $C \geq 1$ telle que, pour tout borélien $A \subset \partial^2 X$ et tout $\gamma \in \Gamma$,

$$\frac{1}{C}\tilde{\rho}(A) \leq \tilde{\rho}(\gamma(A)) \leq C\tilde{\rho}(A)\,.$$

Démonstration de la proposition 4.17. — Par hypothèses, il existe une fonction J strictement positive et ν-intégrable telle que $d\rho = Jd\nu$. Donc on a $d\tilde{\rho} = \tilde{J}d\tilde{\nu}$, où

$$\tilde{J}(\xi,\zeta) = J(\xi)J(\zeta)\frac{\exp 2(\xi|\zeta)^G}{\exp 2v(\xi|\zeta)}\,.$$

Nous allons d'abord montrer que $\tilde{J}$ est essentiellement constante (et non nulle). Il existe une constante $C > 1$ telle que l'ensemble

$$A \stackrel{\text{def.}}{=} \{(1/C) \leq \tilde{J} \leq C\}$$

est de mesure strictement positive (pour $\tilde{\nu}$). Comme $\tilde{\nu}$ est ergodique, pour $\tilde{\nu}$-presque tout $(\xi,\zeta) \in \partial^2 X$, il existe $\gamma \in \Gamma$ tel que $\gamma(\xi,\zeta) \in A$. L'invariance de $\tilde{\nu}$ et la quasi-invariance de $\tilde{\rho}$ nous conduisent à

$$\tilde{J}(\xi,\zeta) \asymp \tilde{J}(\gamma(\xi),\gamma(\zeta))\,.$$

Ceci montre l'assertion.

Par suite, pour $\tilde{\nu}$-presque tout (ξ,ζ),

$$J(\xi)J(\zeta) \asymp \frac{\exp 2v(\xi|\zeta)}{\exp 2(\xi|\zeta)^G}\,.$$

Supposons $\operatorname{Ln} J$ non bornée dans un voisinage U d'un point $\xi \in \partial X$. On peut alors trouver un point $\zeta \in \partial X$ avec $J(\zeta)$ finie et non nulle, et suffisamment loin de U de sorte que

$$\frac{\exp 2v(\xi'|\zeta)}{\exp 2(\xi'|\zeta)^G} \asymp 1$$

pour tout $\xi' \in U$. Ceci montre que $\operatorname{Ln} J$ devait être bornée dans U : une contradiction. $\square$

4.3.4. *Dimension de la mesure harmonique et caractérisation géométrique de l'égalité fondamentale.* Nous pouvons maintenant établir le théorème 4.11.

Démonstration du théorème 4.11. — La proposition 4.12, le théorème 3.2 et la proposition A.7 impliquent que la dimension de ν vaut bien $h/\varepsilon\ell$.

Nous nous intéressons maintenant au cas maximal et nous montrons d'abord que (i), (ii) et (iii) sont équivalents. Ensuite, nous montrerons que (iii) implique (iv), (iv) implique (v) qui implique (iii).

– D'après la proposition 4.13, (i) implique (ii). La proposition 4.17 nous dit que (ii) implique (iii). De plus, si ν et ρ sont équivalentes, alors elles ont même dimension. Donc, d'après le théorème 2.8, on a

$$\frac{h}{\ell\varepsilon} = \mathrm{HD}(\nu) = \mathrm{HD}(\rho) = \frac{v}{\varepsilon}\,,$$

et $h = \ell v$.

– Pour montrer que (iii) implique (iv), on applique le lemme de l'ombre (lemme 2.11) : pour tout $\gamma \in \Gamma$,

$$e^{-vd(w,\gamma(w))} \asymp \rho(O(\gamma(w))) \asymp \nu(O(\gamma(w))) \asymp e^{-d_G(e,\gamma)}$$

d'où l'existence d'une constante C telle que

$$|vd(w,\gamma(w)) - d_G(e,\gamma)| \leq C\,.$$

Puisque Γ opère transitivement et par isométries pour les deux distances, on en déduit que (X, vd) et (Γ, d_G) sont $(1, C)$-quasi-isométriques.
– Si on suppose (iv), alors les fonctions de Busemann coïncident au facteur v près. Donc la dérivée de Radon-Nikodym de $\gamma^*\nu$ par rapport à ν en un point $\xi \in \partial X$ est proportionnelle à $\exp(-vB_\xi(w,\gamma^{-1}(w)))$ presque partout. Du coup, ν est une mesure quasiconforme sur $(\partial X, d_\varepsilon)$: le point (v) est ainsi déduit.
– En ce qui concerne la dernière implication, (v) implique (iii), on peut utiliser l'unicité dans le théorème 2.8 pour montrer que ρ et ν sont équivalentes et ont une densité bornée. Ceci prouve (iii).

□

4.4. Le cas du groupe libre

D'après ce que nous avons vu dans les précédents chapitres, la distance de Green étant proportionnelle à la distance des mots, elle est automatiquement hyperbolique. Les distances visuelles pour les deux distances coïncident. La mesure conforme et stationnaire ρ reste conforme. Elle est donc de dimension maximale (ce qui découle aussi du cas d'égalité dans l'inégalité fondamentale). Conjecturalement, cette situation ne peut se produire que pour un groupe virtuellement libre (pour une marche à support fini).

Notes bibliographiques

L'essentiel de cette partie provient de [BHM2]. Le théorème 4.3 est central pour identifier le bord de Martin avec le bord de Gromov dans [Anc2]. Certains calculs de dimension apparaissent dans [Led1]. V. Le Prince a aussi établi l'inégalité $\mathrm{HD}(\nu) \leq h/(\varepsilon\ell)$ sous la seule hypothèse de premier moment fini [LP1]. Ce rapport $h/\varepsilon\ell$ est aussi la dimension de Minkowski de la marche [LP2]. V. Kaimanovich fait une étude systématique de l'action de $\partial^2 X$ dans [Kai1] ; on y trouve notamment l'usage du noyau de Naïm et l'ergodicité de $\tilde{\nu}$.

5. APPLICATIONS

On propose trois applications de notre étude de la distance de Green.

5.1. Mesures stationnaires des réseaux non-uniformes

On propose une démonstration alternative basée sur la distance de Green d'un résultat de Y. Guivarc'h et Y. Le Jan sur les marches aléatoires sur les groupes fuchsiens, voir le dernier corollaire de [GLJ1].

THÉORÈME 5.1 (Y. Guivarc'h & Y. Le Jan). — *Soit* Γ *un réseau non-uniforme de* $PSL_2(\mathbb{R})$*, c'est-à-dire* Γ *est un sous-groupe discret d'isométries de* $\mathbb{H}^2$ *tel que le quotient* $\mathbb{H}^2/\Gamma$ *est de volume fini mais non compact.*

Soit ν_1 *la mesure harmonique sur* $\mathbb{S}^1$ *donnée par une marche engendrée par une mesure de probabilité symétrique* μ *de support fini sur* Γ*. Alors* ν_1 *est étrangère à la mesure de Lebesgue sur* $\mathbb{S}^1$*.*

Ce théorème était initialement déduit de l'étude de l'enroulement du flot géodésique, voir [GLJ1, GLJ2], et aussi [GR]. Une démonstration plus récente s'appuie sur les propriétés ergodiques de l'action de groupes de difféomorphismes du cercle établies par B. Deroin, V. Kleptsyn et A. Navas dans [DKN]. Elle s'applique aux marches dont la loi a un premier moment fini.

Nous allons voir ici comment déduire le théorème 5.1 de l'hyperbolicité de la distance de Green. On ne considère que le cas de support fini bien que le même argument s'appliquerait aux marches de premier moment fini telles que $d_G \in \mathcal{D}(\Gamma)$.

On commence par un lemme géométrique.

LEMME 5.2. — Soit (X, w) un espace hyperbolique quasiréglé vérifiant la propriété suivante de visibilité : il existe R_1 tel que tout $x \in X$ est à distance au plus R_1 d'un quasirayon $[w, \xi)$, $\xi \in \partial X$. Alors il existe une constante C telle que

$$|d(x,y) - \sup_{\xi \in \partial X} B_\xi(x,y)| \leq C\,,$$

pour tous $x, y \in X$. La constante C dépend seulement des données (δ, λ, c, τ, R_1).

Cette propriété de visibilité est vérifée dès que le groupe d'isométries de X est cocompact, voir la remarque 2.10.

Démonstration. — L'inégalité triangulaire implique que l'on a toujours $B_\xi(x,y) \leq d(x,y)$. Choisissons maintenant $x, y \in X$ et $\xi \in \partial X$ tels que y est à distance au plus R_1 d'un quasirayon $[w, \xi)$. Si ces quatre points étaient sur un arbre véritable, nous aurions $B_\xi(x,y) \geq d(x,y) - R_1$. En approchant cette configuration par un arbre donné par le théorème 2.4, on obtient le lemme. □

La proposition suivante est la clef de la démonstration du théorème 5.1. On introduit d'abord le contexte.

Soit X un espace hyperbolique propre quasiréglé et soit Γ un groupe hyperbolique qui opère par isométries sur X proprement discontinûment. On considère une mesure de probabilité μ sur Γ de support fini et dont le support engendre Γ. Soit ν la mesure harmonique sur $\partial\Gamma$, le bord visuel de Γ.

Soit $\Gamma(w)$ l'orbite d'un point $w \in X$. D'après le théorème 2.12, la marche $(Z_n(w))_n$ converge presque sûrement vers un point Z_∞ de ∂X, le bord visuel de X. Soit ν_X la loi de Z_∞.

