THESE H.D.R. / Université de Bretagne-Sud
sous le sceau de l'Université européenne de Bretagne
pour obtenir l'
HABILITATION À DIRIGER DES RECHERCHES
Mention : Mathématiques et interactions des mathématiques
Ecole doctorale SICMA

présentée par
Frédéric Mathéus
Laboratoire de Mathématiques et Applications des Mathématiques

PROBABILITÉS ET GÉOMÉTRIE DANS CERTAINS GROUPES DE TYPE FINI

Thèse soutenue le 25 novembre 2011
devant le jury composé de :

Yves Guivarc'h
Professeur, Université Rennes 1 / *président*

Vadim Kaimanovich
Directeur de recherches, Université d'Ottawa (Canada) / *rapporteur*
François Ledrappier
Directeur de recherches, University of Notre Dame (Indiana, U.S.A.) / *rapporteur*
Wolfgang Woess
Professeur, Technische Universitat Graz (Autriche) */ rapporteur*

Bachir Bekka
Professeur, Université Rennes 1 / *examinateur*
Yves Derriennic
Professeur, Université de Bretagne Occidentale / *examinateur*
Emile Le Page
Professeur, Université de Bretagne-Sud / *examinateur*
Marc Peigné
Professeur, Université de Tours */ examinateur*

PROBABILITÉS ET GÉOMÉTRIE DANS CERTAINS GROUPES DE TYPE FINI

FRÉDÉRIC MATHÉUS

Résumé. Dans de nombreux phénomènes régis par le hasard, le résultat de l'observation provient de la combinaison aléatoire d'événements indépendants et réversibles. Un modèle possible pour ces phénomènes consiste à considérer un groupe G, fini ou dénombrable, que l'on munit d'une mesure de probabilité μ. On effectue des tirages successifs d'éléments dans G avec les hypothèses suivantes : les tirages sont indépendants, et, pour chaque tirage, $\mu(g)$ est la probabilité de tirer l'élément g. Si $g_1, g_2, \ldots, g_n$ est le résultat de n tirages, on forme le produit $g_1 \cdot g_2 \cdot \cdots \cdot g_n$. C'est, par définition, la position à l'instant n de la marche aléatoire sur G de loi μ, et la question est : que peut-on dire du comportement asymptotique de $g_1 \cdot g_2 \cdot \cdots \cdot g_n$ lorsque $n \to \infty$? La marche aléatoire s'en va-t'elle à l'infini ? Si oui, dans quelle direction ? Et à quelle vitesse ?

Mes travaux depuis 2003 sont consacrés, pour l'essentiel, à l'étude du comportement asymptotique des marches aléatoires dans trois familles de groupes infinis, non abéliens et de type fini : les produits libres de groupes finis, les groupes d'Artin diédraux, ainsi que certaines extensions des groupes libres. Ils sont le fruit de collaborations avec Jean Mairesse (CNRS, Paris VI) et François Gautero (Université de Nice).

Dans le cas des produits libres de groupes finis, nous décrivons précisément la mesure harmonique pour les marches aléatoires au plus proche voisin dans ces groupes, ce qui permet de calculer la vitesse et l'entropie asymptotique. En particulier, ces quantités dépendent de façon analytique des coefficients de μ. Considérant l'inégalité fondamentale de Yves Guivarc'h entre vitesse, entropie et croissance, nous montrons que les générateurs canoniques des produits libres de groupes finis sont extrémaux au sens de Vershik.

Les groupes d'Artin diédraux forment une classe de groupes d'Artin qui généralise le groupe de tresses à trois brins B_3 et pour laquelle nous donnons une description précise des géodésiques. La connaissance de la vitesse de fuite des marches aléatoires au plus proche voisin dans le groupe B_3 est un premier outil de mesure de la complexité asymptotique d'une tresse aléatoire. Dans ce cas, on montre que la vitesse dépend de façon lipschitzienne mais non différentiable de μ, faisant apparaître certaines transitions de phase.

Enfin, en ce qui concerne les extensions du groupe libre, nous montrons que, dans certains cas (comprenant notamment les extensions cycliques) les fonctions μ-harmoniques bornées sont entièrement décrites via le bord du groupe libre sous-jacent. La preuve repose sur l'existence d'actions non triviales de ces groupes sur des arbres réels, couplée à des critères généraux sur les compactifications des groupes développés par Vadim Kaimanovich.

Plus qu'une page qui se tourne, une HDR est un rapport d'étape dans la vie d'un chercheur. En ce qui me concerne, plusieurs personnes ont joué un rôle-clé.

Yves Guivarc'h a grandement contribué à ma venue à l'U.B.S. Lors de nos nombreux échanges entre Vannes et Rennes, sa gentillesse et sa disponibilité proverbiales ne m'ont jamais fait défaut. Toujours admiratif devant son dynamisme mathématique, je suis honoré qu'il ait accepté de présider ce jury.

Les travaux de Vadim Kaimanovich, François Ledrappier et Wolfgang Woess sont pour moi une source constante d'inspiration et de motivation. Je leur exprime ma gratitude pour avoir accepté de rendre compte de mon travail. Je considère leurs rapports comme un encouragement à continuer dans cette voie.

Je remercie Bachir Bekka et Yves Derriennic de leur soutien par leur présence dans ce jury, ainsi qu'Émile Le Page et Marc Peigné, dont j'apprécie l'intérêt pour mes travaux.

En juin 2000, lors d'un Atelier mathématique organisé sur l'île de Berder, Philippe Bougerol conclut son exposé ainsi : "à propos des marches aléatoires dans les groupes de tresses, tout reste à faire". J'ai aussitôt saisi la balle au bond. Qu'il soit remercié pour son flair !

Il va sans dire que cette HDR doit beaucoup à Jean Mairesse. J'ai eu la chance de le rencontrer en 2003 alors que ma recherche personnelle stagnait. Il a eu immédiatement l'intuition des outils probabilistes à utiliser. Sa puissance de travail et son efficacité continuent de m'impressionner. C'est le genre de rencontre, revigorante et stimulante, que je souhaite à tout chercheur.

Je n'aurai pas non plus été capable, sans François Gautero, de comprendre les marches au hasard dans ces extensions du groupe libre. Sa connaissance approfondie de ce sujet, qui reste très ardu à mes yeux, nous a permis de mener ce travail à bien. Je suis heureux de le remercier ici.

À l'automne 2010, Serge Cantat, François Maucourant et Sébastien Gouëzel ont eu l'heureuse idée de démarrer un groupe de travail à Rennes sur les marches aléatoires dans les groupes. J'ai eu la chance d'en profiter pleinement ; d'ailleurs, la première partie de ce mémoire en est le fruit.

Cela fait plus de vingt ans que François Laudenbach suit mon parcours avec bienveillance. Ses conseils pertinents m'ont toujours été précieux. Auditeur exigeant de mon cours à Nantes au printemps 2011, il a su jouer, le moment venu, le rôle d'aiguillon qu'il fallait. Je lui exprime toute ma reconnaissance.

J'entends encore mon père m'interpeller, de sa voie rocailleuse : "alors, bonhomme, tu la passes quand, ton habilitation ?" J'ai manifestement trop tardé... J'ai aujourd'hui une pensée pour lui qui nous a quitté il y a bientôt quatre ans.

Sans elle, sans eux, je ne serais rien. Je dédie ce mémoire à ma femme Frédérique, et à nos trois enfants Agathe, Capucine et César, qui font notre bonheur et sont notre fierté.

Table des matières

Introduction

L'objet de ce mémoire est de présenter mes travaux de recherche menés depuis 2003. Ils sont consacrés, pour l'essentiel, à la description du comportement asymptotique des marches au hasard dans certains groupes de type fini. Les résultats obtenus sont le fruit de collaborations avec Jean Mairesse et François Gautero et font l'objet des publications [45, 47, 46, 48, 22], toutes accessibles sur ma page web http ://web.univ-ubs.fr/lmam/matheus/. Mes premiers travaux, réalisés pendant ma thèse de doctorat et peu après celle-ci, se rattachent à la géométrie discrète et plus précisement aux empilements de cercles. Objets des publications [11, 52, 51, 50], parues entre 1996 et 1999, j'ai choisi de ne pas les présenter ici, en raison à la fois de leur ancienneté et de leur manque de représentativité de ma thématique actuelle.

Décrivons plus en détail la structure de ce texte. La première partie est une introduction à la théorie des marches aléatoires dans les groupes dénombrables. Elle se veut accessible à un public mathématicien non spécialiste du sujet. Y sont présentées notamment les notions de mesures stationnaires, de μ-frontières, de bord de Poisson, ainsi qu'une propriété des compactifications de groupes - vérifiée par le bord géométrique des groupes hyperboliques de Gromov - permettant de démontrer la convergence des trajectoires des marches aléatoires. Cette partie, qui ne contient aucun résultat nouveau, constitue le socle sur lequel reposent mes travaux.

L'étude des marches aléatoires dans les produits libres de groupes finis fait l'objet de la seconde partie. Je décris précisément la mesure harmonique pour les marches aléatoires au plus proche voisin dans ces groupes, ce qui permet de calculer la vitesse et l'entropie asymptotique. Je présente l'inégalité entre entropie, vitesse et croissance, et teste le cas d'égalité dans le cas des produits libres de groupes finis [47].

La troisième partie est consacrée aux groupes d'Artin diédraux. C'est une classe de groupes d'Artin qui généralise le groupe de tresses à trois brins B_3 et pour laquelle je donne une description précise des géodésiques. Cette description repose sur un *algorithme glouton* qui permet de calculer la longueur des éléments de ces groupes à partir d'une forme normale, la forme normale de Garside, ainsi que diverses séries de croissance [46]. La structure de la forme de Garside sert également de point de départ pour calculer la vitesse de la marche au hasard dans ces groupes [48].

Dans la quatrième partie, je présente les résultats obtenus avec François Gautero sur le bord de Poisson de certaines extensions du groupe libre. Le cas des extensions finies étant connu, nous étudions les extensions cycliques du groupe libre. Le résultat dépend de la dynamique de l'automorphisme définissant l'extension et utilise fortement l'existence d'actions non triviales de ces groupes sur des arbres réels [22]. Nous décrivons également le bord de Poisson de certaines extensions du groupe libre, ainsi que les extensions cycliques de certains groupes hyperboliques sans torsion.

1. Généralités sur les marches aléatoires dans les groupes dénombrables

Si les produits non commutatifs de matrices aléatoires apparaissent dès 1954 dans un article de R.Bellman [6], on peut considérer que le véritable acte de naissance de la théorie des marches aléatoires dans les groupes non commutatifs est l'article de H.Kesten "Symmetric random walks on groups" [37]. Cette théorie connaît dans les années 60 un prodigieux essor, sous l'impulsion entre autres de H.Kesten et H.Furstenberg. L'article [37] et la note de Dynkin et Malyutov [14] jettent les bases de l'étude des marches aléatoires dans les groupes libres. Les articles de Furstenberg [17, 19, 20] et Kesten [16, 36] contiennent les fondements de la théorie des marches au hasard dans les groupes de matrices et les groupes de Lie. Les notions introduites dans ces travaux ainsi que les idées qui y sont développées n'ont pas cessé d'irriguer les recherches dans ce domaine depuis quarante ans.

L'objet de cette partie est de présenter de façon aussi simple que possible quelques concepts associés à la donnée d'une mesure de probabilité μ sur un groupe dénombrable G. Après avoir défini les marches aléatoires et les fonctions harmoniques (section 1.1), je fais agir G sur un espace mesuré B, ce qui fournit aussitôt les notions de mesure stationnaire et de μ-frontière *via* la formule de Poisson (sections 1.2 à 1.4). Cet exposé est motivé par une question : quelle condition simple peut-on imposer à une compactification $G \cup B$ d'un groupe de type fini G pour que les trajectoires de la marche aléatoire dans G de loi μ convergent dans B ? Parmi les diverses hypothèses de contraction introduites dans les années 70 et 80, je privilégie la notion de contractivité dégagée par W.Woess [63] pour traiter - entre autres - le cas des groupes d'automorphismes de graphes hyperboliques. Cette notion peut être légèrement simplifiée pour traiter juste le cas des groupes hyperboliques. Ceci motive l'introduction d'une classe de compactifications de groupes de type fini - incluant les bords géométriques des groupes hyperboliques - pour laquelle la résolution du problème de Dirichlet et la convergence des marches aléatoires sont obtenues de façon simple (section 1.5). Enfin, la dernière section est consacrée au bord de Poisson.

1.1. **Fonctions harmoniques et marches aléatoires.** Soit G un groupe dénombrable, et μ une mesure de probabilité sur G, c'est-à-dire simplement une fonction $\mu : G \to [0,1]$ vérifiant $\sum_{g\in G} \mu(g) = 1$. Il y a deux concepts naturellement associés à une telle donnée.

Le premier est celui de fonction μ-harmonique. Soit $f : G \to \mathbb{R}$ une fonction telle que, pour tout $g \in G$ on ait $\sum_{h\in G} \mu(h)|f(gh)| < +\infty$. La fonction f est dite μ-harmonique si

$$\forall g \in G, f(g) \ = \ \sum_{h\in G} \mu(h) f(gh) \ .$$

Par exemple, si $G = \mathbb{Z}^d$ et si μ est la mesure uniforme sur les d vecteurs de la base canonique de $\mathbb{Z}^d$ et leurs opposés, alors toute forme linéaire $f(g) = u_1 g_1 + \cdots + u_d g_d$ est μ-harmonique.

On note $H^\infty(G,\mu)$ l'espace de Banach des fonctions μ-harmoniques bornées sur G, muni de la norm sup.

L'autre concept est celui de marche aléatoire. La marche aléatoire (droite) sur G de loi μ est la chaîne de Markov sur G dont les probabilités de transitions sont données par $p(x,y) = \mu(x^{-1}y)$. Le modèle canonique de cette marche aléatoire partant de l'identité est le suivant : $\Omega = G^{\mathbb{N}^*}$, $\mathcal{F}$ est la tribu cylindrique sur Ω, et $\mathbf{P} = \mu^{\otimes \mathbb{N}^*}$. Les applications coordonnées $(\Omega, \mathcal{F}) \to G$, $\omega \mapsto \omega_n$ sont des variables aléatoires $\mathbf{P}$-indépendantes de loi μ. On pose, pour $\omega \in \Omega$, $X_0(\omega) = e$ et, pour $n \geq 1$, $X_n(\omega) = \omega_1 \cdots \omega_n$. La loi de X_n est l'image de la mesure $\mu^{\otimes n}$ par le produit $G^n \to G$ et est notée μ^{*n}. L'intérêt de ce modèle réside dans l'existence du shift $\theta : \Omega \to \Omega$, $(\omega_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (\omega_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ qui préserve la mesure $\mathbf{P}$.

Le lien entre ces deux notions se fait via la théorie des martingales : si f est une fonction μ-harmonique alors la suite $(f(X_n))_n$ est une martingale pour la filtration canonique $(\mathcal{F}_n)_n$ associée au processus $(X_n)_n$. En effet, on a :

$$\mathbb{E}[f(X_{n+1})|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[f(X_n \cdot h_{n+1})|\mathcal{F}_n] = \sum_{h\in G} \mu(h) f(X_n h) = f(X_n) \qquad \mathbf{P}-\text{p.s.} \tag{1}$$

1.2. **Mesures stationnaires.** Pour tenter de comprendre les fonctions harmoniques et les marches aléatoires sur le groupe G, on fait agir ce dernier sur un espace mesuré $(B, \mathcal{A})$ de façon mesurable. On dit alors que B est un G-espace. Une telle action fournit aussitôt une action de G sur l'espace $\mathcal{P}(B)$ des mesures de probabilité sur $(B, \mathcal{A})$, définie, pour $g \in G$, $\lambda \in \mathcal{P}(B)$ et $A \in \mathcal{A}$, par $(g\lambda)(A) = \lambda(g^{-1}A)$.