Bien que les deux espaces ∂X et $\partial\Gamma$ peuvent être topologiquement différents, les espaces mesurés $(\partial X, \nu_X)$ et $(\partial\Gamma, \nu)$ sont isomorphes en tant que Γ-espaces i.e., il existe un isomorphisme d'espaces mesurés Φ entre $(\partial\Gamma, \nu)$ et $(\partial X, \nu_X)$ qui conjugue l'action de Γ sur ces deux espaces. En effet, ce sont des modèles du bord de Poisson de la marche aléatoire. Ceci est établi dans [Kai2, Theorem 7.7 et Remark 7.3] pour $(\partial X, \nu_X)$ et c'est un fait général pour le bord de Martin $(\partial\Gamma, \nu)$.

PROPOSITION 5.3. — *Soit X un espace hyperbolique propre quasiréglé muni d'une action géométrique. On note ρ une mesure de Patterson-Sullivan. Soient Γ un groupe hyperbolique qui opère par isométries sur X proprement discontinûment et $\Gamma(w)$ une orbite de Γ dans X. On considère une mesure de probabilité symétrique μ sur Γ de support fini et dont le support engendre Γ. Soit ν_X la mesure harmonique sur ∂X.*

Si ρ et ν_X sont équivalentes, alors Γ et X sont quasi-isométriques.

Démonstration. — On vérifie comme dans la proposition 4.17 que, si ρ et ν_X sont équivalentes, alors leurs densités sont presque sûrement bornées.

On rappelle la formule suivante :

$$\frac{d\gamma^*\nu}{d\nu}(\xi) = K_\xi(\gamma^{-1})$$

pour ν-presque tout point $\xi \in \partial\Gamma$ où K_ξ désigne le noyau de Martin. Par l'isomorphisme Φ, on a aussi

$$\frac{d\gamma^*\nu_X}{d\nu_X}(\xi) = K_{\Phi^{-1}(\xi)}(\gamma^{-1}),$$

pour ν_X-presque tout point $\xi \in \partial X$.

D'autre part, ρ étant une mesure quasiconforme, elle vérifie

$$\frac{d\gamma^*\rho}{d\rho}(\xi) \asymp e^{vB_\xi(w,\gamma^{-1}(w))},$$

où B_ξ désigne la fonction de Busemann de X.

Comme la densité de ν_X par rapport à ρ est bornée et loin de 0, nous pouvons en déduire

$$K_{\Phi^{-1}(\xi)}(\gamma^{-1}) \asymp e^{vB_\xi(w,\gamma^{-1}(w))}, \tag{14}$$

pour ρ-presque tout ξ.

Nous faisons maintenant appel au lemme 5.2. Tout d'abord, on remarque que, étant donnés $x, y \in X$, $\sup_{\xi\in\partial X} B_\xi(x, y)$ peut être remplacé par un supremum essentiel par rapport à ρ puisque ρ, étant quasiconforme, charge tout ouvert non vide et puisque $\xi \to B_\xi(x,y)$ est localement presque constante. On déduit donc du lemme 5.2 que

$$|d(x,y) - \operatorname*{ess\,sup}_{\xi\in\partial X} B_\xi(x,y)|$$

est bornée. Par un argument similaire, en appliquant le lemme 5.2 à la distance de Green sur Γ, on conclut que

$$|d_G(e,\gamma^{-1}) - \operatorname*{ess\,sup}_{\xi\in\partial\Gamma} \operatorname{Ln} K_\xi(\gamma^{-1})|$$

est aussi bornée. Ici, le supremum essentiel concerne la mesure ν.

Mais (14) implique que

$$|\operatorname*{ess\,sup}_{a\in\partial\Gamma} \operatorname{Ln} K_a(\gamma^{-1}) - v \operatorname*{ess\,sup}_{\xi\in\partial X} B_\xi(w,\gamma^{-1}(w))|$$

est bornée et donc

$$\sup_{\gamma\in\Gamma} |d_G(e,\gamma^{-1}) - v\, d(w,\gamma^{-1}(w))| < \infty\,.$$

Par conséquent, Γ et $\Gamma(w)$ sont quasi-isométriques, de sorte que l'action de Γ sur X est quasiconvexe. Mais, par hypothèses, son ensemble limite est tout le bord ∂X, donc Γ et X sont quasi-isométriques. □

Démonstration du théorème 5.1. — On procède par contradiction en supposant que ν_1 est équivalente à la mesure de Lebesgue λ de $\mathbb{S}^1$.

Tout d'abord, on remarque que lon peut se restreindre au sous-groupe engendré par le support de μ. Si ce groupe est de covolume infini, alors son ensemble limite est un sous-ensemble strict de $\mathbb{S}^1$ et ν_1 ne serait certainement pas équivalente à la mesure de Lebesgue. Donc on peut, et on le fera (!), supposer que le support de μ engendre Γ et que Γ est de type fini et de covolume fini.

D'après le lemme de Selberg, Γ contient un sous-groupe sans torsion Γ_S d'indice fini de sorte que $\mathbb{H}^2/\Gamma_S$ est une surface de Riemann compacte avec un nombre fini et non nul d'épointements. Par conséquent, Γ_S est isomorphe à un groupe libre, de sorte que Γ est hyperbolique et son bord est un compact parfait et totalement discontinu, soit un ensemble de Cantor. Mais la proposition 5.3 implique que Γ devrait être quasi-isométrique à $\mathbb{H}^2$. Du coup, le bord de Γ devrait être homéomorphe au cercle unité, la contradiction recherchée. □

5.2. Conjecture de Baum-Connes pour les groupes hyperboliques

On définit une application, dite de Baum-Connes, de la K-théorie topologique de Γ vers la K-théorie de la C^*-algèbre réduite de Γ. La conjecture de Baum-Connes affirme que pour tout groupe localement compact Γ, cette application est une bijection. Cela fournirait une solution complète au problème du calcul des indices supérieurs d'opérateurs elliptiques sur des variétés compactes. Cette conjecture implique notamment les conjectures de Novikov et de Kadison-Kaplansky, voir [Laf] et les références qui s'y trouvent pour de plus amples explications.

L'objet de ce paragraphe est de donner une nouvelle démonstration du théorème suivant dû à V. Lafforgue [Laf] et à I. Mineyev et G. Yu [MY]. Il reprend [HM].

Théorème 5.4. — *Un groupe hyperbolique non-élémentaire vérifie la conjecture de Baum-Connes sans coefficients.*

L'argument principal est le même que celui dans [MY] et consiste à faire opérer le groupe sur un « bon espace » afin d'appliquer le critère de V. Lafforgue [Laf, Cor. 0.0.4 (2)] :

Théorème 5.5. — *Si un groupe localement compact G a la propriété (RD) et admet une action propre sur un espace métrique uniformément fini, faiblement géodésique et fortement bolique, alors G vérifie la conjecture de Baum-Connes sans coefficients.*

Il est connu qu'un groupe hyperbolique vérifie la propriété (RD) [dlH] ; nous ne nous étendrons pas plus sur cette notion. On dit qu'un espace métrique (X, d) est *uniformément localement fini* si, pour tout $r \in \mathbb{R}_+$, il existe $K \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $x \in X$, la boule $\mathcal{B}(x, r)$ contienne au plus K points. Soit $\alpha > 0$; on dit que (X, d) est *faiblement α-géodésique* si, quels que soient $x, y \in X$ et $t \in [0, d(x, y)]$, il existe $a \in X$ tel que $d(a, x) \leq t + \alpha$ et $d(a, y) \leq d(x, y) - t + \alpha$. Si $x, y \in X$, on appelle *α-milieu de x et y* un point $a \in X$ tel que $d(a, x) \leq (1/2)d(x, y) + \alpha$ et $d(a, y) \leq (1/2)d(x, y) + \alpha$. Enfin, on dit que (X, d) est *fortement bolique* si les conditions suivantes sont réalisées :

(B1) pour tout $r > 0$ et tout $\eta > 0$, il existe $R > 0$ tel que, pour tout quadruplet x, y, z, t de points de X vérifiant $d(x, y) + d(z, t) \leq r$ et $d(x, z) + d(y, t) \geq R$, on ait $d(x, t) + d(y, z) \leq d(x, z) + d(y, t) + 2\eta$;

(B2) il existe une application $m : X \times X \to X$ et une constante $\alpha > 0$ telles que, pour $x, y \in X$, $m(x, y)$ soit un α-milieu de x et y, que pour $x, y, z \in X$, $d(m(x, y), z) \leq \max\{d(x, z), d(y, z)\} + 2\alpha$, et que, pour tout $p \geq 0$, il existe $N(p) \geq 0$ tel que, pour tout $N \geq N(p)$, pour $x, y, z \in X$ vérifiant $d(x, z) \leq N$, $d(y, z) \leq N$, et $d(x, y) > N$, on ait $d(m(x, y), z) < N - p$.

Nous appliquerons le théorème 5.5 à l'action de Γ sur lui-même muni de la métrique de Green associée à une marche aléatoire.

Proposition 5.6. — *Un espace δ-hyperbolique quasiréglé est faiblement géodésique et vérifie (B2).*

Démonstration. — On montre d'abord que X est faiblement géodésique. Soient $x, y \in X$ et $t \in [0, d(x, y)]$; il existe une (λ, c, τ)-quasirègle $q : [a, b] \to X$ avec $q(a) = x$ et $q(b) = y$. On suppose $(b - a)$ entier. Si $t = d(x, y)$, il suffit de choisir le point y, donc on suppose dorénavant $t < d(x,y)$. Posons $s_j = a + j$ pour $j \in \mathbb{N} \cap [0, |b-a|]$. On considère le plus grand entier j tel que $d(x, q(s_j)) \leq t$ de sorte que $q(s_{j+1})$ est bien défini. Par conséquent, en utilisant l'inégalité triangulaire, on obtient

$$\begin{aligned} 0 \leq t - d(x, q(s_j)) &< d(x, q(s_{j+1})) - d(x, q(s_j)) \\ &\leq d(q(s_j), q(s_{j+1})) \leq \lambda + c\,. \end{aligned}$$

Par ailleurs, la propriété de quasirègle nous donne

$$\begin{aligned} d(y, q(s_j)) + t &\leq d(y, q(s_j)) + d(x, q(s_j)) + \lambda + c \\ &\leq d(x,y) + (\lambda + c + 2\tau)\,. \end{aligned}$$

En définitive, si on pose $z = q(s_j)$ et $\alpha_0 = (\lambda + c + 2\tau)$, on a montré $d(z,x) \leq t + \alpha_0$ et $d(z,y) \leq d(x,y) - t + \alpha_0$, donc X est α_0-faiblement géodésique. On en déduit aussi l'existence d'un α_0-milieu de $x, y \in X$ sur une quasirègle. Avec une fonction de choix, on peut donc définir $m : X \times X \to X$ telle que $m(x,y)$ soit un α_0-milieu sur une (λ, c, τ)-quasirègle. Du coup, on aura aussi $d(x,y) \geq d(x,m) + d(m,y) - 2\tau$ où $m = m(x,y)$.

Montrons (B2). Soient x, y, z trois points de X et $m = m(x,y)$. Par hyperbolicité, on peut supposer $(x|y)_z \geq (x|m)_z - \delta$. Du coup, on a

$$d(y,z) - d(x,y) \geq d(z,m) - d(x,m) - 2\delta$$

et

$$(\star) \qquad \begin{aligned} d(z,m) &\leq d(y,z) - (d(x,y) - d(x,m)) + 2\delta \\ &\leq d(y,z) - d(y,m) + 2\delta + 2\tau\,. \end{aligned}$$

Par suite, si on prend $\alpha = \max\{\alpha_0, 2\delta\}$, alors nous aurons bien

$$d(z,m) \leq \max\{d(x,z), d(y,z)\} + 2\alpha\,,$$

ce qui établit la première partie de (B2).

Pour la seconde partie, on suppose de plus $N > 0$, $d(x,y) > N$, $d(x,z) \leq N$ et $d(y,z) \leq N$. On se fixe $p > 0$, et nous choisissons $N \geq 2(p + 2\delta + 2\tau + \alpha_0)$. Il vient $d(y,m) \geq (1/2)d(x,y) - \alpha \geq N/2 - \alpha_0$ et, en utilisant $(\star)$,

$$d(z,m) \leq \frac{N}{2} + 2\delta + 2\tau + \alpha_0 \leq N - p\,.$$

□

PROPOSITION 5.7. — *Soit (X,w) un espace métrique pointé propre, quasiréglé et hyperbolique. On suppose que son groupe d'isométries est cocompact. Si toute suite convergente au sens de Gromov est convergente au sens de Busemann, alors X est fortement bolique.*

Démonstration. — La condition (B2) est vraie par la proposition 5.6. Nous montrons la condition (B1) par l'absurde. On se fixe $r > 0$ et $\eta > 0$ et on suppose que, pour tout $n > 0$ il existe un quadruplet x_n, y_n, z_n, t_n de points de X vérifiant $d(x_n, y_n) + d(z_n, t_n) \leq r$, $d(x_n, z_n) + d(y_n, t_n) \geq n$ et $d(x_n, t_n) + d(y_n, z_n) \geq d(x_n, z_n) + d(y_n, t_n) + 2\eta$. En faisant opérer le groupe d'isométries, on peut supposer que les suites $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ restent dans un compact K contenant w, et, quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que $(z_n)_n$ et $(t_n)_n$ sont convergentes au sens de Gromov et de Busemann. Du coup, on obtient

$$\Phi(t_n)(x_n) + \Phi(z_n)(y_n) \geq \Phi(z_n)(x_n) + \Phi(t_n)(y_n) + 2\eta,$$

ce qui implique que les limites de $(\Phi(z_n))_n$ et $(\Phi(t_n))_n$ sont distinctes. Or, par hypothèses,

$$d(w, z_n) + d(w, t_n) \geq d(x_n, z_n) + d(y_n, t_n) - (d(w, x_n) + d(w, t_n)) \geq n - 2\mathrm{diam}\, K$$

donc la suite $((z_n|t_n)_w)_n$ tend vers l'infini puisque $(d(z_n, t_n))_n$ est uniformément bornée. Du coup, les suites $(z_n)_n$ et $(t_n)_n$ tendent vers le même point au sens de Gromov, ce qui devrait impliquer que les suites $(\Phi(z_n))_n$ et $(\Phi(t_n))_n$ ont même limite : absurde. □

Démonstration du théorème 5.4. — Un groupe hyperbolique Γ étant de type fini, on peut considérer une mesure de probabilité symétrique dont le support — fini — engendre le groupe. D'après les lemmes 1.7 et 1.8, et le théorème 4.1, Γ opère par isométries proprement discontûment sur (Γ, d_G) qui est uniformément localement fini, hyperbolique et quasiréglé. D'autre part, le théorème 3.5 affirme que les bords de Busemann et de Gromov de (Γ, d_G) coïncident. Par conséquent, les propositions 5.6 et 5.7 montrent que Γ opère proprement sur l'espace métrique uniformément localement fini, faiblement géodésique et fortement bolique (Γ, d_G). Donc on peut conclure la démonstration du théorème 5.4 avec le théorème 5.5. □

5.3. **Approche aléatoire et incertaine de la conjecture de Cannon**

CONJECTURE 5.8 (Cannon). — Soit Γ un groupe hyperbolique de bord homéomorphe à la sphère de dimension deux. Alors Γ opère géométriquement sur l'espace hyperbolique $\mathbb{H}^3$.

Si Γ vérifie cette conjecture, alors il s'identifie, à un quotient fini près, à un sous-groupe cocompact et discret d'isométries de $\mathbb{H}^3$. Les méthodes de discrétisation évoquées au paragraphe 3 permettent de munir Γ d'une marche de loi symétrique admettant un moment exponentiel de sorte que la distance de Green soit hyperbolique et dans la classe de quasi-isométrie de $\mathbb{H}^3$. De plus, la mesure harmonique coïncide avec la mesure de Lebesgue de $\mathbb{S}^2$ vu comme bord à l'infini de $\mathbb{H}^3$. La mesure harmonique est donc Ahlfors-régulière de dimension 2.

Théoriquement, on devrait pouvoir résoudre la conjecture de Cannon ainsi. Soit Γ un groupe opérant géométriquement sur un espace hyperbolique géodésique propre X de bord une 2-sphère S^2 que l'on munit d'une distance visuelle d_v. On cherche une marche aléatoire de moment exponentiel telle que la distance de Green soit quasiréglée. Dans ce cas, la mesure harmonique ν vérifie la condition de doublement du volume sur $(\partial X, d_v)$. Posons

$$q(\xi,\zeta) = \sqrt{\nu(\mathcal{B}(\xi, d_v(\xi,\zeta)) \cup \mathcal{B}(\zeta, d_v(\xi,\zeta)))}$$

pour $\xi, \zeta \in \partial X$. Une construction de S. Semmes implique que s'il existe une distance bilipschitzienne à q, alors cette distance d serait quasisymétrique à d_v et Ahlfors-régulière de dimension 2 [Hei, § 14.18]. D'après des travaux de M. Bonk et B. Kleiner, on pourrait en déduire que Γ opère géométriquement sur $\mathbb{H}^3$ [BK].

Annexe A. MESURES ET DIMENSIONS

Soient $s, t \geq 0$, on pose

$$\mathcal{H}_s^t(X) = \inf\left\{\sum (\operatorname{diam} U_i)^s,\ X \subset (\cup U_i), \operatorname{diam} U_i \leq t\right\},$$

et on définit

$$\mathcal{H}_s(X) = \lim_{t\to 0} \mathcal{H}_s^t(X).$$

LEMME A.1. — Si $\mathcal{H}_s(X) < \infty$ alors pour tout $s' > s$, on a $\mathcal{H}_{s'}(X) = 0$.
Si $\mathcal{H}_s(X) > 0$ alors pour tout $s' < s$, on a $\mathcal{H}_{s'}(X) = \infty$.

Démonstration. — Soient $t, \varepsilon > 0$ et (U_i) un recouvrement de taille t tel que

$$\left|\mathcal{H}_{s'}^t(X) - \sum (\operatorname{diam} U_i)^{s'}\right| < \varepsilon.$$

On considère $s > s' \geq 0$. On a

$$\mathcal{H}_s^t(X) \leq \sum (\operatorname{diam} U_i)^s \leq t^{s-s'} \sum (\operatorname{diam} U_i)^{s'} \leq t^{s-s'}(\mathcal{H}_{s'}^t(X) + \varepsilon).$$

Par suite, si $\mathcal{H}_s(X) > 0$, on trouve que $\mathcal{H}_{s'}(X) = \infty$, et si $\mathcal{H}_{s'}(X) < \infty$, alors $\mathcal{H}_s(X) = 0$. □

DÉFINITION A.2. — La *dimension de Hausdorff* de X est le nombre $s \in [0,\infty]$ telle que pour tout $s' < s$, on ait $\mathcal{H}_{s'}(X) = \infty$ et pour tout $s' > s$, on ait $\mathcal{H}_{s'}(X) = 0$.