Le produit de convolution $\mu*\lambda$ des mesures de probabilité μ et λ est l'image de la mesure produit $\mu \otimes \lambda$ sur $G \times B$ par l'action $G \times B \to B, (g, x) \mapsto gx$. Par définition, pour toute fonction mesurable bornée φ définie sur B, on a

$$\int_B \varphi \,\mathrm{d}(\mu * \lambda) \;=\; \sum_{g\in G} \mu(g) \int_B \varphi(gx)\mathrm{d}\lambda(x) \;=\; \sum_{g\in G} \mu(g) \int_B \varphi \,\mathrm{d}(g\lambda)$$

ce qui conduit à écrire $\mu * \lambda \;=\; \sum_{g\in G} \mu(g) g\lambda$.

Définition 1.1. *La mesure de probabilité λ est μ-stationnaire si elle vérifie la relation $\lambda = \mu * \lambda$.*

Cette notion est au coeur du présent travail. Elle signifie que la mesure λ est G-invariante en moyenne suivant μ :

$$\forall A \in \mathcal{A},\; \lambda(A) \;=\; \sum_{g\in G} \mu(g)\lambda(g^{-1}A) \quad .$$

Exemple 1.2. G est le groupe libre de rang d sur $\{a_1, \ldots, a_d\}$, noté $\mathbb{F}(a_1, \ldots, a_d)$. Soit $S = \{a_1, \ldots, a_d, a_1^{-1}, \ldots, a_d^{-1}\}$. Tout élément $g \in G$ admet une unique écriture $g = u_1 \cdots u_n$ qui est un mot réduit sur l'alphabet S, c'est-à-dire un mot tel que $u_{k+1} \neq u_k^{-1}$ pour $1 \leq k \leq n-1$, l'élément neutre e de G étant représenté par le mot vide. Le mot réduit représentant le produit de g et h est la concaténation des mots réduits représentant g et h avec d'éventuelles simplifications au point de contact.

Soit $g = u_1 \cdots u_n$ un élément de G écrit sous forme réduite. L'entier n est la longueur de g par rapport au système générateur S, et est noté $|g|$. Le bord géométrique de G est l'ensemble $\partial G = \{\xi = \xi_0\xi_1 \cdots \in S^{\mathbb{N}} \mid \xi_{i+1} \neq \xi_i^{-1}\}$ des mots infinis à droite réduits sur l'alphabet S. Pour $g, h \in G$, on note $g \wedge h$ le plus grand préfixe commun aux mots réduits représentants g et h, puis on étend cette définition à $g, h \in G \cup \partial G$. On définit alors une métrique sur $G \cup \partial G$ en posant $d(g, h) = \exp(-|g \wedge h|)$ si $g \neq h$ et $d(g, g) = 0$. L'espace $(G \cup \partial G, d)$ est un espace métrique compact dans lequel G est un ouvert dense. L'action de G sur lui-même par translation à gauche se prolonge en une action sur ∂G par homéomorphismes bilipschitziens. Si $u_1 \cdots u_n$ est un mot réduit sur S, on note $[u_1 \cdots u_n]$ le cylindre dans ∂G de base $u_1 \cdots u_n$. La tribu borélienne sur $(\partial G, d)$ est exactement la tribu engendrée par les cylindres.

Supposons d'abord que μ soit la mesure uniforme sur S, définie, pour $1 \leq i \leq d$, par $\mu(a_i) = \mu(a_i^{-1}) = 1/2d$. On constate aisément que la mesure m sur ∂G définie, pour tout cylindre $[u_1 \cdots u_n]$, par $m([u_1 \cdots u_n]) \;=\; \frac{1}{2d(2d-1)^{n-1}}$ est μ-stationnaire.

Supposons maintenant que la mesure μ soit définie par $\mu(a_1) = p$ et $\mu(a_1^{-1}) = 1 - p$. Notons $\alpha = a_1a_1a_1 \ldots$ et $\overline{\alpha} = a_1^{-1}a_1^{-1}a_1^{-1} \cdots \in \partial G$. Alors le segment $\{\lambda_t = (1-t)\delta_\alpha + t\delta_{\overline{\alpha}},\ t \in [0, 1]\}$ est constitué de mesures toutes μ-stationnaires.

L'existence de mesures stationnaires est un fait général :

Lemme 1.3. *Si B est un G-espace métrique compact, alors, pour toute probabilité μ sur G, il existe une mesure de probabilité μ-stationnaire sur B.*

Démonstration. L'espace $\mathcal{P}(B)$ des mesures de probabilité boréliennes sur B est compact pour la topologie faible. Soit $x \in B$. Toute valeur d'adhérence de la suite $(\lambda_n)_n$ définie par

$$\lambda_n \;=\; \frac{1}{n+1}(\,\delta_x + \mu * \delta_x + \cdots + \mu^{*n} * \delta_x\,)$$

est une mesure μ-stationnaire sur B. □

Notons $\mathrm{supp}(\mu) = \{g \in G, \mu(g) > 0\}$ le support de μ et $\mathrm{sgr}(\mu)$ le semi-groupe qu'il engendre :

$$\mathrm{sgr}(\mu) \;=\; \{g \in G \mid \exists\, g_1, \ldots, g_n \;\in \mathrm{supp}(\mu), g = g_1 \ldots g_n\}$$

Lemme 1.4. *Soit B un G-espace et μ une mesure de probabilité sur G telle que $sgr(\mu)$ ne fixe aucun sous-ensemble fini de B. Alors toute mesure de probabilité μ-stationnaire sur B est diffuse.*

Démonstration. Soit λ une probabilité μ-stationnaire sur B. Si λ n'est pas diffuse, alors elle possède un atome x de poids maximal. On a $\lambda(x) \;=\; \sum_{g\in G} \mu(g)\lambda(g^{-1}x)$, de sorte que $g^{-1}x$ est également un atome de poids maximal pour tout $g \in \mathrm{supp}(\mu)$, donc pour tout $g \in \mathrm{sgr}(\mu)$. L'ensemble - fini - des atomes de poids maximal de λ est donc invariant par $\mathrm{sgr}(\mu)$, contradiction. □

Définition 1.5. *La mesure de probabilité μ sur le groupe dénombrable G est dite non dégénérée si le support de μ engendre G comme semi-groupe (i.e. $sgr(\mu) = G$).*

Lemme 1.6. *Soit μ une mesure de probabilité non dégénérée sur un groupe dénombrable G. Soit B un G-espace topologique à base dénombrable muni d'une mesure de probabilité μ-stationnaire λ. Si l'action de G sur B est minimale (i.e. toutes les orbites sont denses) alors le support de λ est B tout entier.*

Démonstration. Le support de λ est le complémentaire du plus grand ouvert λ-négligeable de B. Si $x \notin \mathrm{supp}(\lambda)$ alors il existe un ouvert $U \subset B$ contenant x tel que $\lambda(U) = 0$. Comme $\lambda(U) = \sum_g \mu(g)\lambda(g^{-1}U)$ on en déduit que $\lambda(g^{-1}U) = 0$ pour tout $g \in \mathrm{supp}(\mu)$, de sorte que $g^{-1}U \subset \mathrm{supp}(\lambda)^c$ pour tout $g \in \mathrm{sgr}(\mu)$. Comme μ est non dégénérée, ceci prouve que le support de λ est un fermé G-invariant de B, et donc $\mathrm{supp}(\lambda) = B$ par minimalité. □

Exemple 1.7. Illustrons ces deux derniers lemmes avec le groupe libre $G = \mathbb{F}(a_1, \ldots, a_d)$. Dans le cas où μ est la mesure uniforme sur $S = \{a_1, \ldots, a_d, a_1^{-1}, \ldots, a_d^{-1}\}$, on a $\mathrm{supp}(\mu) = S$ de sorte que μ est non dégénérée. L'action de G sur ∂G est minimale. La mesure μ-stationnaire m décrite dans l'exemple 1.2 est diffuse et son support est ∂G.

Si $\mu = p\delta_{a_1} + (1-p)\delta_{a_1^{-1}}$ alors $\mathrm{supp}(\mu) = \{a_1, a_1^{-1}\}$ de sorte que $\mathrm{sgr}(\mu)$ fixe les points α et $\overline{\alpha}$. Les mesures μ-stationnaires $\lambda_t = (1-t)\delta_\alpha + t\delta_{\overline{\alpha}}$ ne sont pas diffuses, et $\mathrm{supp}(\lambda_t) \subset \{\alpha, \overline{\alpha}\}$.

Voici enfin un exemple de mesure stationnaire diffuse non supportée par ∂G tout entier. À tout vecteur de probabilité $p = (p_1, \ldots, p_d) \in]0,1[^d$ on associe la mesure μ_p sur G définie, pour $1 \le i \le d$, par $\mu_p(a_i) = p_i$. Le semi-groupe $\mathrm{sgr}(\mu_p)$ est le monoïde libre sur $S^+ = \{a_1, \ldots, a_d\}$. Il ne fixe aucun sous-ensemble fini de ∂G. Pour $u \in S$, on pose $q_u = p_i$ si $u = a_i$ et $q_u = 0$ si $u \in \{a_1^{-1}, \ldots, a_d^{-1}\}$. La mesure λ_p définie sur ∂G par $\lambda_p([u_1 \cdots u_n]) \;=\; q_{u_1} \cdots q_{u_n}$ est μ_p-stationnaire. Elle est diffuse, et son support est $\mathrm{supp}(\lambda_p) = (S^+)^{\mathbb{N}}$.

1.3. **La formule de Poisson.** Revenons à la question initiale des fonctions μ-harmoniques et des marches aléatoires sur G. Soit B un G-espace muni d'une probabilité μ-stationnaire λ. À toute fonction $F \in L^\infty(B,\lambda)$ on peut associer une fonction $\Pi_B F = f$ sur G définie, pour $g \in G$, par la *formule de Poisson* $f(g) = \langle F, g\lambda\rangle = \int_B F(gx)\mathrm{d}\lambda(x)$. Cette fonction f, bornée, est μ-harmonique car λ est μ-stationnaire. En effet, pour tout $g \in G$, on a :

$$\sum_{h\in G}\mu(h)f(gh) \;=\; \sum_{h\in G}\mu(h)\int_B F(ghx)\mathrm{d}\lambda(x) \;=\; \int_B F(gx)\mathrm{d}(\mu*\lambda)(x) \;=\; \int_B F(gx)\mathrm{d}\lambda(x) \;=\; f(g)\,.$$

L'application $\Pi_B : L^\infty(B,\lambda) \to H^\infty(G,\mu)$ n'est pas toujours injective. Le cas de la mesure $\mu = p\delta_{a_1} + (1-p)\delta_{a_1^{-1}}$ sur le groupe libre $G = \mathbb{F}(a_1,\ldots,a_d)$ avec $(B,\lambda) = (\partial G, \lambda_t)$ fournit un contre-exemple lorsque $0 < t < 1$ puisqu'alors la fonction $t\,\mathbb{I}_{\{\alpha\}} - (1-t)\,\mathbb{I}_{\{\overline{\alpha}\}}$ est un élément non trivial du noyau de Π_B.

En ce qui concerne les marches aléatoires, Furstenberg a observé [19] que l'existence d'une mesure μ-stationnaire sur un G-espace compact B permet de construire une compactification de G dans laquelle presque toutes les trajectoires de la marche aléatoire $(X_n)_n$ associée à μ convergent. Plus précisément :

Proposition 1.8. *Soit B un G-espace métrique compact muni d'une mesure de probabilité μ-stationnaire λ. Alors :*

(1) *pour $\mathbf{P}$-presque tout $\omega \in \Omega$, il existe une mesure $\nu_\omega \in \mathcal{P}(B)$ telle que la suite $X_n\lambda$ converge faiblement vers ν_ω*

(2) *on a : $\int_\Omega \nu_\omega d\mathbf{P}(\omega) \;=\; \lambda$.*

Démonstration. Soit $F \in C(B)$ une fonction continue sur B. Il s'agit de montrer que la suite $\int_B F\mathrm{d}(X_n\lambda)$ converge presque sûrement. Or on a

$$\int_B F\mathrm{d}(X_n\lambda) \;=\; \int_B F(X_n x)\mathrm{d}\lambda(x) \;=\; \Pi_B F(X_n)$$

La fonction $\Pi_B F$ étant μ-harmonique, la suite $\Pi_B F(X_n)$ est une martingale d'après (1), bornée car F l'est, donc est presque sûrement convergente.

En utilisant la séparabilité de $C(B)$, on construit un ensemble Ω' de $\mathbf{P}$-mesure 1, tel que pour tout $\omega \in \Omega'$, pour tout $F \in C(B)$, la suite $\Pi_B F(X_n(\omega))$ converge. À ω fixé, la limite dépend continûment et linéairement de F donc s'écrit $\nu_\omega(F)$ pour une certaine mesure $\nu_\omega \in \mathcal{P}(B)$, ce qui prouve (1).

Prouvons (2). Pour toute fonction $F \in C(B)$, on a :

$$\int_\Omega \nu_\omega(F)\mathrm{d}\mathbf{P}(\omega) \;=\; \lim_n \int_\Omega \Pi_B F(X_n)\mathrm{d}\mathbf{P} \;=\; \lim_n \int_\Omega\int_B F\mathrm{d}(X_n\lambda)\mathrm{d}\mathbf{P} \;=\; \int_B F\mathrm{d}(\mu^{*n}*\lambda) \;=\; \int_B F\mathrm{d}\lambda\,.$$

□

Ainsi, si l'on note $p_\lambda : G \to \mathcal{P}(B)$ l'application définie par $p_\lambda(g) = g\lambda$, alors $\overline{p_\lambda(G)}$ est une compactification de G dans laquelle presque toutes les trajectoires de la marche aléatoire $(X_n)_n$ convergent. Bien entendu, cette compactification peut-être triviale, notamment lorsque $(X_n)_n$ est récurrente.

Exemple 1.9. Considérons la mesure $\mu = (\delta_{a_1} + \delta_{a_1^{-1}})/2$ sur le groupe libre $G = \mathbb{F}(a_1,\ldots,a_d)$. La marche aléatoire X_n est récurrente dans $sgr(\mu) = \langle a_1\rangle$. Soit $(B,\lambda) = (\partial G, \delta_\alpha)$. L'application p_λ, ici donnée par $p_\lambda(g) = g\delta_\alpha = \delta_{g\alpha}$, est constante sur les classes à gauche modulo $\langle a_1\rangle$. En particulier, $p_\lambda(X_n) = \delta_\alpha$.

1.4. **μ-Frontières.** Au vu de la proposition 1.8, il est naturel de considérer le cas ou la suite $X_n\lambda$ converge vers une mesure de Dirac δ_Z où $Z = Z(\omega)$ est aléatoire, auquel cas Z suit nécessairement la loi λ. Ceci conduit à la notion de μ-frontière introduite par Furstenberg [19] :

Définition 1.10. *Soit μ une mesure de probabilité sur un groupe dénombrable G et B un G-espace métrique compact muni d'une probabilité μ-stationnaire λ. On dit que (B, λ) est une μ-frontière de (G, μ) s'il existe une variable aléatoire $Z : \Omega \to B$ de loi λ telle que la suite de mesures $X_n\lambda$ converge faiblement vers la mesure de Dirac aléatoire δ_Z.*

Autrement dit, si (B, λ) est une μ-frontière de (G, μ) alors pour toute fonction $F \in C(B)$, on a

$$\int_B F(X_n x)\mathrm{d}\lambda(x) \;\to\; F(Z)\,.$$

Exemple 1.11. Considérons la mesure $\mu = p\delta_{a_1} + (1-p)\delta_{a_1^{-1}}$ sur le groupe libre $G = \mathbb{F}(a_1, \dots, a_d)$ avec $p > 1/2$, de sorte que X_n converge vers $\alpha = a_1 a_1 \dots$ presque sûrement. Soit $\lambda_t = (1-t)\delta_\alpha + t\delta_{\overline{\alpha}}$. Si $t = 0$, alors $X_n\delta_\alpha = \delta_\alpha$ et $(\partial G, \delta_\alpha)$ est une μ frontière de (G, μ).

Si $0 < t < 1$ alors $(\partial G, \lambda_t)$ n'est *pas* une μ frontière de (G, μ) puisque $X_n\lambda_t = \lambda_t$ ne converge pas vers une mesure de Dirac.

Enfin, si $t = 1$, alors $X_n\delta_{\overline{\alpha}} = \delta_{\overline{\alpha}}$ et $(\partial G, \delta_{\overline{\alpha}})$ est une μ-frontière de (G, μ) bien que X_n converge vers α. Ce dernier cas fournit un exemple de μ-frontière (B, λ) telle que $G \cup B$ soit une compactification de G sans que, pour autant, X_n ne converge vers Z dans cette compactification.