Posons

$$\widehat{\mathcal{H}}_s^t(X) = \inf\left\{\sum r_i^s,\ \mathcal{B}_i = \mathcal{B}(x_i, r_i),\ X \subset (\cup \mathcal{B}_i), r_i \leq t\right\}.$$

LEMME A.3. — Pour tout $s > 0$, on a

$$2^{-s}\mathcal{H}_s(X) \leq \widehat{\mathcal{H}}_s(X) \leq \mathcal{H}_s(X).$$

Cela signifie que l'on peut estimer la dimension de Hausdorff de X en ne considérant des recouvrements que par des boules.

Démonstration. — Si $(\mathcal{B}_i)_i$ est un recouvrement par des boules de rayon au plus t, alors $\operatorname{diam}\mathcal{B}_i \leq 2t$. Donc, si $|\widehat{\mathcal{H}}_s^t(X) - \sum r_i^s| \leq \varepsilon$, alors $\mathcal{H}_s^{2t}(X) \leq 2^s\widehat{\mathcal{H}}_s^t(X) + \varepsilon$, et $\mathcal{H}_s(X) \leq 2^s\widehat{\mathcal{H}}_s(X)$.

Réciproquement, on se fixe un recouvrement (U_i) de taille t telle que $|\mathcal{H}_s^t(X) - \sum(\operatorname{diam} U_i)^s| \leq \varepsilon$. Pour chaque i, on considère $x_i \in U_i$, par suite $U_i \subset \mathcal{B}(x_i, \operatorname{diam} U_i) = \mathcal{B}_i$. Donc $\widehat{\mathcal{H}}_s^t(X) \leq \mathcal{H}_s^t(X) + \varepsilon$ et $\widehat{\mathcal{H}}_s(X) \leq \mathcal{H}_s(X)$. □

On utilisera dans la suite le lemme de recouvrement suivant dont on peut trouver une démonstration dans [Mat, Thm. 2.1].

LEMME A.4. — Soient X un espace métrique propre et $\mathfrak{B}$ une famille de boules dans X de rayon uniformément majoré. Alors il existe une sous-famille $\mathfrak{B}' \subset \mathfrak{B}$ de boules deux à deux disjointes telle que

$$\cup_{\mathfrak{B}}\mathcal{B} \subset \cup_{\mathfrak{B}'}(5\mathcal{B})\,.$$

A.1. Dimension de Minkowski

Soit X un ensemble de diamètre borné. Pour tout $\varepsilon > 0$, on note $N(\varepsilon)$ le nombre minimal de boules de rayon ε centrées sur X qu'il faut pour recouvrir X. On définit

$$\dim_M X = \limsup_{\varepsilon\to 0} \frac{\log N(\varepsilon)}{\log 1/\varepsilon}\,.$$

A $\varepsilon > 0$ fixé, on note aussi $P(\varepsilon)$ le nombre maximal de boules centrées sur X et de rayon ε qui soient deux à deux disjointes.

LEMME A.5. — On a

$$\dim X \leq \dim_M X = \limsup_{\varepsilon\to 0} \frac{\log P(\varepsilon)}{\log 1/\varepsilon}\,.$$

Démonstration. — On montre d'abord l'égalité : soit $\varepsilon > 0$, si $\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_{N(\varepsilon)}$ est un recouvrement par des boules de rayon ε, alors le lemme A.4 de recouvrement nous permet d'affirmer que $N(\varepsilon) \leq P(\varepsilon/5)$. De plus, si $\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_{P(\varepsilon)}$ sont deux à deux disjointes, alors $(2\mathcal{B}_i)$ recouvrent X, sinon le recouvrement ne serait pas maximal : il en découle que $N(2\varepsilon) \leq P(\varepsilon)$. Du coup,

$$\dim_M X = \limsup_{\varepsilon\to 0} \frac{\log P(\varepsilon)}{\log 1/\varepsilon}\,.$$

On suppose que $\dim_M X < \infty$. Soit $\eta > 0$, si ε est assez petit, alors $\log N(\varepsilon) \leq \log(1/\varepsilon)(\dim_M X + \eta)$. Notons $s = \dim_M X + \eta/2$; on considère un recouvrement par des boules $(\mathcal{B}_i)$ de taille ε. Par suite, on a

$$\widehat{\mathcal{H}}_s^\varepsilon(X) \leq N(\varepsilon)\varepsilon^s = \exp\{\log N(\varepsilon) - s\log(1/\varepsilon)\}.$$

Or, $\log N(\varepsilon) - s\log(1/\varepsilon) \leq (-\eta/2)\log 1/\varepsilon$, donc $\widehat{\mathcal{H}}_s^\varepsilon(X) \leq \varepsilon^{\eta/2}$ et $\dim X \leq s$. Par suite, $\dim X \leq \dim_M X$. □

A.2. **Ahlfors-régularité**

Un espace Ahlfors-régulier (de dimension $Q \geq 0$) est un espace métrique mesuré (X, d, μ), où μ est une mesure de Radon telle que, pour toute boule $\mathcal{B}$ de rayon $r > 0$, on ait $\mu(\mathcal{B}) \asymp r^Q$.

THÉORÈME A.6. — *Si (X, μ) est Q-Ahlfors-régulier alors* $\dim_M X = \dim X = Q$ *et* $\mathcal{H}_Q \asymp \mu$.

Démonstration. — Soit $A \subset X$ un borélien borné.

On se fixe $t, \varepsilon > 0$ et un recouvrement par des boules $(\mathcal{B}_i)$ tel que $\sum r_{\mathcal{B}_i}^Q \leq \widehat{\mathcal{H}}_Q^t(A) + \varepsilon$. On a
$$\mu(A) \leq \mu(\cup \mathcal{B}_i) \leq \sum \mu(\mathcal{B}_i) \lesssim \sum r_i^Q \lesssim \widehat{\mathcal{H}}_Q^t(A) + \varepsilon\,.$$
Par conséquent, $\mu(A) \lesssim \widehat{\mathcal{H}}_Q(A)$.

Réciproquement, on suppose que $\mu(A) < \infty$ et on se fixe $\varepsilon > 0$. Comme μ est régulière il existe un compact $K \subset A$, et un ouvert $U \supset A$ tels que $\mu(U \setminus K) < \varepsilon$. On considère $t < (1/2) \inf\{d(x, K),\ x \notin U\}$. Les boules $\{\mathcal{B}(x, r)\}_{x \in K, r \leq t}$ recouvrent K et sont contenues dans U, donc le Lemme A.4 implique qu'il existe une sous-famille $(\mathcal{B}_i)$ de boules deux à deux disjointes telle que $(5\mathcal{B}_i)$ recouvre K.

Par suite,
$$\mathcal{H}_Q^t(K) \lesssim \sum (5r_i)^Q \lesssim \sum r_i^Q \lesssim \sum \mu(\mathcal{B}_i).$$
Or
$$\sum \mu(\mathcal{B}_i) \leq \mu(\cup \mathcal{B}_i) \leq \mu(U) \leq \mu(A) + \varepsilon\,.$$
Donc $\mathcal{H}_Q(K) \lesssim \mu(A)$, et $\mathcal{H}_Q(A) \lesssim \mu(A)$ car $\mathcal{H}_Q$ est aussi régulière.

En prenant $A = X \cap \mathcal{B}(x_0, R)$, on obtient $\dim X = Q$.

Soit $\varepsilon > 0$; on considère $P(\varepsilon)$ boules deux à deux disjointes centrées sur X et de rayon ε. Alors
$$\mu(X) \geq \sum \mu(\mathcal{B}_i) \gtrsim P(\varepsilon)\varepsilon^Q$$
donc
$$\log P(\varepsilon) \leq Q \log(1/\varepsilon) + O(1)$$
et $\dim_M X \leq Q$. □

A.3. **Dimension d'une mesure et dimension ponctuelle**

Soit ν est une mesure borélienne sur un espace X. On appelle $\dim \nu$ l'infimum des dimensions de Hausdorff des ensembles de mesure totale.

PROPOSITION A.7. — *Soient X un espace métrique propre et ν une mesure de probabilité borélienne regulière sur X. Si, pour ν-presque tout $x \in X$, on a*
$$\lim_{r \to 0} \frac{\log \nu(\mathcal{B}(x, r))}{\log r} = \alpha$$
alors $\dim \nu = \alpha$.

Démonstration. — Soit $s > \alpha$, et choisissons $\eta > 0$ assez petit pour qu'on ait $\beta := s - \alpha - \eta > 0$. Pour ν-presque tout x, on peut trouver un rayon $r_x > 0$ de sorte qu'on ait

$$\left| \frac{\log \nu(\mathcal{B}(x,r))}{\log r} - \alpha \right| \leq \eta \,,$$

pour $r \in (0, r_x]$.

On considère l'ensemble $Y = \{x \in X \;:\; r_x < \infty\}$, qui est de mesure pleine. Soit $t \in (0,1)$. Pour tout $x \in Y$, on choisit $\rho_x = \min\{r_x, t\}$. On applique le Lemme A.4 à $\{\mathcal{B}(x,\rho_x)\}$ et on obtient une sous-famille $\mathfrak{B}_t$. Par suite, Y est recourvert par $5\mathfrak{B}_t$ et

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{H}_s^{5t}(Y) & \leq & \displaystyle\sum_{\mathfrak{B}_t} (5\rho_x)^s \qquad \leq 5^s t^\beta \sum_{\mathfrak{B}_t} \rho_x^{\alpha+\eta} \\ & \lesssim & t^\beta \displaystyle\sum_{\mathfrak{B}_t} \nu(\mathcal{B}(x,\rho_x)) \ \ \lesssim t^\beta \nu\left(\cup_{\mathfrak{B}_t} \mathcal{B}(x,\rho_x)\right) \\ & \lesssim & t^\beta \end{array}$$

qui tend vers 0 avec t. Du coup $\mathcal{H}_s(Y) = 0$ et donc $\dim_H Y \leq s$ pour tout $s > \alpha$. D'où $\dim \nu \leq \alpha$.

Réciproquement, soit Y un ensemble de mesure pleine. Il existe un sous-ensemble $Z \subset Y$ tel que $\nu(Z) \geq 1/2$ et tel que la convergence de $\log \nu(\mathcal{B}(x,r))/\log r$ vers α soit uniforme sur Z (d'après le théorème d'Egorov). Fixons $s < \alpha$ et considérons $\eta > 0$ suffisamment petit pour que $\gamma = \alpha - \eta - s > 0$. Il existe $0 < r_0 \leq 5$ tel que, pour tout $r \in (0, r_0)$ et tout $x \in Z$,

$$\left| \frac{\log \nu(\mathcal{B}(x,r))}{\log r} - \alpha \right| \leq \eta \,.$$

Soit $\mathfrak{B}$ un recouvrement de Z par des boules de rayon ρ_x inférieur à $t \leq r_0/5$. On extrait une sous-famille $\mathfrak{B}_t = \{\mathcal{B}(x,\rho_x)\}$ grâce au Lemme A.4. Ainsi, $5\mathfrak{B}_t$ recouvre Z et

$$1/2 \leq \sum_{\mathfrak{B}_t} \nu(5\mathcal{B}) \leq 5^{\alpha-\eta} \sum_{\mathfrak{B}_t} \rho_x^{\alpha-\eta} \lesssim t^\gamma \sum_{\mathfrak{B}_t} \rho_x^s \,.$$

Ceci montre que $\mathcal{H}_s^t(Z) \gtrsim t^{-\gamma}$ de sorte que $\dim_H Y \geq \dim_H Z \geq \alpha$. □

Annexe B. ESPACES HYPERBOLIQUES QUASIRÉGLÉS

Dans cet appendice, on démontre un certain nombre de résultats concernant les espaces quasiréglés énoncés dans le corps du texte.

B.1. Redressement de configurations

Soit $I = [a,b] \subset \mathbb{R}$ un intervalle compact. On suppose dans tout ce paragraphe que les constantes (λ, c, τ) sont fixées.

LEMME B.1. — Soit $g : I \to X$ une quasirègle. Il existe une $(1, c_1)$-quasi-isométrie

$$f : g(I) \to [0, d(g(b), g(a))] ,$$

où c_1 ne dépend que des données (λ, c and τ).

Démonstration. — Pour tout $x \in g(I)$, on pose $f(x) = \min\{d(x, g(a)), d(g(b), g(a))\}$. Si $f(x) = d(g(b), g(a))$ alors $d(g(b), g(a)) \leq d(g(a), x)$ donc

$$d(g(b), x) \leq 2(g(a)|g(b))_x \leq 2\tau .$$

Du coup, on a, pour tout $x \in I$,

$$|d(x, g(a)) - f(x)| \leq 2\tau. \tag{15}$$

Soient $x, y \in g(I)$ avec $x = g(s)$ et $y = g(t)$, et supposons $s < t$.

– On applique (15) de manière répétée. D'une part, on a

$$|f(x) - f(y)| \leq |d(x, g(a)) - d(y, g(a))| + 4\tau \leq d(x, y) + 4\tau .$$

D'autre part, puisque $s < t$, on a

$$d(x, g(a)) + d(x, y) \leq d(y, g(a)) + 2\tau$$

de sorte que

$$|f(x) - f(y)| \geq d(x, y) - 8\tau.$$

Donc f est un plongement $(1, 8\tau)$-quasi-isométrique (les constantes sont loin d'être optimales).

– Si $|a - b| \leq 2$, alors $|f(g(a)) - f(g(b))| = d(g(b), g(a)) \leq 2\lambda + c$ et f est coborné (un entourage de l'image de f recouvre le but). Sinon, on a $|a - b| > 2$. Posons $s_j = a + j$ pour $j \in \mathbb{N} \cap [0, |b - a|]$. Il vient

$$|f(g(s_j)) - f(g(s_{j+1}))| \leq \lambda|s_j - s_{j+1}| + c + 4\tau \leq \lambda + c + 4\tau.$$

L'ensemble$\{f(g(s_j))\}_j$ est une chaîne dans $[0, d(g(b), g(a))]$ qui joint 0 à $|f(g(a)) - f(g(b))| = d(g(b), g(a))$; comme deux points consécutifs de $\{f(g(s_j))\}_j$ sont à distance au plus $\lambda+c+4\tau$, on en déduit qu'un $(\lambda+c+4\tau)$-voisinage recouvre $[0, d(g(b), g(a))]$. Donc f est une quasi-isométrie.

□

REMARQUE B.2. — Si f_a désigne l'application ci-dessus et $f_b : g(I) \to [0, d(g(b), g(a))]$ celle qui vérifie $f_b(g(b)) = 0$, alors on a $|f_a(x) + f_b(x) - d(g(b), g(a))| \leq 2\tau$.

Etant donnés trois points $\{x, y, z\}$, il existe un tripode T et un plongement isométrique $f : \{x, y, z\} \to T$ tels que les images sont les points terminaux de T. On note $\bar{c}$ le *centre* de T.

Un quasitriangle Δ est donné par trois points x, y, z et par trois quasirègles les reliant deux à deux. Nous noterons les côtés $[x, y]$, $[x, z]$ et $[y, z]$. Un tel quasitriangle est *δ-fin* si chaque côté appartient au δ-voisinage des deux autres.

LEMME B.3. — Soit Δ un quasitriangle δ-fin de sommets $\{x,y,z\}$. Il existe une $(1,c_2)$-quasi-isométrie

$$f_\Delta : \Delta \to T\,,$$

où T est le tripode associé à $\{x,y,z\}$ et c_2 ne dépend que des données $(\delta,\ \lambda,\ c,\ \tau)$.

Démonstration. — On définit f_Δ en appliquant le lemme B.1 sur chaque arête. Cette transformation est clairement cobornée.

Soient $u, v \in \Delta$. Puisque Δ est fin, on peut trouver deux points $u', v' \in \Delta$ sur la même arête tels que $d_\Delta(u,u') \le \delta$ et $d_\Delta(v,v') \le \delta$, de sorte que

$$|d_\Delta(u,v) - d_\Delta(u',v')| \le 2\delta.$$

Si u et u' sont sur la même arête, alors

$$d_T(f_\Delta(u), f_\Delta(u')) \le d_\Delta(u,u') + c_1 \le \delta + c_1\,.$$

Sinon, on considère le sommet x commun aux deux côtés contenant u et u'. Alors, d'après (15), on a

$$d_T(f_x(u), f_x(u')) \le d_\Delta(u,u') + 4\tau \le \delta + 4\tau$$

et de même pour v et v'. Donc

$$d_T(f_\Delta(u), f_\Delta(u')), d_T(f_\Delta(v), f_\Delta(v')) \le c',$$

où c' ne dépend que des données.

Il vient

$$|d_T(f_\Delta(u), f_\Delta(v)) - d_T(f_\Delta(u'), f_\Delta(v'))| \le 2c'.$$

Mais puisque u' et v' sont sur la même arête, le lemme B.1 implique

$$|d_T(f_\Delta(u'), f_\Delta(v')) - d_\Delta(u',v')| \le c_1\,,$$

donc

$$|d_T(f_\Delta(u), f_\Delta(v)) - d_\Delta(u',v')| \le 2c' + c_1$$

et enfin

$$|d_T(f_\Delta(u), f_\Delta(v)) - d_\Delta(u,v)| \le (2c' + c_1 + 2\delta).$$

□

Sous les conditions du lemme B.3, on a

$$|(f_\Delta(x)|f_\Delta(y))_{f_\Delta(z)} - (x|y)_z| \le C\,,$$

où $C > 0$ est une constante qui ne dépend que des données ; du coup, on peut trouver trois points $c_x \in [y,z]$, $c_y \in [x,z]$ et $c_z \in [y,x]$ tels que

$$d_T(f_\Delta(c_x), \bar{c}), d_T(f_\Delta(c_y), \bar{c}), d_T(f_\Delta(c_z), \bar{c}) \le c_3,$$

et

$$\operatorname{diam}\{c_x, c_y, c_z\} \le c_3,$$

où c_3 ne dépend que des données.

B.2. **Espaces quasiréglés et hyperbolicité**

PROPOSITION B.4. — *Soit X un espace métrique muni d'une structure quasiréglée $\mathcal{G}$ telle que tout quasitriangle est δ-fin. Alors X est hyperbolique quantitativement : la constante d'hyperbolicité ne dépend que de $(\delta, \lambda, c, \tau)$.*

Démonstration. — Soient $w, x, y, z \in X$. On considère les triangles suivants : $A = \{w, x, z\}$ et $B = \{w, x, y\}$. Notons T_A, T_B et $\bar{c}_A$, $\bar{c}_B$ les tripodes et les centres associés respectivement, et on définit $Q = T_A \sqcup T_B$ où les deux copies de $f_A([w,x])$ et $f_B([w,x])$ de $[w,x]$ ont été identifiées. Cet espace métrique Q est topologiquement une croix « $\times$ », et donc 0-hyperbolique.