Remarque 1.12. Soit B un G-espace métrique compact muni d'une mesure de probabilité μ-stationnaire λ. Soit $B' = \mathcal{P}(B)$ et $\lambda' = \delta_\lambda$. Alors B' est un G-espace compact métrisable et λ' est une probabilité μ-stationnaire sur B'. D'après la proposition 1.8, (B', λ') est une μ-frontière de (G, μ).

Proposition 1.13. *Si (B, λ) est une μ-frontière de (G, μ) alors l'application $\Pi_B : L^\infty(B, \lambda) \to H^\infty(G, \mu)$ définie par la formule de Poisson est injective.*

La preuve repose sur la notion de bord de Poisson de (G, μ) et sera expliquée dans la section 1.6. On peut observer d'emblée que la restriction de Π_B à $C(B)$ est injective. En effet, si la fonction $F \in C(B)$ vérifie $\Pi_B F = 0$, alors on a

$$F(Z) \;=\; \lim \int_B F(X_n x)\mathrm{d}\lambda(x) \;=\; \lim \Pi_B F(X_n) \;=\; 0$$

de sorte que $F = 0$ λ-presque sûrement.

Voici une conséquence immédiate de l'injectivité de Π_B :

Corollaire 1.14. *Si (B, λ) est une μ-frontière de (G, μ) alors l'action de G sur B est ergodique par rapport à λ.*

Démonstration. Il s'agit de montrer que si $A \subset B$ est un borélien G-invariant, alors $\lambda(A) = 0$ ou 1. La formule de Poisson appliquée à l'indicatrice $\mathbb{I}_A$ fournit une fonction μ-harmonique f définie par $f(g) = \Pi_B(\mathbb{I}_A)(g) = \lambda(g^{-1}A) = \lambda(A)$ puisque A est G-invariant. Par injectivité de Π_B, on a $\mathbb{I}_A = \lambda(A)$ λ-presque sûrement, donc $\lambda(A) = 0$ ou 1. □

Exemple 1.15. Soit G un groupe dénombrable agissant sur un espace métrique compact B. L'énoncé suivant :

pour toute probabilité non dégénérée μ sur G, il existe une unique probabilité μ-stationnaire λ sur B et (B, λ) est une μ-frontière de (G, μ)

est vérifié lorsque :

(**i**) G est un groupe libre de type fini (non abélien) et $B = \partial G$ est le bord géométrique de G [9, 62, 63], et plus généralement, G est un groupe hyperbolique au sens de Gromov, non virtuellement cyclique, et $B = \partial G$ est son bord hyperbolique [35] ;

(**ii**) G est un groupe ayant une infinité de bouts et $B = \mathcal{E}(G)$ est l'espace des bouts de G [63, 35] ;

(**iii**) $G = \pi_1(M)$ est le groupe fondamental d'une variété riemannienne compacte de rang 1 et $B = \partial\tilde{M}$ est le bord visuel de son revêtement universel $\tilde{M}$ [4] ;

(**iv**) G est un groupe contenant un sous groupe normal libre F de type fini, et $B = \partial F$ est le bord géométrique de F. L'action de G sur F par automorphismes intérieurs s'étend en une action de G sur ∂F qui prolonge l'action de F par multiplication à gauche [59].

L'hypothèse "μ non dégénérée" n'est pas optimale. Dans les deux premiers cas ci-dessus, on peut simplement supposer que $\mathrm{sgr}(\mu)$ ne fixe aucun sous-ensemble fini de B.

1.5. **Compactifications de Dynkin.** On suppose à présent que G est un groupe de type fini, et on note $|.|$ la métrique des mots associée à un système fini et symétrique de générateurs S. Soit B un G-espace mesuré muni d'une mesure de probabilité μ-stationnaire λ. Supposons que $G \cup B$ soit une compactification métrique de G : $G \cup B$ est muni d'une métrique d qui en fait un espace compact induisant la topologie discrète sur G et dans lequel G est un ouvert dense. L'action de G sur $G \cup B$ (par translation à gauche sur G) est une action par homéomorphismes.

Soit $(X_n)_n$ une réalisation de la marche aléatoire droite partant de e et de loi μ. La question est alors de trouver à quelle(s) condition(s) la marche aléatoire X_n va converger dans B. Des propriétés de contraction et de proximalité - exprimées de nombreuses manières - ont été dégagées dans ce but [19, 27, 28, 49, 15]. En particulier, W.Woess met en évidence les notions de projectivité et de contractivité pour traiter le cas des groupes d'automorphismes de graphes hyperboliques [63, 64]. Si l'on ne souhaite traiter que des marches aléatoires sur les groupes hyperboliques, il est possible de très légèrement simplifier ces notions. Je propose la définition suivante :

Définition 1.16. *Soit $G \cup B$ une compactification métrique d'un groupe de type fini G. On dit que $G \cup B$ est une compactification de Dynkin de G si, pour tout $x \in B$, pour toute suite (g_n) d'éléments de G convergeant vers x, on a :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists\, N \ \text{tel que}\ \forall n \geq N, \exists\, U_{n,\varepsilon} \subset B \ \text{tel que}\ diam(U_{n,\varepsilon}) < \varepsilon \ \text{et}\ g_n(U^c_{n,\varepsilon}) \subset B(x, \varepsilon)\ .$$

En d'autres termes, si g_n converge vers x, alors $g_n y$ converge vers x uniformément en y en dehors d'un sous-ensemble de B de diamètre arbitrairement petit. La terminologie choisie fait référence à la notion d'espace de Dynkin introduite par Furstenberg [18].

Exemple 1.17. Soit $G = \mathbb{F}(a_1, \ldots, a_d)$ le groupe libre sur $\{a_1, \ldots, a_d\}$, ∂G le bord géométrique de G et d la métrique sur $G \cup \partial G$ définie dans la section 1.2. Alors $(G \cup \partial G, d)$ est une compactification de Dynkin de G. En effet, pour tout élément $g = u_1 \cdots u_n$ de longueur n et pour tout $m \leq n$, notons $[g]_m = [u_1 \cdots u_m]$ le cylindre de base $u_1 \cdots u_m$ dans ∂G. Alors on a :

$$\forall\, m, n \geq 1,\ \forall\, g \in G,\ |g| \geq m + n \implies g([g^{-1}]^c_m) \subset [g]_n\ .$$

dont on déduit immédiatement que $(G \cup \partial G, d)$ est une compactification de Dynkin de G.

Exemple 1.18. Plus généralement, soit G un groupe hyperbolique au sens de Gromov et ∂G son bord hyperbolique [25, 24]. Fixons un système générateur S de G, notons $|\cdot|$ la métrique des mots associée à S, et $(\cdot|\cdot)$ le produit de Gromov dans G défini, pour $g, h \in G$, par $(g|h) = \frac{1}{2}(|g| + |h| - |g^{-1}h|)$. Ce produit se prolonge à $G \cup \partial G$ et permet de définir une topologie sur $G \cup \partial G$ qui en fait un espace compact métrisable dans lequel $g_n \to \xi \in \partial G \Leftrightarrow (g_n|\xi) \to +\infty$.

On a :

$$\forall\, m,n \geq 1,\ \forall\, g,h,k \in G,\ (g|k) \geq m+n \text{ et } (g^{-1}|h) \leq m \implies (gh|k) \geq n$$

d'où l'on déduit aussitôt, en notant δ la constante d'hyperbolicité de G, que

$$\forall\, m,n \geq 1,\ \forall\, g \in G,\ \forall \xi,\eta \in \partial G,\ (g|\xi) \geq m+n \text{ et } (g^{-1}|\eta) \leq m \implies (g\eta|\xi) \geq n-4\delta$$

ce qui permet de montrer que $G \cup \partial G$ est une compactification de Dynkin de G.

Le résultat suivant jouera un rôle-clé, notamment dans l'étude de la convergence des marches aléatoires :

Lemme 1.19. *Soit $G \cup B$ une compactification de Dynkin de G, et λ une mesure diffuse sur B. Alors, pour tout $x \in B$ et pour toute suite (g_n) d'éléments de G convergeant vers x, la suite de mesures $g_n\lambda$ converge faiblement vers δ_x.*

Démonstration. Il s'agit de montrer que, pour toute fonction $F \in C(B)$, on a

$$\int_B F(g_n y)\mathrm{d}\lambda(y) \to F(x)\ .$$

C'est une conséquence directe de la définition 1.16, jointe au fait que, B étant compact et λ diffuse, la mesure de la boule $\lambda[B(z,r)]$ tend vers 0 avec r uniformément en z. □

La conclusion de ce lemme exprime une notion de proximalité [20]. Elle est obtenue sous des hypothèses légèrement différentes (projectivité et contractivité) par Woess [62, 63]. Citons aussi [35, lemme 2.2] où la même conclusion est obtenue en imposant d'autres conditions, géométriques, à la compactification $G \cup B$ (la contractivité est remplacée par l'existence de *strips*).

Tous les résultats énoncés dans cette partie découlent du lemme 1.19. En voici deux conséquences immédiates : la résolution du problème de Dirichlet et l'unicité de la mesure stationnaire [62, 64] :

Corollaire 1.20. *Soit $G \cup B$ une compactification de Dynkin d'un groupe de type fini G et μ une mesure de probabilité sur G telle que sgr(μ) ne fixe aucun sous-ensemble fini de B. Alors toute fonction $F \in C(B)$ admet un unique prolongement continu sur $G \cup B$ et μ-harmonique sur G.*

Démonstration. Soit λ une mesure μ-stationnaire sur B. D'après le lemme 1.4, la mesure λ est diffuse. Soit $F \in C(B)$ une fonction continue et $f = \Pi_B F$ la fonction obtenue par la formule de Poisson appliquée à F. La fonction f est μ-harmonique et vérifie $\lim_{g \to x} f(g) = F(x)$ pour tout $x \in B$ d'après le lemme 1.19, ce qui prouve l'existence.

Prouvons l'unicité. Soient f_1 et f_2 deux prolongements μ-harmoniques continus de F. La fonction $f = f_1 - f_2$ est une fonction μ-harmonique sur G qui vérifie $\lim_{|g| \to \infty} f(g) = 0$. Le semi-groupe sgr($\mu$) est infini car il ne fixe aucun sous-ensemble fini de B. D'après le principe du maximum, on en déduit que $f = 0$. □

Corollaire 1.21. *Soit $G \cup B$ une compactification de Dynkin d'un groupe de type fini G et μ une mesure de probabilité sur G telle que sgr(μ) ne fixe aucun sous-ensemble fini de B. Alors il existe une unique mesure μ-stationnaire λ sur B. De plus, l'action de G sur B est ergodique par rapport à λ.*

Démonstration. L'existence provient du lemme 1.3. Prouvons l'unicité. Soient λ_1 et λ_2 deux mesures μ-stationnaire sur B. Soit $F \in C(B)$. Les fonctions f_1 et f_2 sur G définies par $f_i(g) = \int_B F\mathrm{d}(g\lambda_i)$ sont deux prolongements harmoniques continus de F à $G \cup B$. D'après le corollaire 1.20, on a $f_1 = f_2$, d'où $\int_B F\mathrm{d}\lambda_1 = \int_B F\mathrm{d}\lambda_2$ c'est-à-dire $\lambda_1 = \lambda_2$.

L'ergodicité de l'action de G sur B résulte de l'unicité de λ comme mesure μ-stationnaire. En effet, si $A \subset B$ est un borélien G-invariant tel que $\lambda(A) > 0$ alors la restriction normalisée de λ à A est une mesure de probabilité μ-stationnaire sur B, donc égale à λ, de sorte que $\lambda(A) = 1$. □

La notion de compactification de Dynkin permet de mesurer le défaut d'injectivité de l'application $p_\lambda : G \to \mathcal{P}(B)$, $g \mapsto g\lambda$ introduite à la fin de la section 1.3 :

Lemme 1.22. *Soit $G \cup B$ une compactification de Dynkin de G, et λ une mesure diffuse sur B.*

(1) *Si $g\lambda = h\lambda$ alors $g^{-1}h$ est un élément de torsion de G ;*
(2) *Si (g_n) est une suite d'éléments de G telle que $g_n\lambda$ converge faiblement vers $g\lambda$, alors la suite (g_n) est bornée (pour la métrique des mots).*

Démonstration. (1) Soit $g, h \in G$ tels que $g\lambda = h\lambda$. Si $g^{-1}h$ n'est pas de torsion, alors $|(g^{-1}h)^n|$ tend vers l'infini, de sorte qu'il existe une suite $n_k \to +\infty$ telle que la suite $(g^{-1}h)^{n_k}$ converge vers $x \in B$. On a donc $\lambda = g^{-1}h\lambda = (g^{-1}h)^{n_k}\lambda \to \delta_x$ d'après le lemme précédent. Ainsi, $\lambda = \delta_x$ ce qui contredit le fait que λ soit diffuse.

(2) Si (g_n) est une suite non bornée, il existe une suite $n_k \to +\infty$ telle que la suite (g_{n_k}) converge vers $x \in B$, de sorte que $g_{n_k}\lambda \to \delta_x$. Si, en plus, $g_n\lambda$ converge faiblement vers $g\lambda$, alors $g\lambda = \delta_x$ ce qui, à nouveau, contredit le fait que λ soit diffuse. □

Ainsi l'application p_λ est injective dans le cas où G est un groupe libre. On rappelle par ailleurs qu'un groupe hyperbolique ne possède qu'un nombre fini de classes de conjugaison d'éléments de torsion [24].

Venons-en à présent à l'étude des marches aléatoires dans G. Le résultat suivant constitue le résultat principal de cette partie :

Théorème 1.23. *Soit $G \cup B$ une compactification de Dynkin d'un groupe de type fini G et μ une mesure de probabilité sur G telle que sgr(μ) ne fixe aucun sous-ensemble fini de B. Alors :*

(1) *il existe une variable aléatoire $X_\infty : \Omega \to B$ telle que $X_n(\omega) \to X_\infty(\omega)$ $\mathbf{P}$-presque sûrement ;*
(2) *la loi μ^∞ de X_∞ est une probabilité μ-stationnaire et diffuse sur B ; c'est l'unique probabilité μ-stationnaire sur B ;*
(3) *l'espace (B, μ^∞) est une μ-frontière de (G, μ).*

Définition 1.24. *Sous les hypothèses du théorème précédent, la mesure μ^∞ est la mesure harmonique associée à la marche aléatoire sur G de loi μ.*

Dans le cas où G est un groupe libre non abélien de type fini, ce théorème - attribué à Margulis dans [30] - a été démontré par Cartwright et Soardi [9], et la preuve simplifiée ultérieurement par Woess [62, 63] et Ledrappier [38]. Il avait été démontré sous des hypothèses plus ou moins restrictives sur μ par divers auteurs : Furstenberg lorsque μ est supportée par les générateurs canoniques et leurs inverses [19], Derriennic lorsque μ est à support fini [12] puis sous une hypothèse de premier moment fini [13], Sawyer et Steger lorsque μ a un moment logarithmique fini [56], Cartwright et Sawyer lorsque μ est radiale [8]. Dans le cas où G est un groupe hyperbolique, ce résultat est dû à Ancona lorsque μ est à support fini [1], et à Woess [63] dans le cas général. Il a été redémontré par Kaimanovich [35]. La preuve exposée ci-après est inspirée de [9], [35] et [38].

Démonstration du théorème 1.23. Soit $G \cup B$ une compactification de Dynkin de G, et μ une mesure de probabilité sur G telle que sgr(μ) ne fixe aucun sous-ensemble fini de B. Comme B est compact, il existe d'après le lemme 1.3 une mesure de probabilité μ-stationnaire λ sur B, et λ est diffuse d'après le lemme 1.4.