On définit $f : A \cup B \to Q$ en transformant A par f_A et B par f_B. La restriction de f à A et à B est une $(1, c_2)$-quasi-isométrie par le lemme B.3.

Il s'ensuit

$$d_Q(f(y), f(z)) = d_Q(f(y), \bar{c}_B) + d_Q(\bar{c}_B, \bar{c}_A) + d_Q(\bar{c}_A, f(z)).$$

On peut trouver $c_A, c_B \in [w, x]$ tel que $d_Q(f(c_A), \bar{c}_A) \leq c_3$ et $d_Q(f(c_B), \bar{c}_B) \leq c_3$. Le lemme B.3 implique que $d_Q(f(y), f(c_B)) = d_{A\cup B}(y, c_B)$ et $d_Q(f(c_A), f(z)) = d_{A\cup B}(c_A, z)$ à une constante additive près. Du coup, $d_Q(f(y), \bar{c}_B) = d_{A\cup B}(y, c_B)$ et $d_Q(\bar{c}_A, f(z)) = d_{A\cup B}(c_A, z)$ à une constante additive près aussi. Par le lemme B.1, on a $d_Q(\bar{c}_B, \bar{c}_A) = d_{A\cup B}(c_B, c_A)$ à une constante additive près, d'où l'existence d'une constante $c_4 > 0$ telle que

$$d_Q(f(y), f(z)) \geq d_{A\cup B}(y, c_B) + d_{A\cup B}(c_B, c_A) + d_{A\cup B}(c_A, z) - c_4 \geq d_{A\cup B}(y, z) - c_4.$$

Par conséquent, on a $(f(y)|f(z))_{f(w)} \leq (y|z)_w + c_4$. Par l'hyperbolicité de Q, on trouve

$$(y|z)_w \geq \min\{(f(x)|f(z))_{f(w)}, (f(y)|f(x))_{f(w)}\} - c_4$$

et comme les restrictions de f à A et B sont des $(1, c_2)$-quasi-isométries,

$$\min\{(f(x)|f(z))_{f(w)}, (f(y)|f(x))_{f(w)}\} - c_4 \geq \min\{(x|z)_w, (y|x)_w\} - c_5$$

pour une constante c_5. Nous venons d'établir que, pour tous w, x, y, z, on a

$$(y|z)_w \geq \min\{(x|z)_w, (y|x)_w\} - c_5.$$

$\square$

On rappelle un théorème de M. Bonk et O. Schramm [BS, Thm 4.1]) :

THÉORÈME B.5. — *Un espace δ-hyperbolique se plonge isométriquement dans un espace δ-hyperbolique géodésique et complet.*

On établit le théorème 2.5 en trois étapes.

B.2.1. On suppose que Y est un espace δ-hyperbolique quasigéodésique. D'après le théorème B.5, il existe un espace δ-hyperbolique géodésique $\widehat{Y}$ et un plongement isométrique $\iota : Y \to \widehat{Y}$. Donc, pour tout segment quasigéodésique $g : [a, b] \to Y$, $\iota(g)$ poursuit une véritable géodésique $\widehat{g} = [\iota(g(a)), \iota(g(b))]$ de $\widehat{Y}$ à distance au plus $H = H(\lambda, c, \delta)$. Autrement dit, pour tout $t \in [a, b]$, il existe une point $\widehat{y_t} \in \widehat{g}$ tel que $d(\iota(g(t)), \widehat{y_t}) \leq H$. Il vient

$$(g(a)|g(b))_{g(t)} \leq (\iota(g(a))|\iota(g(b))_{\widehat{y_t}} + H = H$$

puisque $\iota(g(a))$, $\iota(g(b))$ et $\widehat{y_t}$ appartiennent à un segment géodésique.

Par conséquent, Y est quasiréglé.

B.2.2. Si Y est quasiréglé, alors φ est quasiréglante puisque l'image par φ d'une géodésique est quasigéodésique, donc une quasirègle par définition.

B.2.3. On suppose maintenant que X est hyperbolique et géodésique et que $\varphi : X \to Y$ est une quasi-isométrie sur un espace métrique Y. Par suite, Y est quasigéodésique et l'image de chaque triangle de X est un quasitriangle δ-fin. Si φ est quasiréglante, alors la proposition B.4 s'applique, ce qui montre que Y est hyperbolique.

B.3. Distance non-hyperbolique invariante sur un groupe hyperbolique

Dans [GdlH], les auteurs donnent un exemple d'espace métrique non hyperbolique quasi-isométrique à $\mathbb{R}$. On pourrait se demander si, dans le cas des groupes, une distance qui est quasi-isométrique à une distance des mots et invariante est automatiquement hyperbolique. On montre ici que ce n'est pas le cas.

PROPOSITION B.6. — *Pour tout groupe hyperbolique non fini, il existe une distance invariante à gauche qui est quasi-isométrique à une distance des mots mais qui n'est pas hyperbolique.*

Nous sommes reconnaissants à C. Pittet and I. Mineyev pour nous avoir suggéré comme candidat la distance d de la démonstration suivante.

Démonstration. — Soit Γ un groupe hyperbolique infini et désignons par $|.|$ une distance des mots. On pose

$$d(x, y) = |x - y| + \mathrm{Ln}(1 + |x - y|)\,.$$

On vérifie facilement que d est une distance sur Γ invariante à gauche et que nous avons $|x - y| \leq d(x, y) \leq 2|x - y|$.

Il suffit de montrer que (Γ, d) n'est pas quasiréglé pour montrer que d n'est pas hyperbolique d'après le théorème 2.5.

Soit g une géodésique pour $|.|$ que l'on identifie à $\mathbb{Z}$. Comme (Γ, d) est bi-Lipschitz à $(\Gamma, |\cdot|)$, elle est une $(2, 0)$-quasigéodésique pour d. Mais

$$d(0, n) + d(n, 2n) - d(0, 2n) = \mathrm{Ln}(1 + n)^2/(1 + 2n)$$

se comporte asymptotiquement comme $\mathrm{Ln}\, n$. Par conséquent g n'est pas quasiréglée. $\square$

B.4. Arbres approchants

L'approximation par des arbres de configurations finies jouent un rôle fondamental dans la théorie hyperbolique. On adapte ici les arguments de E. Ghys and P. de la Harpe [GdlH, théorème 2.12] au cadre quasiréglé pour montrer le théorème 2.4. Les deux premiers lemmes peuvent se trouver dans [GdlH], le troisième est la version quasiréglée de [GdlH, lemme 2.14].

On suppose dans la suite que X est δ-hyperbolique.

LEMME B.7. — On définit

→ $(x|y)' = \sup \min\{(x_{i-1}|x_i),\ 2 \leq i \leq L\}$, où le supremum est pris sur les chaînes finies $x_1, \ldots, x_L$ avec $x_1 = x$ et $x_L = y$,

→ $d'(x,y) = d(x,w) + d(y,w) - 2(x|y)'$,

→ $x \sim y$ si $d'(x,y) = 0$.

Par suite, $\sim$ est une relation d'équivalence et d' est une distance sur $X/\sim$ qui rend cet espace 0-hyperbolique. De plus, pour tout $x \in X$, on a $d'(x,w) = d(x,w)$, et, pour tous $x, y \in X$, on a $d'(x,y) \leq d(x,y)$.

LEMME B.8. — Si $\#X \leq 2^k + 2$ alors pour toute chaîne $x_1, \ldots, x_L \in X$, on a

$$(x_1|x_L) \geq \min_{2 \leq j \leq L}\{(x_{j-1}|x_j)\} - k\delta\,.$$

LEMME B.9. — Soit $X = \cup_{i=1}^n X_i$ où les (X_i, w_i) sont des rayons τ-quasiréglés. Si $n \leq 2^k$ alors, pour toute chaîne $x_1, \ldots, x_L \in X$, on a

$$(x_1|x_L) \geq \min_{2 \leq j \leq L}\{(x_{j-1}|x_j)\} - (k+1)\delta - 2c - \tau\,.$$

Démonstration. — D'abord, on a $(x|y)_w \leq \min\{d(x,w), d(y,w)\}$ pour tous $x, y \in X$, et si $x, y \in X_i$ alors $|(x|y)_{w_i} - \min\{d(x,w_i), d(y,w_i)\}| \leq \tau$, et $d(x,w_i) \geq d(x,w) - d(w,w_i) \geq d(x,w) - c$. De même, $d(y,w_i) \geq d(y,w) - c$. Par suite, on a $(x|y)_{w_i} \geq \min\{d(x,w), d(y,w)\} - c - \tau$ et

$$(x|y)_w \geq (x|y)_{w_i} - c \geq \min\{d(x,w), d(y,w)\} - 2c - \tau \geq \min\{(x|x')_w, (y|y')_w\} - 2c - \tau$$

pour tous $x', y' \in X$.

Soit $x_1, \ldots, x_L \in X$ une chaîne. On écrira $X(x_j)$ pour désigner le rayon quasiréglé X_i qui contient x_j. Ou bien, pour tout $j \geq 2$, on a $x_j \notin X(x_1)$, ou bien il existe un indice maximal $j > 1$ tel que $x_j \in X(x_1)$. Donc on a

$$\begin{aligned}(x_1|x_j) &\geq \min\{(x_1|x_2), (x_{j-1}|x_j)\} - 2c - \tau \\ &\geq \min_{2 \leq i \leq j}\{(x_{i-1}|x_i)\} - 2c - \tau\,.\end{aligned}$$

Dans ce cas, on considère $x_1, x_j, x_{j+1}, \ldots, x_L$.

On extrait par récurrence une chaîne (x'_i) de longueur au plus $2n \leq 2^{k+1}$ qui contient x_1 et x_L et telle qu'au plus deux points appartiennent à un même X_i, et dans ce cas, ils sont consécutifs. D'après le lemme B.8 et ci-dessus, on a

$$(x_1|x_L) \geq \min\{(x'_{i-1}|x'_i)\} - (k+1)\delta \geq \min\{(x_{i-1}|x_i)\} - (k+1)\delta - 2c - \tau\,.$$

□

Démonstration du théorème 2.4. — Le théorème sera établi dès que nous aurons trouvé un plongement quasi-isométrique $\phi : X \to T$, où T est un espace 0-hyperbolique.

Le lemme B.7 implique que $X/\sim$ est 0-hyperbolique et que $\phi : X \to X/\sim$ vérifie $d'(\phi(x), \phi(w)) = d(x, w)$ et $d'(\phi(x), \phi(y)) \leq d(x, y)$.

Dans le cas (i), le lemme B.8 montre que $(x|y) \geq (x|y)' - k\delta$ i.e.,

$$d'(\phi(x), \phi(y)) \geq d(x, y) - 2k\delta.$$

Pour le cas (ii), le lemme B.9 montre que $(x|y) \geq (x|y)' - (k+1)\delta - 2c - \tau$ i.e.,

$$d'(\phi(x), \phi(y)) \geq d(x, y) - 2(k+1)\delta - 4c - 2\tau.$$

□

Annexe C. UNICITÉ DE LA MESURE STATIONNAIRE

Le but de cette partie est de montrer la proposition suivante :

Proposition C.1. — *Soit Γ un groupe non-moyennable muni d'une mesure de probabilité engendrant Γ opérant par isométries proprement discontinûment sur un espace hyperbolique propre quasiréglé X. Il existe une unique mesure stationnaire sur ∂X ; elle est non atomique et ergodique.*

Nous reprenons les arguments de H. Furstenberg dans notre situation, voir [Furs].

Lemme C.2. — Soit μ une mesure de probabilité sur Γ et ν une mesure stationnaire sur ∂X. Alors la limite des mesures $((Z_n)_*\nu)_n$ existe pour presque toute trajectoire et si on note ν_ω la limite pour la suite $\omega \in \Omega$, alors $\nu = \int \nu_\omega d\mathbb{P}(\omega)$.

Démonstration. — Soit φ une fonction continue sur ∂X. On note, pour $\omega \in \Omega$ et $n \geq 1$,

$$w_n(\omega, \varphi) = \int \varphi(x) d(\omega_1 \ldots \omega_n)_* \nu(x) = \int \varphi(\omega_1 \ldots \omega_n(x)) d\nu(x)\,.$$

Alors $(w_n)_n$ est une martingale bornée. En effet, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[w_{n+1}|X_1=\omega_1,\dots,X_n=\omega_n] &= \int \varphi(\omega_1\dots\omega_n\gamma(x))d\nu(x)d\mu(\gamma)\\
&= \int [\varphi\circ(\omega_1\dots\omega_n)](\gamma(x))d\nu(x)d\mu(\gamma)\\
&= \int [\varphi\circ(\omega_1\dots\omega_n)](x)d(\mu\star\nu)(x)\\
&= \int [\varphi\circ(\omega_1\dots\omega_n)](x)d\nu(x) = w_n(\omega,\varphi)\,.
\end{aligned}$$

Donc le théorème des martingales implique la convergence de $(w_n(\omega,\varphi))_n$ pour presque tout $\omega\in\Omega$. En appliquant ce raisonnement à une famille dense et dénombrable de fonctions continues sur ∂X, on construit ainsi une mesure pour presque chaque $\omega\in\Omega$.

On remarque que, pour chaque n et toute fonction φ, on a, par stationnarité de ν,

$$\int \varphi(x)d(\omega_1\dots\omega_n)_*\nu(x)d\mathbb{P}(\omega) = \int \varphi(\omega_1\dots\omega_n(x))d\mu^n d\nu(x) = \int \varphi(x)d\nu(x)$$

donc le théorème de convergence dominée nous permet de passer à la limite. □

LEMME C.3. — Soit Γ un sous-groupe discret d'isométries d'un espace hyperbolique X propre et quasiréglé. De toute suite infinie $(\gamma_n)_n$ de Γ, il existe une sous-suite $(n_k)_k$ et deux points $\xi,\zeta\in\partial X$ tels que $(\gamma_{n_k})_k$ tend vers la fonction constante ξ uniformément sur les compacts de $\partial X\setminus\{\zeta\}$.

Démonstration. — Soit $w\in X$. Comme $(\gamma_n)_n$ est infinie et que son action est proprement discontinue, on peut supposer, quitte à extraire une sous-suite, que $(\gamma_n(w))_n$ tend vers un point ξ et $(\gamma_n^{-1}(w))_n$ tend vers un point ζ. Si $x\neq\zeta$, alors $(\gamma_n(x)|\gamma_n(w))_w = (x|w)_{\gamma_n^{-1}(w)}$. Puisque $\gamma_n^{-1}(w)$ ne tend pas vers x, la suite $\{(x|w)_{\gamma_n^{-1}(w)}\}_n$ tend vers l'infini donc $(\gamma_n(x))_n$ tend vers ξ.

Pour obtenir la convergence uniforme sur les compacts, il suffit de l'établir sur des boules disjointes de ζ qui recouvrent $\partial X\setminus\{\zeta\}$: notons c la constante obtenue dans le théorème 2.4 pour $k=4$ de sorte que l'approximation par un arbre de 4 rayons issus de w soit une $(1,c)$-quasi-isométrie. Si $x\in\partial X\setminus\{\zeta\}$, alors on considère $U_x=\{y\in\partial X,\ (x|y)_w\geq(x|\zeta)_w+2c\}$. On considère une $(1,c)$-quasi-isométrie

$$\phi:[w,x[\cup[w,y[\cup[w,\zeta[\cup[w,\gamma_n^{-1}(w)]\to T$$

sur un arbre. Pour n assez grand, on a $(\gamma_n^{-1}(w)|\zeta)_w\geq(x|\zeta)_w+2c$ ce qui donne

$$(\varphi(x)|\varphi(w))_{\varphi(\gamma_n^{-1}(w))} = (\varphi(y)|\varphi(w))_{\varphi(\gamma_n^{-1}(w))}$$

pour $y\in U_x$, donc

$$(\gamma_n(y)|\gamma_n(w))_w\geq(\gamma_n(x)|\gamma_n(w))_w-4c\,.$$

□

Démonstration de la prop. C.1. — On remarque tout d'abord qu'une mesure stationnaire ν sur ∂X charge tout ouvert de l'ensemble limite de Γ car l'action de Γ y est minimale.

L'idée est d'identifier les mesures limites données par le lemme C.2 afin de montrer que ν est complètement déterminée. En effet, comme la marche est transiente, on sait que $(Z_n)_n$ contient une infinité d'éléments distincts de Γ pour presque tout $\omega \in \Omega$. Par la propriété de convergence des groupes hyperboliques (lemme C.3), il existe $\xi, \zeta \in \partial\Gamma$ et une sous-suite $(n_k)_k$ tels que $(Z_{n_k})_k$ converge uniformément sur les compacts de $\partial X \setminus \{\zeta\}$vers ξ. Comme ν est diffuse, cela implique que $(Z_{n_k})_*\nu$ tend vers la masse de Dirac δ_ξ, donc $(Z_n)_*\nu$ aussi. Autrement dit, ces limites ne dépendent que de la suite ω et non de ν. D'où l'unicité de la mesure harmonique.

Si A est un ensemble invariant de mesure $\nu(A) > 0$, alors la restriction $\nu(A \cap \cdot)/\nu(A)$ de ν à A est aussi une mesure stationnaire. Par unicité, on en déduit $\nu(A) = 1$, d'où l'ergodicité.

Comme Γ est non-moyennable, son ensemble limite est infini ; supposons que ν ait un atome, et considérons un point x de masse maximale. Comme ν est stationnaire, on a $\nu(x) = \sum_\gamma \mu(\gamma x)\nu(\gamma^{-1}(x))$ donc tous les points de l'orbite de x portent la même masse que x. Comme ν est une probabilité, l'orbite de x doit être finie, donc $L(\Gamma)$ aussi : contradiction. □

RÉFÉRENCES

[A *et al.*] Juan Alonso *et al.* Notes on word hyperbolic groups. In *Group theory from a geometrical viewpoint (Trieste, 1990)*, pages 3–63. World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1991. Edited by H. Short, accessible sur `http://www.latp.univ-mrs.fr/~hamish/MSRInotes2004.pdf`.

[Anc1] Alano Ancona. Positive harmonic functions and hyperbolicity. In *Potential theory—surveys and problems (Prague, 1987)*, volume 1344 of *Lecture Notes in Math.*, pages 1–23. Springer, Berlin, 1988.