Démontrons le point (1). La preuve consiste en une mise en balance répétée de la proposition 1.8 et du lemme 1.19. On commence par montrer que $|X_n| \to +\infty$ presque sûrement. Notons $\Omega_0 = \{\liminf |X_n| < +\infty\}$. Soit $\omega \in \Omega_0$. Alors il existe une suite (n_k) et un élément g_ω tel que $X_{n_k}(\omega) = g_\omega$, de sorte que $X_{n_k}(\omega)\lambda = g_\omega\lambda$. Par ailleurs, la mesure λ étant μ-stationnaire, il existe, d'après la proposition 1.8, une mesure $\nu_\omega \in \mathcal{P}(B)$ telle que $X_n(\omega)\lambda$ converge faiblement vers ν_ω. Ainsi, $g_\omega\lambda = \nu_\omega$ et la suite entière $X_n(\omega)\lambda$ converge faiblement vers $g_\omega\lambda$. D'après le lemme 1.22, la suite $X_n(\omega)$ est bornée. Or (X_n) est un chaîne de Markov irréductible sur l'ensemble sgr(μ) qui est infini (puisqu'il ne fixe aucun ensemble fini dans B), donc X_n est presque sûrement non bornée, ce qui prouve que $\mathbf{P}(\Omega_0) = 0$.

Achevons la preuve de (1). Soit $\omega \in \Omega$ tel que $|X_n(\omega)| \to +\infty$. Alors il existe $x \in B$ et $n_k \to +\infty$ tels que $X_{n_k}(\omega) \to x$, de sorte que $X_{n_k}(\omega)\lambda \to \delta_x$ d'après le lemme 1.19. Comme $X_n(\omega)\lambda$ converge faiblement vers ν_ω, on en déduite que $\delta_x = \nu_\omega$ de sorte que toute la suite $X_n(\omega)\lambda$ converge vers δ_x. Si y est une autre valeur d'adhérence de la suite $X_n(\omega)$ alors $X_n(\omega)\lambda$ converge vers δ_y, donc $x = y$ et la suite $X_n(\omega)$ admet exactement une valeur d'adhérence dans B.

Prouvons le point (2). On note μ^∞ la loi de X_∞. C'est la mesure sur B définie, pour $A \subset B$, par $\mu^\infty(A) = \mathbf{P}(X_\infty \in A)$. Rappelons que $X_n(\omega) = \omega_1 \cdots \omega_n$, de sorte que $X_{n+1}(\omega) = \omega_1 \cdots \omega_{n+1} = \omega_1 \cdot X_n(\theta\omega)$ où θ est le shift sur Ω. On en deduit que $X_\infty(\omega) = \omega_1 \cdot X_\infty(\theta\omega)$. La variable aléatoire $X_\infty \circ \theta$ est indépendante de ω_1 et suit la même loi que X_∞ car θ préserve $\mathbf{P}$. En comparant les lois de X_∞ et $\omega_1 \cdot X_\infty \circ \theta$ on constate que $\mu^\infty = \mu * \mu^\infty$. La mesure μ^∞ est ainsi μ-stationnaire, et donc diffuse d'après le lemme 1.4.

Le fait que μ^∞ soit l'unique mesure μ-stationnaire sur B résulte du corollaire 1.21. En voici une autre démonstration. Soit λ une mesure μ-stationnaire sur B. D'après la proposition 1.8, la suite $X_n(\omega)\lambda$ converge, pour presque tout ω, vers une mesure ν_ω sur B. Comme $X_n(\omega) \to X_\infty(\omega)$, $X_n(\omega)\lambda$ converge vers $\delta_{X_\infty(\omega)}$ d'après le lemme 1.19, de sorte que $\nu_\omega = \delta_{X_\infty(\omega)}$. Le point (2) de la proposition 1.8 donne alors :

$$\lambda \;=\; \int_\Omega \nu_\omega \, \mathrm{d}\mathbf{P}(\omega) \;=\; \int_\Omega \delta_{X_\infty(\omega)} \, \mathrm{d}\mathbf{P}(\omega) \;=\; X_\infty(\mathbf{P}) \;=\; \mu^\infty$$

ce qui achève la preuve du point (2). Le point (3) résulte du lemme 1.19. $\square$

Exemple 1.25. Voyons deux exemples de marches aléatoires sur le groupe libre. On reprend les notations de l'exemple 1.2 On note $G = \mathbb{F}(a_1, \ldots, a_d)$ le groupe libre sur $\{a_1, \ldots, a_d\}$, $S = \{a_1, \ldots, a_d, a_1^{-1}, \ldots, a_d^{-1}\}$ et ∂G le bord géométrique de G.

- *La marche simple.* La mesure μ est la mesure uniforme sur S définie par $\mu(a_i) = \mu(a_i^{-1}) = 1/2d$. Dans ce cas, le processus Y_n défini par $Y_n = |X_n|$ est une chaîne de Markov réfléchie sur $\mathbb{N}$ dont les probabilités de transitions sont données par $p(0,1) = 1$ et, si $k \geq 1$, $p(k, k-1) = 1/2d$ et $p(k, k+1) = 1 - 1/2d$. Comme $d \geq 2$, Y_n est transiente, de sorte que $|X_n| \to +\infty$. Comme les incréments $X_n^{-1}X_{n+1}$ sont bornés, on en déduit directement que X_n converge dans ∂G. La mesure m définie, pour tout cylindre $[u_1 \cdots u_n]$, par $m([u_1 \cdots u_n]) = \frac{1}{2d(2d-1)^{n-1}}$ est μ-stationnaire. On en déduit que $m = \mu^\infty$ et est l'unique mesure μ-stationnaire sur ∂G.

- *Les marches radiales.* À toute fonction $\varphi : \mathbb{N} \to [0,1]$ telle que $\sum_{n=1}^{+\infty} 2d(2d-1)^{n-1}\varphi(n) = 1$ on associe une mesure radiale μ_φ sur G définie par $\mu_\varphi(g) = \varphi(|g|)$. La mesure m définie précédemment est μ_φ-stationnaire, de sorte que $m = \mu_\varphi^\infty$ et c'est l'unique mesure μ_φ-stationnaire sur ∂G. L'ensemble des mesures μ_φ sur G est un sous-ensemble convexe de $\mathcal{P}(G)$ possédant une infinité de points extrémaux (correspondant aux fonctions φ supportées par les singletons de $\mathbb{N}$) et constitué de mesures vérifiant toutes $\mu * m = m$.

1.6. **Le bord de Poisson.** Considérons l'application

$$X : \Omega \to G^{\mathbb{N}^*},\ \omega \mapsto X(\omega) = (X_n(\omega))_{n \geq 1} = (\omega_1, \omega_1\omega_2, \omega_1\omega_2\omega_3, \ldots)\,.$$

Les propriétés de la marche aléatoire sur G de loi μ sont décrites par la probabilité $\mathbf{Q} = X(\mathbf{P})$ sur l'espace des trajectoires $G^{\mathbb{N}^*}$. Le groupe G agit sur $G^{\mathbb{N}^*}$ par multiplication à gauche sur chaque coordonnée, de sorte que la mesure $\mathbf{Q}$ est μ-stationnaire. Notons $T : G^{\mathbb{N}^*} \to G^{\mathbb{N}^*}, (x_n) \mapsto (x_{n+1})$ le shift sur l'espace des trajectoires.

Théorème 1.26. *Soit G un groupe dénombrable muni d'une mesure de probabilité μ. Il existe un quotient G-équivariant et T-invariant de l'espace $(G^{\mathbb{N}^*}, \mathbf{Q})$, noté (Γ, ν), maximal parmi tous les quotients G-équivariants et T-invariants de $(G^{\mathbb{N}^*}, \mathbf{Q})$, et unique à isomorphisme mesurable G-équivariant près.*

De plus, l'application $\Pi_\Gamma : L^\infty(\Gamma, \nu) \to H^\infty(G, \mu)$ définie par la formule de Poisson est un isomorphisme.

Définition 1.27. *L'espace (Γ, ν) s'appelle le bord de Poisson de (G, μ).*

La première construction du bord de Poisson d'un groupe localement compact est due à Furstenberg [19]. Dans le cas d'un groupe dénombrable, Kaimanovich a revisité cette théorie, notamment en en clarifiant les concepts et en simplifiant la construction de Furstenberg [35]. Voir aussi [15] pour une présentation synthétique des différents points de vue.

Revenons sur cet énoncé. Il signifie qu'il existe une application $\mathbf{bnd} : (G^{\mathbb{N}^*}, \mathbf{Q}) \to (\Gamma, \nu)$ qui est G-équivariante, T-invariante, telle que $\nu = \mathbf{bnd}(\mathbf{Q})$, et vérifiant la propriété suivante : si B est un G-espace mesuré muni d'une mesure de probabilité μ-stationnaire λ, si $\phi : (G^{\mathbb{N}^*}, \mathbf{Q}) \to (B, \lambda)$ est une application G-équivariante, T-invariante et telle que $\lambda = \phi(\mathbf{Q})$, alors ϕ se factorise à travers (Γ, ν), c'est-à-dire qu'il existe une application G-équivariante $\Phi : (\Gamma, \nu) \to (B, \lambda)$ telle que $\phi = \Phi \circ \mathbf{bnd}$. En guise d'illustration, démontrons la proposition 1.13 :

Corollaire 1.28. *Soit (B, λ) une μ-frontière de (G, μ). Alors (B, λ) est un quotient G-équivariant du bord de Poisson (Γ, ν), et l'application $\Pi_B : L^\infty(B, \lambda) \to H^\infty(G, \mu)$ définie par la formule de Poisson est injective.*

Démonstration. Par définition, il existe une variable aléatoire $Z : (\Omega, \mathbf{P}) \to B$ de loi λ telle que $X_n(\omega)\lambda$ converge faiblement vers $\delta_{Z(\omega)}$ $\mathbf{P}$-p.s. L'application $z = Z \circ X^{-1} : G^{\mathbb{N}^*} \to B$ vérifie $z(\mathbf{Q}) = \lambda$, et, pour $\mathbf{Q}$-presque tout $x = (x_n)_{n \geq 1}$, $x_n\lambda \to \delta_{z(x)}$. Cette application z est T-invariante (car la limite d'une suite ne dépend pas de ses premiers termes), et G-équivariante, car :

$$\delta_{z(gx)} = \lim_n g x_n \lambda = g\delta_{z(x)} = \delta_{gz(x)} .$$

D'après le théorème 1.26, il existe une application G-équivariante $\tilde{Z} : (\Gamma, \nu) \to (B, \lambda)$ telle que $z = \tilde{Z} \circ \mathbf{bnd} : (G^{\mathbb{N}^*}, \mathbf{Q}) \to (\Gamma, \nu) \to (B, \lambda)$. On en déduit une factorisation de

$$\Pi_B : L^\infty(B, \lambda) \to L^\infty(\Gamma, \nu) \to H^\infty(G, \mu) ,$$

la première flèche étant l'application $F \mapsto F \circ \tilde{Z}$ et la deuxième étant Π_Γ. L'injectivité de Π_B en découle aussitôt. □

La remarque 1.12 fournit alors aussitôt le

Corollaire 1.29. *Soit G un groupe dénombrable muni d'une mesure de probabilité λ. Soit (Γ, ν) le bord de Poisson de (G, μ). Alors pour tout G-espace métrique compact B, il existe une application mesurable G-équivariante $\Gamma \to \mathcal{P}(B)$.*

Exemple 1.30. Le bord de Poisson est trivial pour toutes les mesures de probabilité non dégénérées sur les groupes abéliens [10] et nilpotents [14] : toutes les fonctions harmoniques bornées sur de tels groupes sont constantes.

Exemple 1.31. Reprenons la liste d'exemples évoqués en 1.15. Dans [35], Kaimanovich démontre que l'énoncé suivant :

Soit G un groupe de type fini agissant sur un espace métrique compact B et $|.|$ la métrique des mots associée à un système fini et symétrique de générateurs S. Soit μ une probabilité non dégénérée sur G vérifiant $\sum_{g \in G} -\mu(g) \log \mu(g) < +\infty$ et $\sum_{g \in G} \mu(g) \log |g| < +\infty$. Alors il existe une unique probabilité μ-stationnaire λ sur B et (B, λ) est le bord de Poisson de (G, μ)

est vérifié, entre autres, dans les trois cas suivants :

(**i**) G est un groupe hyperbolique au sens de Gromov, non virtuellement cyclique, et $B = \partial G$ est son bord hyperbolique ; si G est un groupe libre de type fini, Dynkin et Malyutov l'ont démontré lorsque μ est supportée par les générateurs canoniques [14], et Derriennic lorsque μ est à support fini [12] ;

(**ii**) G est un groupe ayant une infinité de bouts et $B = \mathcal{E}(G)$ est l'espace des bouts de G ;

(**iii**) $G = \pi_1(M)$ est le groupe fondamental d'une variété riemannienne compacte de rang 1 et $B = \partial\tilde{M}$ est le bord visuel de son revêtement universel $\tilde{M}$; Ballmann et Ledrappier l'ont démontré lorsque la mesure μ a un premier moment $\sum_g |g|\mu(g)$ fini [5].

Dans le cas où G est un groupe contenant un sous-groupe normal libre F de type fini, $B = \partial F$ est le bord géométrique de F, μ est une probabilité non dégénérée sur G et λ l'unique mesure stationnaire sur ∂F, on ignore si la μ-frontière $(\partial F, \lambda)$ est le bord de Poisson de (G, μ), même lorsque μ est à support fini. Avec François Gautero [22], nous démontrons le

Théorème 1.32. *Soit G une extension cyclique d'un groupe libre de type fini F (i.e. $G/F \sim \mathbb{Z}$), et μ une mesure de probabilité non dégénérée sur G ayant un premier moment $\sum_g |g|\mu(g)$ fini. Alors il existe une unique probabilité μ-stationnaire λ sur ∂F et le G-espace $(\partial F, \lambda)$ est le bord de Poisson de (G, μ).*

Plus de détails et d'autres exemples de bord de Poisson d'extensions du groupe libre sont donnés dans la partie 4.

2. Marches aléatoires dans les produits libres de groupes finis

Soit G un groupe hyperbolique non virtuellement cyclique et S un système fini et symétrique de générateurs de G. Soit μ une mesure de probabilité non dégénérée sur G, c'est-à-dire dont le support engendre G comme semi-groupe, et $(X_n)_n$ la marche aléatoire droite sur G de loi μ partant de l'identité. D'après le théorème 1.23, il existe une variable aléatoire $X_\infty : \Omega \to \partial G$ telle que $X_n(\omega) \to X_\infty(\omega)$ $\mathbf{P}$-presque sûrement, et la loi μ^∞ de X_∞ est l'unique probabilité μ-stationnaire sur ∂G. Cette mesure μ^∞, appelée mesure harmonique de la marche sur G de loi μ, est diffuse, et son support est ∂G tout entier puisque l'action d'un groupe hyperbolique sur son bord est minimale.

Il est naturel de chercher des situations permettant de mieux comprendre la structure de la mesure harmonique. Par exemple, si G est un groupe libre de type fini ou bien un produit libre de groupes finis, et si, de plus, la marche aléatoire est une marche au plus proche voisin, alors la mesure μ^∞ est markovienne sur ∂G, c'est-à-dire que ∂G est l'espace des trajectoires d'une chaîne de Markov dont la mesure associée est μ^∞ [14, 56, 61].

Considérant la question sous un autre angle, Jean Mairesse a montré [44] que si G est le produit libre d'un nombre fini de groupes finis ou infinis cycliques alors pour certains systèmes générateurs Σ de G, la mesure harmonique μ^∞ associée à toute mesure μ supportée par Σ possède une structure plus précise : elle est markovienne multiplicative.

Dans l'article [47] - paru après [44] mais néanmoins antérieur à celui-ci, Jean Mairesse et moi nous restreignons au cas où G est un produit libre de groupes finis et Σ le système générateurs canonique, c'est-à-dire l'union disjointe des groupes finis en question. Nous considérons des marches aléatoires sur G au plus proche voisin par rapport à Σ. Les résultats que nous obtenons sont de trois types :

(1) nous donnons une preuve plus simple (que dans [44]) du caractère markovien multiplicatif de la mesure harmonique μ^∞ sur ∂G, preuve qui ne s'étend pas à la situation générale envisagée dans [44]. Nous caractérisons les marches aléatoires (G, μ) pour lesquelles le *shift* agissant sur ∂G est ergodique pour la mesure μ^∞.
(2) la forme simple des équations obtenues pour μ^∞ permet de calculer la vitesse de fuite de la marche aléatoire ainsi que l'entropie asymptotique d'Avez. Nous obtenons en particulier des formules explicites pour la vitesse de toutes les marches au plus proche voisin dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ et pour la marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$.
(3) nous étudions la notion introduite par Vershik de système générateur extrémal d'un groupe de type fini. Lorsque G est un produit libre de groupes finis, nous montrons que le système générateur canonique Σ est extrémal. En revanche, dans le cas par exemple de $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}*\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, le système générateur minimal contenu dans Σ n'est pas extrémal.