[Anc2] Alano Ancona. Théorie du potentiel sur les graphes et les variétés. In *École d'été de Probabilités de Saint-Flour XVIII—1988*, volume 1427 of *Lecture Notes in Math.*, pages 1–112. Springer, Berlin, 1990.

[Ave] André Avez. Entropie des groupes de type fini. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B* **275**(1972), A1363–A1366.

[AB] Artur Avila and Jairo Bochi. On the subadditive ergodic theorem. Accessible sur `http://www.mat.puc-rio.br/~jairo/docs/kingbirk.pdf`, 2009.

[BL] Werner Ballmann and François Ledrappier. Discretization of positive harmonic functions on Riemannian manifolds and Martin boundary. In *Actes de la Table Ronde de Géométrie Différentielle (Luminy, 1992)*, volume 1 of *Sémin. Congr.*, pages 77–92. Soc. Math. France, Paris, 1996.

[Bjö] Michael Björklund. Central limit theorems for Gromov hyperbolic groups. *J. Theoret. Probab.* **23**(2010), 871–887.

[BB] Sébastien Blachère and Sara Brofferio. Internal diffusion limited aggregation on discrete groups having exponential growth. *Probab. Theory Related Fields* **137**(2007), 323–343.

[BHM1] Sébastien Blachère, Peter Haïssinsky, and Pierre Mathieu. Asymptotic entropy and Green speed for random walks on countable groups. *Ann. Probab.* **36**(2008), 1134–1152.

[BHM2] Sébastien Blachère, Peter Haïssinsky, and Pierre Mathieu. Harmonic measures versus quasiconformal measures for hyperbolic groups. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **44**(2011), 683–721.

[BK] Mario Bonk and Bruce Kleiner. Conformal dimension and Gromov hyperbolic groups with 2-sphere boundary. *Geom. Topol.* **9**(2005), 219–246 (electronic).

[BS] Mario Bonk and Oded Schramm. Embeddings of Gromov hyperbolic spaces. *Geom. Funct. Anal.* **10**(2000), 266–306.

[Coo] Michel Coornaert. Mesures de Patterson-Sullivan sur le bord d'un espace hyperbolique au sens de Gromov. *Pacific J. Math.* **159**(1993), 241–270.

[CDP] Michel Coornaert, Thomas Delzant, et Athanatase Papadopoulos. *Géométrie et théorie des groupes. Les groupes hyperboliques de Gromov.*, volume 1441. Springer-Verlag, Berlin, 1990. Lecture Notes in Mathematics.

[Day] Mahlon Marsh Day. Convolutions, means, and spectra. *Illinois J. Math.* **8**(1964), 100–111.

[dlH] Pierre de la Harpe. Groupes hyperboliques, algèbres d'opérateurs et un théorème de Jolissaint. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **307**(1988), 771–774.

[DKN] Bertrand Deroin, Victor Kleptsyn, and Andrés Navas. On the question of ergodicity for minimal group actions on the circle. *Mosc. Math. J.* **9**(2009), 263–303.

[Der1] Yves Derriennic. Sur le théorème ergodique sous-additif. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B* **281**(1975), Aii, A985–A988.

[Der2] Yves Derriennic. Quelques applications du théorème ergodique sous-additif. In *Conference on Random Walks (Kleebach, 1979) (French)*, volume 74 of *Astérisque*, pages 183–201. Soc. Math. France, Paris, 1980.

[Der3] Yves Derriennic. Entropie, théorèmes limite et marches aléatoires. In *Probability measures on groups, VIII (Oberwolfach, 1985)*, volume 1210 of *Lecture Notes in Math.*, pages 241–284. Springer, Berlin, 1986.

[DG] Yves Derriennic et Yves Guivarc'h. Théorème de renouvellement pour les groupes non moyennables. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B* **277**(1973), A613–A615.

[Dyn] Eugene B. Dynkin. The boundary theory of Markov processes (discrete case). *Uspehi Mat. Nauk* **24**(1969), 3–42.

[Eel] James Eells. Random walk on the fundamental group. In *Differential geometry (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XXVII, Stanford Univ., Stanford, Calif., 1973), Part 2*, pp. 211–217. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1975.

[Furm] Alex Furman. Random walks on groups and random transformations. In *Handbook of dynamical systems, Vol. 1A*, pages 931–1014. North-Holland, Amsterdam, 2002.

[Furs] Harry Furstenberg. Boundary theory and stochastic processes on homogeneous spaces. In *Harmonic analysis on homogeneous spaces (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XXVI, Williams Coll., Williamstown, Mass., 1972)*, pages 193–229. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1973.

[GdlH] Étienne Ghys et Pierre de la Harpe, editeurs. *Sur les groupes hyperboliques d'après Mikhael Gromov*, volume 83 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1990. Papers from the Swiss Seminar on Hyperbolic Groups held in Bern, 1988.

[Gui] Yves Guivarc'h. Sur la loi des grands nombres et le rayon spectral d'une marche aléatoire. In *Conference on Random Walks (Kleebach, 1979) (French)*, volume 74 of *Astérisque*, pages 47–98, 3. Soc. Math. France, Paris, 1980.

[GLJ1] Yves Guivarc'h et Yves Le Jan. Sur l'enroulement du flot géodésique. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **311**(1990), 645–648.

[GLJ2] Yves Guivarc'h and Yves Le Jan. Asymptotic winding of the geodesic flow on modular surfaces and continued fractions. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **26**(1993), 23–50.

[GR] Yves Guivarc'h and C. Robinson Edward Raja. Recurrence and ergodicity of random walks on linear groups and on homogeneous spaces. *Ergodic Theory Dynam. Systems* **32**(2012), no. 4, 1313–1349.

[HM] Peter Haïssinsky et Pierre Mathieu. La conjecture de Baum-Connes pour les groupes hyperboliques par les marches aléatoires. Accessible sur `http://www.math.univ-toulouse.fr/~phaissin/baumconnesgreen.pdf`, 2011.

[Hei] Juha Heinonen. *Lectures on analysis on metric spaces*. Universitext. Springer-Verlag, New York, 2001.

[Kai1] Vadim A. Kaimanovich. Ergodicity of harmonic invariant measures for the geodesic flow on hyperbolic spaces. *J. Reine Angew. Math.* **455**(1994), 57–103.

[Kai2] Vadim A. Kaimanovich. The Poisson formula for groups with hyperbolic properties. *Ann. of Math. (2)* **152**(2000), 659–692.

[KV] Vadim A. Kaimanovich and Anatoly M. Vershik. Random walks on discrete groups : boundary and entropy. *Ann. Probab.* **11**(1983), 457–490.

[Kes] Harry Kesten. Full Banach mean values on countable groups. *Math. Scand.* **7**(1959), 146–156.

[Kin] John F.C. Kingman. The ergodic theory of subadditive stochastic processes. *J. Roy. Statist. Soc. Ser. B* **30**(1968), 499–510.

[Laf] Vincent Lafforgue. K-théorie bivariante pour les algèbres de Banach et conjecture de Baum-Connes. *Invent. Math.* **149**(2002), 1–95.

[LP1] Vincent Le Prince. Dimensional properties of the harmonic measure for a random walk on a hyperbolic group. *Trans. Amer. Math. Soc.* **359**(2007), 2881–2898 (electronic).

[LP2] Vincent Le Prince. A relation between dimension of the harmonic measure, entropy and drift for a random walk on a hyperbolic space. *Electron. Commun. Probab.* **13**(2008), 45–53.

[Led1] François Ledrappier. Some asymptotic properties of random walks on free groups. In *Topics in probability and Lie groups : boundary theory*, volume 28 of *CRM Proc. Lecture Notes*, pages 117–152. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2001.

[Led2] François Ledrappier. Entropie et principe variationnel pour le flot géodésique en courbure négative pincée. In *Géométrie ergodique*, F. Dal'bo ed., monographie de l'Enseignement Mathétmatique **43**, 2013.

[LS] Terry Lyons and Dennis Sullivan. Function theory, random paths and covering spaces. *J. Differential Geom.* **19**(1984), 299–323.

[Mat] Pertti Mattila. *Geometry of sets and measures in Euclidean spaces*, volume 44 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1995. Fractals and rectifiability.

[MY] Igor Mineyev and Guoliang Yu. The Baum-Connes conjecture for hyperbolic groups. *Invent. Math.* **149**(2002), 97–122.

[Naï] Linda Naïm. Sur le rôle de la frontière de R. S. Martin dans la théorie du potentiel. *Ann. Inst. Fourier, Grenoble* **7**(1957), 183–281.

[Par] Kalyanapuram R. Parthasarathy. *Probability measures on metric spaces*. AMS Chelsea Publishing, Providence, RI, 2005. Reprint of the 1967 original.

[Pei] Marc Peigné. Autour de l'exposant critique d'un groupe kleinien. In *Géométrie ergodique*, F. Dal'bo ed., monographie de l'Enseignement Mathétmatique **43**, 2013.

[Sul] Dennis Sullivan. The density at infinity of a discrete group of hyperbolic motions. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* **50**(1979), 171–202.

[Ver] Anatoly M. Vershik. Dynamic theory of growth in groups : entropy, boundaries, examples. *Uspekhi Mat. Nauk* **55**(2000), 59–128.

[Woe] Wolfgang Woess. *Random walks on infinite graphs and groups*, volume 138 of *Cambridge Tracts in Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2000.

Peter Haïssinsky

Université Paul Sabatier
Institut de Mathématiques de Toulouse
118 route de Narbonne
31062 Toulouse Cedex 9, France
Courriel : phaissin@math.univ-toulouse.fr