Le reste de cette partie est consacré à une exposition détaillée des résultats obtenus dans l'article [47].

2.1. **Préliminaires.** Soit $\{G_i\}_{i\in I}$ une famille finie de groupes finis et $G = *_{i\in I} G_i$ le produit libre de cette famille de groupes. On note $\Sigma_i = G_i \setminus \{e_i\}$ (où e_i est l'élément neutre de G_i) et $\Sigma = \amalg_{i\in I}\Sigma_i$. Σ est le système générateur canonique de G. Pour $u \in \Sigma$, on note $\overline{u} = i \in I$ si $u \in \Sigma_i$. Tout élément $g \in G$ admet une unique écriture $g = u_1 \cdots u_n$ qui est un mot réduit sur l'alphabet Σ, c'est-à-dire un mot tel que $\overline{u}_k \neq \overline{u}_{k+1}$ pour $1 \leq k \leq n-1$, l'élément neutre e de G étant représenté par le mot vide. Le mot réduit représentant le produit de g et h est la concaténation des mots réduits représentant g et h avec d'éventuelles simplifications au point de contact.

Soit $g = u_1 \cdots u_n$ un élément de G écrit sous forme réduite. L'entier n est la longueur de g par rapport au système générateur Σ, et est noté $|g|$. Le bord géométrique de G est l'ensemble $\partial G = \{\xi = \xi_0\xi_1 \cdots \in \Sigma^{\mathbb{N}} \mid \overline{\xi}_i \neq \overline{\xi}_{i+1}\}$ des mots infinis à droite réduits sur l'alphabet Σ. Pour $g, h \in G$, on note $g \wedge h$ le plus grand préfixe commun aux mots réduits représentants g et h, puis on étend cette définition à $g, h \in G \cup \partial G$. On définit alors une métrique sur $G \cup \partial G$ en posant $d(g, h) = \exp(-|g\wedge h|)$ si $g \neq h$ et $d(g, g) = 0$. L'espace $(G\cup\partial G, d)$ est un espace métrique compact dans lequel G est un ouvert dense. L'action de G sur lui-même par translation à gauche se prolonge en une action sur ∂G par homéomorphismes bilipschitziens. Si $u_1 \cdots u_k$ est un mot réduit sur Σ, on note $[u_1 \cdots u_k]$ le cylindre de base $u_1 \cdots u_k$ dans ∂G. On munit $(\partial G, d)$ de la tribu borélienne, c'est exactement la tribu engendrée par les cylindres.

Si $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, alors G contient un sous-groupe cyclique infini d'indice 2. Hormis ce cas, G est un groupe hyperbolique non vituellement cyclique. Soit μ une mesure non dégénérée sur G. Rappelons que l'on note (X_n) la marche aléatoire droite sur G de loi μ et μ^∞ la mesure harmonique associée sur ∂G.

La vitesse de fuite. Le comportement asymptotique radial de la marche aléatoire X_n dans un groupe de type fini G de loi μ est donné par la vitesse de fuite. Si la mesure μ admet un premier moment $\sum_g |g|\mu(g)$ fini, alors il existe un réel γ tel que $\lim_{n\to+\infty} |X_n|/n = \gamma$ $\mathbf{P}$-presque sûrement. C'est une conséquence du théorème ergodique sous-additif de Kingman [13]. Cette limite γ s'appelle la vitesse de fuite de la marche aléatoire (G, μ). Si μ est non dégénérée et si G n'est pas $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}*\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, alors G est non moyennable et γ est strictement positif [26, 38].

Dans le cas où G est un produit libre de groupes finis (ou un groupe libre de type fini [38]), la vitesse γ s'exprime comme une intégrale de la fonction de Busemann sur $G \times \partial G$. Si, de plus, la mesure μ est supportée dans Σ, alors cette expression intégrale devient

$$\gamma \;=\; \sum_{a\in\Sigma} \mu(a)\Big[-\mu^\infty([a^{-1}]) + \sum_{b\in\Sigma\setminus\Sigma_a} \mu^\infty([b])\Big]\,. \tag{2}$$

En d'autres termes, γ est la variation moyenne de la longueur d'un élément de ∂G distribué suivant μ^∞ lorsqu'on le multiplie à gauche par un élément de G distribué suivant μ.

L'entropie asymptotique d'Avez. La perte d'information que l'on a sur la position de X_n est mesurée asymptotiquement quand n tend vers l'infini par une quantité introduite par A.Avez [3], l'entropie $h(G,\mu)$ de la marche aléatoire. L'entropie $H(\mu)$ d'une mesure μ sur un ensemble fini S est $H(\mu) = -\sum_{x\in S}\mu(x)\log\mu(x)$. Cette entropie est maximale si μ est la mesure uniforme sur S, et nulle si μ est une mesure de Dirac. Si μ est une probabilité sur G d'entropie finie, l'entropie $h(G,\mu)$ de la marche aléatoire est alors définie par

$$h(G,\mu) = \lim_n \frac{H(\mu^{*n})}{n} = \lim_n -\frac{1}{n}\log\mu^{*n}(X_n) \quad \mathbf{P}-\text{a.}s.\,. \tag{3}$$

L'existence de la première limite résulte de la sous-additivité de la suite $H(\mu^{*n})$ [3], la seconde est une autre conséquence du théorème ergodique sous-additif de Kingman [13].

Il existe une formule générale pour l'entropie qui exprime $h(G,\mu)$ comme l'intégrale d'une certaine dérivée de Radon-Nikodym sur le produit de (G,μ) par son bord de Poisson (Γ,ν) [30]. Dans le cas où G est un produit libre de groupes finis, et lorsque la mesure μ est à support dans Σ alors $(\Gamma,\nu) = (\partial G,\mu^\infty)$ cette formule s'écrit

$$h(G,\mu) = -\sum_{a\in\Sigma}\mu(a)\int_{\partial G}\log\bigl[\frac{da^{-1}\mu^\infty}{d\mu^\infty}(\xi)\bigr]\,d\mu^\infty(\xi) \tag{4}$$

où $da^{-1}\mu^\infty/d\mu^\infty$ désigne la dérivée de Radon-Nikodym de $a^{-1}\mu^\infty$ par rapport à μ^∞ [38].

2.2. **Mesures harmoniques markoviennes multiplicatives.** Soit $G = *_{i\in I}G_i$ un produit libre d'une famille finie de groupes finis et μ une probabilité sur G non dégénérée et dont le support est contenu dans Σ. Nous allons construire une chaîne de Markov sur l'espace d'états Σ, dont l'espace des trajectoires sera ∂G et allons tenter d'identifier la mesure markovienne associée sur ∂G avec la mesure harmonique μ^∞.

Soit $\mathring{\mathcal{B}} = \{x\in\mathbb{R}^\Sigma \mid \forall u,\ x(u)>0,\ \sum_u x(u)=1\}$. Si $x\in\mathring{\mathcal{B}}$ et $S\subset\Sigma$, on note $x(S)=\sum_{u\in S}x(u)$. A tout élément $r\in\mathring{\mathcal{B}}$ on associe la matrice $P_r = [P_r(u,v)]_{u,v}$ de dimension $\Sigma\times\Sigma$ définie par

$$P_r(u,v) = \begin{cases} r(v)/r(\Sigma\backslash\Sigma_u) & \text{si } v\in\Sigma\backslash\Sigma_u \\ 0 & \text{sinon}\end{cases}\,. \tag{5}$$

C'est la matrice de transition d'une chaîne de Markov irréductible sur l'espace d'états Σ. La probabilité $P_r(u,v)$ de passer de l'état u à l'état v n'est autre que $r(v)$ conditionnellement au fait que $v\notin\Sigma_u$. Soit $p = (r(a)r(\Sigma\backslash\Sigma_a), a\in\Sigma)$ et $\pi = p/p(\Sigma)$. On vérifie facilement que $\pi P_r = \pi$, de sorte que π est la distribution stationnaire de la chaîne de Markov définie par P_r. On observe que l'on a aussi $\pi(u)\,P_r(u,v) = \pi(v)\,P_r(v,u)$ de sorte que cette chaîne de Markov est réversible.

Soit $(U_n)_n$ une réalisation de la chaîne de Markov de matrice de transition P_r, démarrant en U_1 et telle que U_1 suive la loi r. On pose $U^\infty = \lim_n U_1\cdots U_n$, et on note ν_r^∞ la loi de U^∞. Par construction de P, le support de ν_r^∞ est contenu dans ∂G. Pour tout mot $u_1\cdots u_k$ réduit sur Σ, on a :

$$\begin{aligned} \nu_r^\infty([u_1\cdots u_k]) &= r(u_1)P_r(u_1,u_2)\cdots P_r(u_{k-1},u_k) \\ &= r(u_1)\frac{r(u_2)}{r(\Sigma\backslash\Sigma_{u_1})}\cdots\frac{r(u_k)}{r(\Sigma\backslash\Sigma_{u_{k-1}})} = \frac{r(u_1)}{r(\Sigma\backslash\Sigma_{u_1})}\cdots\frac{r(u_{k-1})}{r(\Sigma\backslash\Sigma_{u_{k-1}})}r(u_k)\,. \end{aligned} \tag{6}$$

La mesure ν_r^∞ est la mesure *markovienne multiplicative* associée à r.

Pour $u \in \Sigma$, on note $q(u) = r(u)/r(\Sigma\backslash\Sigma_u)$ de sorte que la mesure ν_r^∞ s'écrit

$$\forall k \geq 2,\ \ \nu_r^\infty([u_1 \cdots u_k]) = q(u_1) \cdots q(u_{k-1}) r(u_k)\ . \tag{7}$$

La mesure ν_r^∞ n'est en général pas invariante par le shift $\tau : \partial G \to \partial G, (\xi_n)_n \mapsto (\xi_{n+1})_n$. La première loi marginale de ν_r^∞ est r tandis que la distribution stationnaire de la chaîne de Markov P_r est π. La mesure ν_r^∞ est τ-invariante et ergodique si et seulement si $r = \pi$ ce qui se traduit par :

$$\forall i \in I, \quad r(\Sigma_i) = 1/|I|\ . \tag{8}$$

Revenant à la marche aléatoire (G, μ), la question est à présent de savoir s'il existe r tel que l'on puisse identifier la mesure harmonique μ^∞ avec la mesure markovienne multiplicative ν_r^∞ associée à r.

Définition 2.1. *Les* équations de trafic *associées à la marche aléatoire* (G, μ) *sont définies par :* $\forall a \in \Sigma$,

$$x(a) = \mu(a) \sum_{u \in \Sigma\backslash\Sigma_a} x(u) + \sum_{u * v = a} \mu(u) x(v) + \sum_{u \in \Sigma\backslash\Sigma_a} \mu(u^{-1}) \frac{x(u)}{\sum_{v \in \Sigma\backslash\Sigma_u} x(v)} x(a)\ . \tag{9}$$

Lemme 2.2. *Soit μ une mesure de probabilité sur G de support Σ, et $r \in \mathring{\mathcal{B}}$. Alors la mesure harmonique μ^∞ est la mesure markovienne multiplicative ν_r^∞ associée à r si et seulement si r est solution des équations de trafic (9).*

La preuve se résume ainsi : si $\mu^\infty = \nu_r^\infty$ alors la mesure ν_r^∞ est μ-stationnaire et les équations de trafic ne sont rien d'autre que la relation $\nu_r^\infty = \mu * \nu_r^\infty$ écrite pour les cylindres de longueur 1. Réciproquement, si r est solution des équations de trafic, alors les mesures ν_r^∞ et $\mu * \nu_r^\infty$ coïncident sur les cylindres de longueur 1, et plus généralement sur tous les cylindres, de sorte que la mesure ν_r^∞ est μ-stationnaire, donc est égale à μ^∞ par unicité de la mesure μ-stationnaire.

Le théorème suivant est notre résultat principal :

Théorème 2.3. *Soit $G = *_{i \in I} G_i$ le produit libre d'une famille finie d'au moins deux groupes finis tous non triviaux. On suppose que G n'est pas $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Soit μ une mesure de probabilité non dégénérée sur $\Sigma = \amalg_i G_i \backslash \{e_i\}$. Alors les équations de trafic (9) ont une unique solution $r \in \mathring{\mathcal{B}}$. La mesure harmonique μ^∞ de la marche aléatoire (G, μ) est la mesure markovienne multiplicative associée à r.*

Dans le cas où G est un groupe libre de type fini, la structure markovienne de la mesure harmonique est bien connue [14, 38, 56, 61]. La preuve que nous donnons dans [47] est plus simple que celle donnée dans le contexte plus général des paires 0-automatiques [44]. Proche dans l'esprit de celle de [14], elle a pour corollaire :

Corollaire 2.4. *Sous les hypothèses du théorème 2.3, on a*

$$\forall a \in \Sigma, \qquad P\{\exists n \mid X_n = a\} = r(a)/r(\Sigma\backslash\Sigma_a) = q(a)\ ,$$

où r est l'unique solution dans $\mathring{\mathcal{B}}$ des équations de trafic.

Le théorème 2.3 joint aux formules (2) et (4) donne :

Corollaire 2.5. *Sous les hypothèses du théorème 2.3, la vitesse de fuite et l'entropie de la marche aléatoire (G, μ) sont données par :*

$$\gamma \ = \ \sum_{a \in \Sigma} \mu(a) \big[-r(a^{-1}) + \sum_{b \in \Sigma\backslash\Sigma_a} r(b) \big] \tag{10}$$

$$\text{et } h \ = \ -\sum_{a \in \Sigma} \mu(a) \Big[\log\big[\frac{1}{q(a^{-1})}\big] r(a^{-1}) + \sum_{b \in \Sigma_a \backslash a^{-1}} \log\big[\frac{q(ab)}{q(b)}\big] r(b) + \log[q(a)] \sum_{b \in \Sigma\backslash\Sigma_a} r(b) \Big] \tag{11}$$

où r est l'unique solution dans $\mathring{\mathcal{B}}$ des équations de trafic.

Il résulte du corollaire 2.5 que, sous les hypothèses du théorème 2.3, la vitesse de fuite γ et l'entropie h dépendent de manière analytique de la mesure μ. François Ledrappier a généralisé cette propriété lorsque μ est une mesure sur le groupe libre $\mathbb{F}_d$ dont le support varie dans un sous ensemble fini fixé de $\mathbb{F}_d$ [39]. Sa démonstration s'adapte aisément au cas des produits libres de groupes finis.

Dans le cas d'une marche aléatoire au plus proche voisin dans un groupe libre de type fini, la mesure harmonique n'est *jamais* invariante par le shift, sauf dans le cas de la marche aléatoire simple correspondant à une mesure uniforme sur les générateurs. La situation est radicalement différente dans le cas des produits libres de groupes finis, puisqu'il peut arriver que la condition (8) soit satisfaite dans des cas non triviaux. Voici un exemple :

Proposition 2.6. *Soit H un groupe fini et $(G_i)_{i\in I}$ une famille finie de copies de H. Soit π_i un isomorphisme entre G_i et H. Soit ν une probabilité sur $H\backslash\{e_H\}$. Considérons le produit libre $G = \star_{i\in I} G_i$. Soit μ la mesure de probabilité sur $\Sigma = \amalg_i G_i\backslash\{e_i\}$ définie par : $\forall g \in G_i\backslash\{e_i\},\ \mu(g) = \nu \circ \pi_i(g)/|I|$. Alors la mesure harmonique de la marche aléatoire (G, μ) est invariante et ergodique pour le shift $\tau : \partial G \to \partial G, (\xi_n)_n \mapsto (\xi_{n+1})_n$.*

Par exemple, si $G = \mathbb{Z}/k\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/k\mathbb{Z} = \{1, a, ..., a^{k-1}\} * \{1, b, ..., b^{k-1}\}$ et si μ est une probabilité sur Σ non dégénérée telle que, pour $i \in \{1, ..., k-1\}$, $\mu(a^i) = \mu(b^i)$, alors μ^∞ est τ-invariante et ergodique.

Le cas du produit libre de *deux* groupes est également particulier :

Proposition 2.7. *Soit $G = G_1 \star G_2$ le produit libre de deux groupes finis et μ une probabilité non dégénérée sur $\Sigma = G_1\backslash\{e_1\} \amalg G_2\backslash\{e_2\}$. Alors la mesure harmonique μ^∞ est invariante et ergodique pour le carré du shift $\tau^2 : \partial G \to \partial G, (\xi_n)_n \mapsto (\xi_{n+2})_n$.*

2.3. **Exemple : le groupe modulaire.** Le groupe modulaire $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$ est isomorphe au produit libre $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} = \{1, a\} * \{1, b, b^2\}$. Une marche aléatoire au plus proche voisin est donnée par une probabilité μ sur $\Sigma = \{a, b, b^2\}$. Posons $\mu(a) = 1 - p - q, \mu(b) = p, \mu(b^2) = q$. Les équations de trafic s'écrivent

$$\begin{aligned}
r(a) &= (1-p-q)(r(b) + r(b^2)) + qr(b) + pr(b^2) \\
r(b) &= pr(a) + qr(b^2) + (1-p-q)\frac{r(a)r(b)}{r(b)+r(b^2)} \\
r(b^2) &= qr(a) + pr(b) + (1-p-q)\frac{r(a)r(b^2)}{r(b)+r(b^2)},
\end{aligned}$$

auxquelles se rajoute la condition $r(a) + r(b) + r(b^2) = 1$. La solution est

$$\begin{aligned}
r(a) &= \frac{p^2 + q^2 - 2pq - p - q + 4 - \Delta_1}{2\Delta_2} \\
r(b) &= \frac{q^3 - 3q^2 + p^2 q - 5pq + 2p + 6q - (2-q)\Delta_1}{2(q-p)\Delta_2} \\
r(b^2) &= \frac{p^3 - 3p^2 + pq^2 - 5pq + 6p + 2q - (2-p)\Delta_1}{2(p-q)\Delta_2},
\end{aligned}$$

où l'on a posé

$$\begin{aligned}
\Delta_1 &= \sqrt{p^4 + q^4 - 2p^3 - 2q^3 + 2p^2q^2 - 6p^2q - 6pq^2 + 5p^2 + 5q^2 + 6pq} \\
\Delta_2 &= p^2 + q^2 - pq - 2p - 2q + 4\,.
\end{aligned}$$

Posons $r = \mu(a) = 1 - p - q$. D'après le corollaire 2.5, la vitesse de fuite est donnée par

$$\begin{aligned}\gamma &= (1-p-q)[-r(a)+r(b)+r(b^2)] + p[-r(b)+r(a)] + q[-r(b^2)+r(a)] \\ &= \frac{2r\Big(pq-p-q+\sqrt{(p^2+q^2)(3+(r+p)^2+(r+q)^2)+2pq(2r+1)}\Big)}{(r+p)^2+(r+q)^2-pq+2}\,.\end{aligned} \tag{12}$$

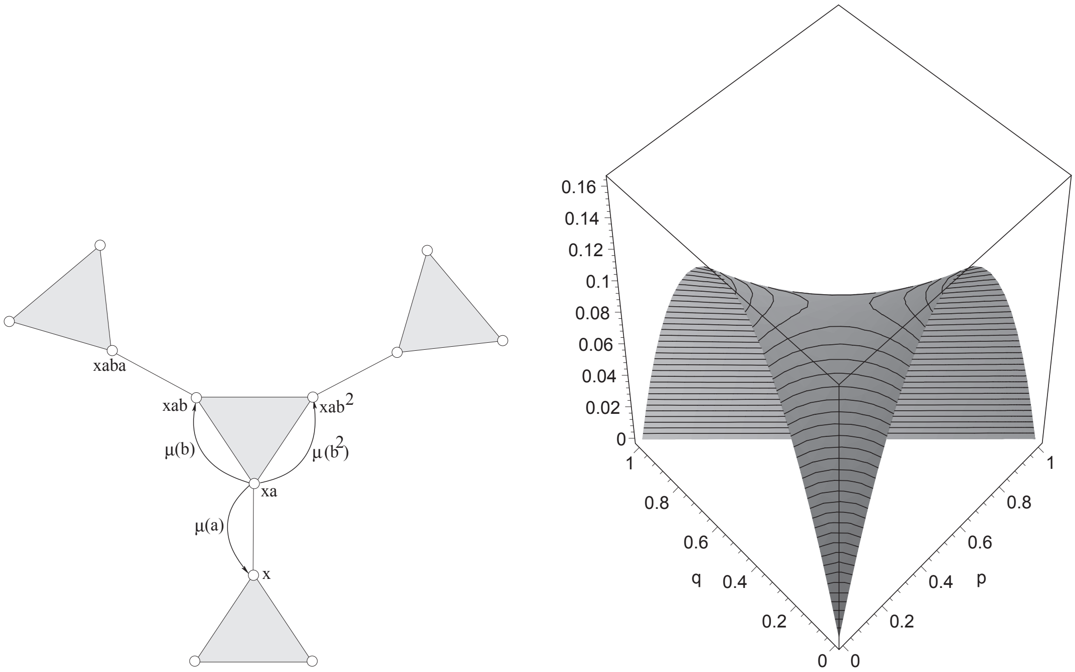

FIGURE 1. A gauche, une marche aléatoire au plus proche voisin sur $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. A droite, la vitesse de fuite de $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \star \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, \mu)$ en fonction de $p = \mu(b)$ et $q = \mu(b^2)$.

Les probabilités de visite des générateurs sont données par

$$q(a) = \frac{r(a)}{r(b)+r(b^2)}\ ,\ q(b) = \frac{r(b)}{r(a)} \ \text{ et } \ q(b^2) = \frac{r(b^2)}{r(a)}\,.$$

Enfin, l'entropie de la marche aléatoire vaut

$$\begin{aligned}h = \ & -(1-p-q)\Big[-r(a)\log\frac{r(b)+r(b^2)}{r(a)} + (r(b)+r(b^2))\log\frac{r(a)}{r(b)+r(b^2)}\Big] \\ & -p\left[r(b^2)\log\frac{r(a)}{r(b^2)} + r(b)\log\frac{r(b^2)}{r(b)} + r(a)\log\frac{r(b)}{r(a)}\right] \\ & -q\left[r(b)\log\frac{r(a)}{r(b)} + r(b^2)\log\frac{r(b)}{r(b^2)} + r(a)\log\frac{r(b^2)}{r(a)}\right]\,.\end{aligned} \tag{13}$$

2.4. **Générateurs extrémaux.** Soit G un groupe de type fini, S un système fini et symétrique de générateurs de G et $|\cdot|$ la métrique des mots associée à S. La croissance de G par rapport à S est

$$v = v(S) = \lim_n \frac{1}{n}\log \#\{g \in G, |g| \leq n\}\,. \tag{14}$$

La limite existe par sous-additivité. Si μ est une mesure de probabilité sur G admettant un premier moment $\sum_g |g|\mu(g)$ fini, alors la vitesse de fuite, l'entropie de la marche aléatoire (G,μ) et la croissance vérifient l'inégalité suivante, démontrée dans [26] et abondamment commentée dans [58] :

$$\frac{h}{\gamma} \leq v \,. \tag{15}$$

Cette inégalité, valable dans n'importe quel groupe de type fini et pour toute mesure ayant un premier moment fini, s'interprète ainsi : la proportion d'élements typiques de G visités par la marche aléatoire est inférieure ou égale au nombre total d'éléments. Dans le cas d'un produit libre de groupes finis, si $S = \Sigma$ le système de générateurs canoniques, alors h/γ et v sont aussi respectivement la dimension de Hausdorff de la mesure harmonique μ^∞ et la dimension de Hausdorff de $(\partial G, d)$.

Notons $\mathcal{S}$ l'ensemble des mesures de probabilités μ sur S, non dégénérées et symétriques (*i.e.* telles que $\mu(g^{-1}) = \mu(g)$). Sachant que h ne dépend que de μ, v que de S et γ de S et μ, on définit

$$Q(S) = \sup_{\mu \in \mathcal{S}} \frac{h(\mu)}{\gamma(S,\mu) v(S)} \;\leq\; 1 \,.$$

Observons que l'ensemble $\mathcal{S}$ n'est pas fermé ; son adhérence est l'ensemble des probabilités symétriques sur S.

A.Vershik a suggéré de considérer $Q(S)$ comme une mesure de la "qualité" de S comme système générateur de G. Si $Q(S) = 1$ alors S est *extrémal*. Par exemple, si G est un groupe libre de type fini et S le système de générateurs canoniques, alors on a $h/\gamma = v$ pour la mesure uniforme sur S, de sorte que S est extrémal. Si $G_1 * \cdots * G_m$ est un produit libre de groupes finis tous de même ordre et $S = \Sigma = \amalg_i G_i \backslash \{e_i\}$ alors, à nouveau, l'inégalité $h/\gamma \leq v$ est une égalité pour la mesure uniforme sur Σ [58], de sorte que Σ est extrémal. En revanche, lorsque les G_i n'ont pas tous le même ordre, l'existence d'une mesure μ donnant l'égalité $h/\gamma = v$ est non triviale :

Théorème 2.8. *Soit $G = G_1 * \cdots * G_m$ un produit libre de groupes finis, $\Sigma_i = G_i \backslash \{e_i\}$ et $k_i = |\Sigma_i|$. Soit $\Sigma = \amalg_i \Sigma_i$ le système générateur canonique de G. On note U_{Σ_i} la mesure de probabilité uniforme sur Σ_i.*

(1) *Supposons $m = 2$. Alors on a*

$$\frac{h(\mu)}{\gamma(\Sigma,\mu)} = v(\Sigma) \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, t \in]0,1[,\ \mu = (1-t)U_{\Sigma_1} + tU_{\Sigma_2} \,.$$

(2) *Supposons $m \geq 3$. Soit ρ l'unique racine positive de l'équation $\sum_{i=1}^m k_i/(x+k_i) = 1$. On a*

$$\frac{h(\mu)}{\gamma(\Sigma,\mu)} = v(\Sigma) \quad \Leftrightarrow \quad \mu = \sum_{i=1}^m \frac{k_i}{\rho + k_i} U_{\Sigma_i} \,.$$

En particulier, le système générateur Σ est extrémal.

Le fait que l'égalité $h/\gamma = v$ ait lieu pour les mesures mentionnées dans le théorème 2.8 est démontré dans [47] et cela implique l'extrémalité de Σ. Le fait ces mesures soient les seules pour lesquelles il y ait égalité a été démontré par V.Le Prince dans sa thèse [41, Chap. 3]. Sa preuve utilise de façon cruciale les équations de trafic et la structure markovienne multiplicative de la mesure harmonique. J'en propose un résumé à la fin de cette partie.

Illustrons cet énoncé à l'aide du groupe modulaire $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} = \{1, a\} * \{1, b, b^2\}$. Une mesure symétrique sur Σ est donnée par $\mu(b) = \mu(b^2) = p$ et $\mu(a) = 1 - 2p$. La solution des équations de trafic est donnée par

$$r(a) \;=\; \frac{1-p}{2-p} \text{ et } r(b) \;=\; r(b^2) \;=\; \frac{1}{2(2-p)} \,.$$

Les équations (12) et (13) permettent de calculer la vitesse de fuite et l'entropie de la marche aléatoire (G,μ). On trouve respectivement

$$\gamma = \frac{2p(1-2p)}{2-p} \text{ et } h = \frac{p(1-2p)\log 2}{2-p}.$$

On vérifie que $h/\gamma = (\log 2)/2 = v$.

Là encore, la situation est radicalement différente de celle des marches aléatoires au plus proche voisin sur les groupes libres de type fini, où l'égalité $h/\gamma = v$ n'a lieu que pour la mesure uniforme sur les générateurs canoniques.

Il est alors naturel de se poser la question suivante : si S est un système générateur d'un produit libre de groupes $G = G_1 * \cdots * G_m$ tel que $S \subsetneq \Sigma$, S est-il extrémal ? Voici trois exemples de comportements différents pour un produit libre de deux groupes finis $G_1 * G_2$.

Considérons d'abord le groupe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} = \{1,a\} * \{1,b,b^2,b^{-1}\}$. L'ensemble minimal de générateurs $S = \{a,b,b^{-1}\}$ est extrémal, mais $h/(\gamma v) < 1$ pour toute mesure $\mu \in \mathcal{S}$.

On considère maintenant le groupe $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$. L'ensemble minimal de générateurs $S = \{a,a^{-1},b,b^{-1}\}$ est extremal. Il existe une unique mesure de probabilité μ sur S telle que $h/\gamma = v$, donnée par $\mu = p\,(\delta_a + \delta_{a^{-1}}) + (1/2-p)(\delta_b + \delta_{b^{-1}})$ où $p = 0.432692\cdots$ est la deuxième racine réelle du polynôme $5x^3 - 13x^2 + 7x - 1$. Cette mesure μ appartient à $\mathcal{S}$.

Considérons enfin le groupe $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$. Le système générateur minimal $S = \{a,a^{-1},b,b^{-1}\}$ n'est pas extrémal. En fait,

$$Q(S) = \frac{5+\sqrt{5}}{4}\frac{\log\bigl(1/2+\sqrt{5}/2\bigr)}{\log(1+\sqrt{2})} = 0.987686\cdots.$$

Par ailleurs, V.Kaimanovich m'a communiqué une démonstration du théorème suivant :

Théorème 2.9. [32] *Soit $G = G_1 * \cdots * G_m$ un produit libre de groupes finis, soit $\Sigma_i = G_i \backslash \{e_i\}$ et $\Sigma = \amalg_i \Sigma_i$ le système générateur canonique de G. Soit $S = \amalg_i S_i \subset \Sigma$ un système générateur de G.*

- *Si $m \geq 3$ et si $S \subsetneq \Sigma$ alors pour toute mesure $\mu \in \mathcal{S}$ on a $h(\mu)/\gamma(S,\mu) < v(S)$.*
- *Si $m = 2$ et si $S_1 \subsetneq \Sigma_1$ et $S_2 \subsetneq \Sigma_2$ alors pour toute mesure $\mu \in \mathcal{S}$ on a $h(\mu)/\gamma(S,\mu) < v(S)$.*

Dans les deux cas couverts par le théorème 2.9, la question de savoir quand S est extrémal ou non est ouverte. Notons que, dans le cas $m = 2$, on peut avoir égalité même si $S \subsetneq \Sigma$, comme en atteste l'exemple de $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ mentionné précédemment.

2.5. Démonstration du théorème 2.8.

Soit $G = G_1 * \cdots * G_m$ un produit libre de groupes finis, $\Sigma_i = G_i \backslash \{e_i\}$ et $k_i = |\Sigma_i|$. Soit $\Sigma = \amalg_i \Sigma_i$ le système générateur canonique de G. Pour $u \in \Sigma$, on note $\overline{u} = i \in I$ si $u \in \Sigma_i$.

Rappelons qu'à toute fonction $r \in]0,1[^\Sigma$ de somme 1 on associe une chaîne de Markov (r, P_r) sur Σ de distribution initale r et dont la matrice P_r des probabilités de transition est donnée par (5). Cette chaîne de Markov est irréductible. L'espace des trajectoires de cette chaîne est ∂G, et la mesure markovienne sur ∂G associée à P_r est notée ν_r^∞. Elle est définie par les équations (6) et (7). La fonction r s'appelle la base de la mesure ν_r^∞. D'après le théorème 2.3, pour toute mesure non dégénérée μ sur Σ, il existe une unique base r telle que la mesure harmonique vérifie $\mu^\infty = \nu_r^\infty$.

L'idée de la preuve consiste à caractériser les probabilités de transition des mesures harmoniques μ^∞ correspondant aux mesures μ pour lesquelles $h/\gamma = v$. La première étape consiste à déterminer dans quelle mesure une matrice de transition P_r détermine sa base r. C'est là qu'apparaît la discussion sur le nombre de facteurs dans le produit libre :

Lemme 2.10. [41, Prop.3.1.1] *Soit $G = G_1 * \cdots * G_m$ un produit libre de m groupes finis.*

(1) *si $m \geq 3$ alors $P_r = P_{r'} \Leftrightarrow r = r'$;*

(2) *si $m = 2$ alors $P_r = P_{r'} \Leftrightarrow \exists\, t \in]0,1[$ tel que $r_{|\Sigma_1} = (1-t)r'_{|\Sigma_1}$ et $r_{|\Sigma_2} = t\, r'_{|\Sigma_2}$*

Considérons le shift $\tau : \partial G \to \partial G, (\xi_n)_n \mapsto (\xi_{n+1})_n$. La mesure harmonique μ^∞ n'est pas *a priori* τ-invariante. En revanche, il existe une unique probabilité ν sur ∂G, τ-invariante, et qui a les mêmes probabilités de transition que μ^∞. Cette mesure ν est définie, pour tout cylindre $[u_1 \cdots u_n]$, par $\nu([u_1 \cdots u_n]) = \pi(u_1)P_r(u_1,u_2)\cdots P_r(u_{n-1},u_n)$ où r est la base de la mesure ν_r^∞ telle que $\mu^\infty = \nu_r^\infty$ et π est la distribution stationnaire de la chaîne de Markov P_r sur Σ. Comme P_r est irréductible, la mesure ν est ergodique pour le shift τ.

Le système dynamique $(\partial G, \tau)$ est un sous-shift de type fini sur Σ. Sa matrice d'adjacence $A = [A_{u,v}]$ est définie par

$$A_{u,v} = \begin{cases} 1 \text{ si } \overline{u} \neq \overline{v} \\ 0 \text{ si } \overline{u} = \overline{v}. \end{cases}$$

On vérifie facilement que $\sum_{u,v} A_{u,v}^{n-1}$ est le nombre d'éléments de longueur n de G par rapport à Σ, de sorte que $v(\Sigma) = \log(\rho)$ où ρ est le rayon spectral de A. On note $\nu_{\max}$ la mesure d'entropie maximale du système $(\partial G, \tau)$ [43]. La proposition suivante constitue le cœur de la preuve du théorème 2.8 :

Proposition 2.11. [41, Prop.3.2.1] *La mesure μ vérifie $h(\mu)/\gamma(\Sigma,\mu) = v(\Sigma)$ si et seulement si la mesure harmonique μ^∞ a les mêmes probabilités de transition que la mesure $\nu_{\max}$.*

Démonstration. Rappelons que ∂G est muni de la distance d définie par $d(\xi_1,\xi_2) = e^{-|\xi_1 \wedge \xi_2|}$. Notons $\mathrm{HD}(\lambda)$ la dimension de Hausdorff d'une mesure borélienne λ sur $(\partial G, d)$. On a

$$\mathrm{HD}(\lambda) \;=\; \text{ess}\sup_{\xi} \liminf_{\varepsilon \to 0} \frac{\log \lambda[B(\xi,\varepsilon)]}{\log \varepsilon}$$

où le suprémum essentiel est pris par rapport à λ.

Par ailleurs, la mesure ν étant ergodique par rapport à τ, l'entropie du système $(\partial G, \tau, \nu)$ est donnée par la formule de Shannon-Breiman-MacMillan, de sorte que, pour ν-presque tout ξ, on a

$$h(\partial G, \tau, \nu) \;=\; \lim_n -\frac{1}{n}\log \nu[\xi_1 \cdots \xi_n] \;=\; \lim_n \frac{\log \nu[B(\xi, e^{-n})]}{\log e^{-n}} \;=\; \mathrm{HD}(\nu)\,.$$

La mesure μ^∞ vérifiant $\mu^\infty([u_1 \cdots u_n]) = r(u_1)P_r(u_1,u_2)\cdots P_r(u_{n-1},u_n)$, elle est équivalente à la mesure ν, donc ces deux mesures μ^∞ et ν ont même dimension de Hausdorff.

Si l'on note $h_{\text{top}}(\partial G, \tau)$ l'entropie topologique du système dynamique $(\partial G, \tau)$, alors on a :

$$h(\partial G, \tau, \nu) \;=\; \mathrm{HD}(\nu) \;=\; \mathrm{HD}(\mu^\infty) \;=\; \frac{h(\mu)}{\gamma(\Sigma,\mu)} \;\leq\; v(\Sigma) \;=\; h_{\text{top}}(\partial G, \tau) \;=\; h(\partial G, \tau, \nu_{\max})\,.$$

L'égalité $\mathrm{HD}(\mu^\infty) = h(\mu)/\gamma(\Sigma,\mu)$ est prouvée dans [38, théorème 4.15] dans le cas des groupes libres de type fini. On adapte aisément la démonstration au cas des produits libres de groupes finis. Les deux dernières égalités sont des résultats classiques de la théorie des sous-shifts de type fini [43]. On en déduit :

$$\begin{aligned} \frac{h(\mu)}{\gamma(\Sigma,\mu)} = v(\Sigma) \;&\Leftrightarrow\; h(\partial G,\tau,\nu) = h(\partial G,\tau,\nu_{\max}) \\ &\Leftrightarrow\; \nu = \nu_{\max} \quad \text{(par unicité de la mesure d'entropie maximale)} \\ &\Leftrightarrow\; \mu^\infty \text{ et } \nu_{\max} \quad \text{ont les mêmes probabilités de transition} \end{aligned}$$

ce qui achève la preuve de la proposition. □

Il reste à déterminer les probabilités de transition $p(u,v)$ de la mesure d'entropie maximale $\nu_{\max}$. On vérifie facilement qu'il existe un unique vecteur de probabilité $\varpi = (\varpi(u))_{u\in\Sigma}$ tel que $\varpi A = \rho\varpi$. Ce vecteur, constant sur chaque Σ_i, est donné par $\varpi(u) = \frac{1}{\rho+k_{\overline{u}}}$. En particulier, on a $\sum_{i=1}^m k_i/(\rho+k_i) = 1$. On a alors

$$p(u,v) = A_{u,v}\,\frac{1}{\rho}\,\frac{\varpi(v)}{\varpi(u)} = \frac{1}{\rho}\,\frac{\rho+k_{\overline{u}}}{\rho+k_{\overline{v}}} = \frac{\varpi(v)}{\varpi(\Sigma\backslash\Sigma_u)} \quad \text{si } \overline{u}\neq\overline{v} \text{ et } p(u,v) = 0 \quad \text{sinon}\,.$$

On a donc $p(u,v) = P_\varpi(u,v)$, de sorte que la mesure μ vérifie $h/\gamma = v$ si et seulement si la mesure harmonique μ^∞ est la mesure markovienne multiplicative de base ϖ. Il reste à déterminer μ à l'aide de la proposition 2.10 et des équations de trafic.

- Supposons $m \geq 3$. Dans ce cas, μ^∞ est la mesure markovienne multiplicative ν_ϖ^∞ de base ϖ. En reportant deans les équations de trafic qui sont linéaires en l'inconnue μ, on trouve $\mu(u) = \frac{1}{\rho+k_{\overline{u}}}$.

- Supposons $m = 2$. Dans ce cas, μ^∞ est une mesure markovienne multiplicative ν_r^∞ dont la base r est proportionnelle à ϖ, c'est-à-dire constante sur chaque Σ_i. À l'aide des équations de trafic on constate que μ est également constante sur chaque Σ_i de sorte que μ est de la forme $\mu = (1-t)U_{\Sigma_1} + tU_{\Sigma_2}$, ce qui termine la preuve du théorème 2.8.

Remarque 2.12. Lorsque $m = 2$, posons $\mu_t = (1-t)U_{\Sigma_1} + tU_{\Sigma_2}$ pour $t \in]0,1[$. Alors, pour tout t, la mesure harmonique μ_t^∞ a les mêmes probabilités de transition que la mesure $\nu_{\max}$, de sorte que la famille à un paramètre $\{\mu_t^\infty\}_{t\in\,]0,1[}$ est constituée de mesures harmoniques deux à deux équivalentes.

Remarquons toutefois que, même si $\mathrm{HD}(\mu_t^\infty) = \mathrm{HD}(\nu_{\max})$ pour tout $t \in]0,1[$, il existe une unique valeur de t pour la quelle $\mu_t^\infty = \nu_{\max}$, donnée par $t = k_2/(\rho+k_2)$. Comme $\rho = \sqrt{k_1k_2}$, on en déduit que

$$\mu^\infty = \nu_{\max} \quad\Leftrightarrow\quad \mu = \frac{\sqrt{k_1}}{\sqrt{k_1}+\sqrt{k_2}}\,U_{\Sigma_1} + \frac{\sqrt{k_2}}{\sqrt{k_1}+\sqrt{k_2}}\,U_{\Sigma_2}\,.$$

3. Le groupe de tresses B_3 et les groupes d'Artin diédraux

Un diagramme de tresses à d brins est la donnée de d courbes simples tracées dans $\mathbb{C}\times[0,1]$, joignant les points $(k,0), 1 \leq k \leq d$ aux points $(k,1), 1 \leq k \leq d$ et dont les images sont deux à deux disjointes. Une tresse à d brins est une classe d'isotopie de diagrammes de tresses. Sur l'ensemble B_d des tresses à d brins, on définit une loi de composition à partir de la concaténation des diagrammes de tresses. Cette loi fait de B_d un groupe, appelé groupe des tresses à d brins. E. Artin [2] a démontré que B_d admet pour présentation

$$B_d = \langle a_1,\ldots,a_{d-1} \mid \forall i,\; a_ia_{i+1}a_i = a_{i+1}a_ia_{i+1}, \quad \forall i,j, |j-1| > 1,\; a_ia_j = a_ja_i\rangle\,.$$

Le groupe B_1 est trivial, B_2 est isomorphe à $\mathbb{Z}$. Les groupes B_3 et B_4 ont pour présentations respectives $B_3 = \langle a,b \mid aba = bab\rangle$, et $B_4 = \langle a,b,c \mid aba = bab, bcb = cbc, ac = ca\rangle$.

Notons $S = \{a_1,\ldots,a_{d-1}\}$ l'ensemble des générateurs d'Artin de B_d. La tresse a_k est une tresse "élémentaire" échangeant les points k et $k+1$ de $\mathbb{C}$. La longueur d'une tresse $b \in B_d$ par rapport à

S est définie par $|b| = \min\{k, \exists s_1, ..., s_k \in S | b = s_1 \cdot ... \cdot s_k\}$. C'est le nombre minimal d'opérations élémentaires nécessaires pour dénouer la tresse b. C'est donc une façon de mesurer la complexité de b.

Considérons à présent une mesure de probabilité μ sur S. Soit $(X_n)_n$ une réalisation de la marche aléatoire droite de loi ν sur B_d, c'est-à-dire que l'on a $X_n = h_1 \cdot ... \cdot h_n$ où $(h_n)_n$ est une suite indépendante de variables aléatoires suivant toutes la loi μ. C'est un modèle de tresse aléatoire obtenue en effectuant des mouvements élémentaires successifs, indépendamment les uns des autres et suivant la loi μ. Il a été utilisé pour tenter de décrire l'enchevêtrement asymptotique d'objets tels que les polymères ou bien les molécules d'ADN [53, 54]. Etudier le comportement de $|X_n|$ quand n tend vers l'infini permet, via ce modèle, de rendre compte de la complexité asymptotique d'une tresse croissant de manière aléatoire. Considérons par exemple la vitesse de fuite $\gamma = \lim_{n\to+\infty} |X_n|/n \in]0, 1]$. C'est le taux de réduction asymptotique de la complexité d'une tresse aléatoire par rapport au nombre de mouvements élémentaires effectués pour la constituer.

Avec Jean Mairesse, nous nous sommes concentrés sur le cas du groupe de tresses à 3 brins $B_3 = \langle a, b \mid aba = bab\rangle$. Si μ est la mesure uniforme sur $S = \{a, b, a^{-1}, b^{-1}\}$, alors $\gamma = 1/4$ [54]. Dans [48], nous calculons la vitesse de fuite γ pour n'importe quelle marche aléatoire au plus proche voisin sur B_3, c'est-à-dire pour toute mesure μ supportée par S. Plus précisément, nous définissons un système de huit équations polynômiales de degré 2 à huit inconnues dont nous montrons qu'il admet une unique solution r. La vitesse γ s'exprime alors comme une combinaison linéaire des coefficients de r. Il est possible de simplifier et résoudre explicitement ou semi-explicitement ces équations polynômiales dans les deux cas de symétrie suivants :

Proposition 3.1. *Soit μ une mesure de probabilité sur B_3 à support dans $S = \{a, b, a^{-1}, b^{-1}\}$ et γ la vitesse de fuite de la marche aléatoire (B_3, μ).*

(1) *Supposons que $\mu(a) = \mu(a^{-1})$ et $\mu(b) = \mu(b^{-1})$. Alors $\gamma = p + (1 - 4p)u$ où $p = \mu(a) = \mu(a^{-1}) \in [0, 1/2]$ et u est la plus petite racine positive de l'équation*

$$2(4p - 1)u^3 + (24p^2 - 18p + 1)u^2 + p(7 - 12p)u + p(2p - 1) = 0\,.$$

(2) *Supposons que $\mu(a) = \mu(b)$ et $\mu(a^{-1}) = \mu(b^{-1})$. Alors*

$$\gamma = \max\left[1 - 4p, \frac{(1 - 2p)(-1 - 4p + \sqrt{5 - 8p + 16p^2})}{2(1 - 4p)}, \frac{p(-3 + 4p + \sqrt{5 - 8p + 16p^2})}{-1 + 4p}, -1 + 4p\right]$$

où $p = \mu(a) = \mu(b) \in [0, 1/2]$.

Soit (X_n) une réalisation de la marche aléatoire (B_3, μ). Le point de départ de la stratégie consiste à étudier la projection Y_n de la marche X_n sur le quotient B_3/Z de B_3 par son centre Z. Il est bien connu que B_3/Z est isomorphe au groupe modulaire $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Plus précisément, $B_3/Z \sim \langle u, v \mid u^2 = v^3 = 1\rangle$ avec $u = aba$ et $v = ab$. Le processus Y_n sur $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ n'est *pas* une marche aléatoire au plus proche voisin puisque par exemple $a = v^{-1}u$: Y_{n+1} est donc à distance 2 de Y_n dans le graphe de Cayley de $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, \{u, v, v^{-1}\})$. La situation est donc nettement différente de celle étudiée dans [47]. Elle nécessite notamment un changement de système de générateurs dans B_3/Z.

Dans le reste de cette partie, je commence (section 3.1) par quelques préliminaires sur le groupe B_3 et la forme normale de Garside de ses éléments. J'expose sommairement un *algorithme glouton* qui, appliqué à la forme normale de Garside d'un élément $g \in B_3$ fournit un représentant géodésique de celui-ci et permet donc d'en calculer la longueur. Dans la section 3.2, j'introduis plusieurs vitesses de fuite associées à une marche aléatoire sur B_3 : une vitesse le long du centre Z de B_3, une autre "transversalement" au centre, vitesses à partir desquelles on calcule γ. J'expliquerai le calcul dans le cas où μ est uniforme sur S. Si on suppose que la probabilité μ sur S vérifie $p = \mu(a) = 1/2 - \mu(b^{-1})$ et $q = \mu(b) = 1/2 - \mu(a^{-1})$ (ce qui englobe les deux cas de la proposition 3.1), alors γ est une fonction de p et q qui est représentée et commentée dans cette même section 3.2. Enfin, dans le prolongement de l'algorithme glouton, une analyse fine des géodésiques dans B_3 permet de calculer les séries de croissance sphériques et géodésiques de B_3 par rapport à S (section 3.3).

3.1. **Le groupe de tresses B_3.** Dans le groupe $B_3 = \langle a, b \mid aba = bab\rangle$, posons $\Delta = aba = bab$. On constate que $a\Delta = a(bab) = (aba)b = \Delta b$. De la même manière, on a $b\Delta = \Delta a$, $a^{-1}\Delta = \Delta b^{-1}$, $b^{-1}\Delta = \Delta a^{-1}$. Le centre de B_3 est précisément $Z = \langle\ \Delta^2\ \rangle = \{\Delta^{2k},\ k \in \mathbb{Z}\}$. Notons p le morphisme canonique $p : B_3 \to B_3/Z$.

Proposition 3.2. [21] *Posons $T = \{a, b, ab, ba\}$. Pour tout $g \in B_3$, il existe $g_1, \dots, g_m \in T$ et $k \in \mathbb{Z}$ tels que :*

$$g = g_1 g_2 \cdots g_m \Delta^k\ .$$

Si m est minimal, alors cette decomposition est unique. On note alors $m = m(g)$ et $k = k(g)$.

La décomposition - unique - correspondant à la valeur minimale de m s'appelle la *forme normale de Garside* de g. On note alors $m = m(g)$ et $k = k(g)$ (on pose $m(\Delta^k) = 0$). Il y a une caractérisation locale de la minimalité de m. Pour $g \in T$, on note $\mathrm{First}(g)$ et $\mathrm{Last}(g)$ la première et la dernière lettre de g. Alors $g_1 g_2 \cdots g_m \Delta^k$ est la forme normale de Garside de g si et seulement si $\mathrm{Last}(g_i) = \mathrm{First}(g_{i+1})$ pour $1 \le i \le m-1$.

La forme normale de Garside présente deux avantages décisifs pour l'étude, entre autres, des marches aléatoires sur B_3. Le premier est qu'elle n'est modifiée que localement lorsque g est multiplié à droite par un élément de S. Donnons quelques détails. Soit $g_1 g_2 \cdots g_m \Delta^k$ la forme normale de Garside d'un élément $g \in B_3$ tel que k soit pair et étudions la forme normale de $g \cdot a$. Comme Δ^k est central, $g \cdot a\ =\ g_1 \cdot \ldots \cdot g_m \cdot a \cdot \Delta^k$ et donc la forme de Garside est

$$g \cdot a = \begin{cases} g_1 \cdot \ldots \cdot g_m \cdot a \cdot \Delta^k & \text{si } \mathrm{Last}(g_m)\ =\ a \\ g_1 \cdot \ldots \cdot (g_m a) \cdot \Delta^k & \text{si } \mathrm{Last}(g_m)\ =\ b \text{ et } g_m a \neq \Delta \\ g_1 \cdot \ldots \cdot g_{m-1} \cdot \Delta^{k+1} & \text{si } g_m a\ =\ \Delta \end{cases} . \tag{16}$$

Décrivons à présent la forme normale de Graside de $g \cdot a^{-1}$. Comme $a^{-1}\ =\ \Delta^{-1}ab\ =\ ba\Delta^{-1}$, on a $g \cdot a^{-1}\ =\ g_1 \cdot \ldots \cdot g_m \cdot ba \cdot \Delta^{k-1}$ de sorte que

$$g \cdot a^{-1} = \begin{cases} g_1 \cdot \ldots \cdot g_m \cdot ba \cdot \Delta^{k-1} & \text{si } \mathrm{Last}(g_m)\ =\ b \\ g_1 \cdot \ldots \cdot (g_m a^{-1}) \cdot \Delta^k & \text{si } \mathrm{Last}(g_m)\ =\ a \text{ et } g_m\ \neq\ a \\ g_1 \cdot \ldots \cdot g_{m-1} \cdot \Delta^k & \text{si } g_m\ =\ a \end{cases} . \tag{17}$$

Le cas k impair se traite de la même manière, ainsi que les formes normales de Garside de $g \cdot b$ et $g \cdot b^{-1}$.

L'autre avantage de la forme normale de Garside d'un élément g est qu'elle permet d'obtenir un représentant géodésique de g par rapport à $S = \{a, b, a^{-1}, b^{-1}\}$ et donc d'en calculer la longueur. Plus précisément :

Proposition 3.3. *Soit $w = g_1 \cdot \ldots \cdot g_m \cdot \Delta^k$ la forme normale de Garside d'un élément $g \in B_3$.*

(1) *Si $k \ge 0$, alors w (vu comme mot sur $\{a, b\}$ en posant $\Delta = aba$) est un représentant géodésique de g par rapport S.*

(2) *Si $k < 0$, alors un représentant géodésique de g par rapport à S est obtenu de la façon suivante :*

   (a) *choisir* $\min(m, |k|)$ *éléments parmi $\{g_1, \dots, g_m\}$ de longueur maximale par rapport à $\{a, b\}$ (Il peut y avoir plusieurs choix possibles) ;*

   (b) *faire transiter les Δ^{-1} dans $g_1 \cdot \ldots \cdot g_m$ jusqu'aux éléments choisis en* (a) *;*

(c) *pour chaque élément u choisi en (a), remplacer $u\Delta^{-1}$ par $\widetilde{u}$, où $\widetilde{a} = b^{-1}a^{-1}, \widetilde{b} = a^{-1}b^{-1}, \widetilde{ab} = b^{-1}, \widetilde{ba} = a^{-1}$.*

Illustrons cet *algorithme glouton* sur quelques exemples. Dans ce qui suit, le membre de gauche est une forme normale de Garside et le membre de droite un représentant géodésique par rapport à S du même élément (rappel : $a\Delta^{-1} = \Delta^{-1}b,\ b\Delta^{-1} = \Delta^{-1}a$) :

$$\begin{array}{lll} a \cdot ab \cdot b \cdot \Delta & \longrightarrow & a \cdot ab \cdot b \cdot aba \\ a \cdot ab \cdot b \cdot \Delta^{-1} & \longrightarrow & a \cdot b^{-1} \cdot a \\ a \cdot ab \cdot b \cdot \Delta^{-2} & \longrightarrow & a \cdot b^{-1} \cdot b^{-1}a^{-1} \quad \text{ou} \quad b^{-1}a^{-1} \cdot a^{-1} \cdot b \\ a \cdot ab \cdot b \cdot \Delta^{-4} & \longrightarrow & b^{-1}a^{-1} \cdot a^{-1} \cdot a^{-1}b^{-1} \cdot a^{-1}b^{-1}a^{-1}\,. \end{array}$$

3.2. **Marches aléatoires dans B_3.** Considérons une réalisation $(X_n)_n$ de la marche aléatoire (B_3, μ) où μ est une mesure de probabilité non dégénérée sur $S = \{a, b, a^{-1}, b^{-1}\}$. Une telle marche aléatoire est transiente car B_3 est à croissance exponentielle.

Ecrivons la forme normale de Garside de X_n sous la forme $X_n = Y_n\Delta^{k_n}$. Ainsi $m(X_n) = |Y_n|_T$ et $k(X_n) = k_n$. D'après le théorème ergodique sous-additif de Kingman, il existe deux réels $\gamma_T \in (0, 1)$ et $\gamma_\Delta \in (-1, 1)$ tels que

$$\gamma_T = \lim_{n\to\infty} \frac{m(X_n)}{n} \quad \textit{et} \quad \gamma_\Delta = \lim_{n\to\infty} \frac{k(X_n)}{n} \quad \text{p.s. et dans } L^1\,.$$

L'interprétation de ces limites est la suivante : γ_Δ est la vitesse de fuite de X_n le long du centre Z de B_3, et γ_T est la vitesse de fuite transversalement au centre.

Il existe une relation non triviale entre γ_T et γ_Δ lorsque la mesure μ est symétrique (*i.e.* $\mu(a) = \mu(a^{-1})$ et $\mu(b) = \mu(b^{-1})$), à savoir : $2\gamma_\Delta + \gamma_T = 0$ Cette relation résulte du fait que $m(g^{-1}) = m(g)$ et $k(g^{-1}) + k(g) + m(g) = 0$, que l'on vérifie facilement en comparant les formes normales de Garside de g et g^{-1}.

A titre d'exemple, calculons les vitesses de fuite γ_T, γ_Δ et γ dans le cas de la marche aléatoire simple sur B_3, c'est-à-dire lorsque μ est uniforme sur $S = \{a, b, a^{-1}, b^{-1}\}$. Si $g_1g_2\cdots g_m\Delta^k$ est la forme normale de Garside d'un élément $g \in B_3$, on note $\mathrm{Last}(g) = \mathrm{Last}(g_m)$ et $\mathrm{End}(g) = g_m$. Il résulte de (16) et (17) que l'espérance de $m(X_n \cdot a)$ vérifie :

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{E}\, m(X_n \cdot a) & = & \mathbf{E}\, m(X_n) \;+\; \mathbf{P}\{\mathrm{Last}(X_n) = a \text{ et } k_n \text{ est pair}\} \\ & & \phantom{\mathbf{E}\, m(X_n)} \;+\; \mathbf{P}\{\mathrm{Last}(X_n) = b \text{ et } k_n \text{ est impair}\} \\ & & \phantom{\mathbf{E}\, m(X_n)} \;-\; \mathbf{P}\{\mathrm{End}(X_n) = ab \text{ et } k_n \text{ est pair}\} \\ & & \phantom{\mathbf{E}\, m(X_n)} \;-\; \mathbf{P}\{\mathrm{End}(X_n) = ba \text{ et } k_n \text{ est impair}\} \\ & & \phantom{\mathbf{E}\, m(X_n)} \;+\; \mathbf{P}\{m(X_n) = 0\}\,. \end{array}$$

Il y a des expressions analogues pour $\mathbf{E}\, m(X_n \cdot b)$, $\mathbf{E}\, m(X_n \cdot a^{-1})$ et $\mathbf{E}\, m(X_n \cdot b^{-1})$. Au final, on obtient

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\, m(X_{n+1}) &= \frac{1}{4} \sum_{s\in S} \mathbf{E}\, m(X_n \cdot s) \\ &= \mathbf{E}\, m(X_n) + \frac{1}{4} \mathbf{P}\{m(X_n) \geq 1\} + \mathbf{P}\{m(X_n) = 0\}\,. \end{aligned}$$

Puisque la marche au hasard est transiente, on trouve

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\, m(X_{n+1}) - \mathbf{E}\, m(X_n) = \frac{1}{4} \tag{18}$$

On en déduit, avec le lemme de Cesaro :

$$\gamma_T \;=\; \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\,\mathbf{E}\, m(X_n) \;=\; \frac{1}{4} \tag{19}$$

Comme la mesure uniforme est symétrique, $\gamma_\Delta \;=\; -\dfrac{\gamma_T}{2} \;=\; -\dfrac{1}{8}$.

On calcule γ à l'aide de la proposition 3.3. Si $g_1 g_2 \cdots g_m \Delta^k$ est la forme normale de Garside d'un élément $g \in B_3$, on note $|g|_1 = \#\{i, g_i = a \text{ ou } b\}$ et $|g|_2 = \#\{i, g_i = ab \text{ ou } ba\}$ de sorte que $m(g) = |g|_1 + |g|_2$. On note aussi $\gamma_1 = \lim_n |X_n|_1/n$ et $\gamma_2 = \lim_n |X_n|_2/n$ de sorte que $\gamma_T = \gamma_1 + \gamma_2$. On vérifie que si $\mu(a) = \mu(a^{-1})$ et $\mu(b) = \mu(b^{-1})$, alors $\gamma_1 = \gamma_2$, donc $\gamma_\Delta = -\gamma_2$. Dans le cas où μ est uniforme sur S, la forme normale de Garside de X_n comporte donc, asymptotiquement et presque sûrement, $n/8$ éléments a ou b, $n/8$ éléments ab ou ba (pour la partie suivant T) et $n/8$ facteurs Δ^{-1}. Suivant la proposition 3.3, les $n/8$ facteurs Δ^{-1} se simplifient avec les $n/8$ éléments ab ou ba pour donner $n/8$ éléments a^{-1} ou b^{-1}. Au final, on obtient un représentant géodésique de X_n comportant approximativement $n/8$ éléments a ou b et $n/8$ éléments a^{-1} ou b^{-1}, de sorte que $|X_n| \sim n/4$, d'où $\gamma = 1/4$.

L'exemple que l'on vient de décrire met en évidence un phénomène de compétition avec le centre lorsqu'on cherche à exprimer γ en fonction de γ_T et γ_Δ. Ce phénomène explique la non différentiabilité de γ en fonction de p dans le cas (ii) de la proposition 3.1. Plus généralement, si on suppose que la probabilité μ sur S vérifie $p = \mu(a) = 1/2 - \mu(b^{-1})$ et $q = \mu(b) = 1/2 - \mu(a^{-1})$ alors γ est une fonction de p et q dont le graphe est représenté sur la figure 2. Les lignes de non différentiabilité apparaissent nettement.

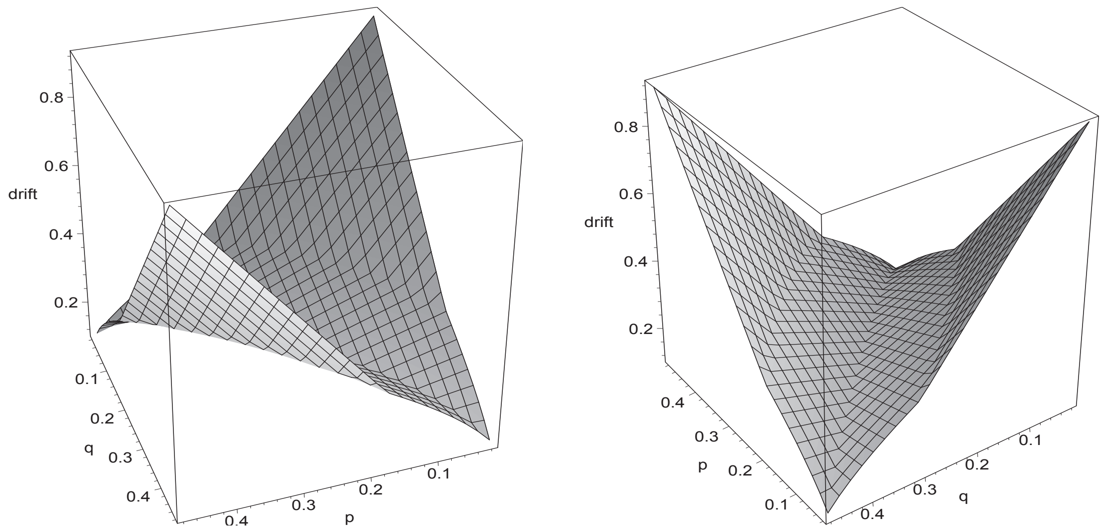

FIGURE 2. La vitesse γ en fonction de $p = \mu(a) = 1/2 - \mu(b^{-1})$ et $q = \mu(b) = 1/2 - \mu(a^{-1})$.

L'énoncé suivant est une conséquence directe de [48, Théorème 4.3] :

Proposition 3.4. *Lorsque μ décrit l'ensemble des mesures de probabilités sur $S = \{a, b, a^{-1}, b^{-1}\}$, la vitesse de fuite γ de la marche aléatoire dans $B_3 = \langle a, b | aba = bab\rangle$ est une fonction lipschitzienne non différentiable de μ.*

Nous ignorons la régularité de la dépendance de l'entropie asymptotique h en fonction de μ. Récemment, François Ledrappier a montré que, dans le cas d'un groupe hyperbolique G, la vitesse de fuite et l'entropie sont des fonctions lipschitziennes de μ lorsque le support de μ varie dans un ensemble fini fixé de G [40].

3.3. **Les groupes d'Artin diédraux : vitesse, séries de croissance.** Il y a deux façons de généraliser le groupe de tresse B_3. La première consiste à considérer la famille des groupes de tresses B_d à d brins. La seconde, plus accessible à nos techniques, fait appel à la famille des groupes d'Artin diédraux A_k.

Notons $\mathrm{prod}(u, v; k) = uvu\cdots$, avec k lettres dans le membre de droite. Pour $k \geq 1$, le groupe d'Artin A_k de type diédral $I_2(k)$ et l'ensemble des générateurs d'Artin S sont définis par :

$$A_k = \langle a, b \mid \mathrm{prod}(a, b; k) = \mathrm{prod}(b, a; k)\rangle, \qquad S = \{a, b, a^{-1}, b^{-1}\} . \tag{20}$$

On a $A_1 = \mathbb{Z}$, $A_2 = \mathbb{Z}^2$, $A_3 = B_3$ et $A_4 = \langle a, b \mid abab = baba\rangle$. Les techniques développées par Jean Mairesse et moi dans l'article [46] s'adaptent *mutatis mutandis* aux groupes d'Artin diédraux A_k pour $k \geq 3$. Par exemple, dans A_k, la proposition 3.2 est encore vraie à condition de poser $\Delta = \mathrm{prod}(a, b; k) = \mathrm{prod}(b, a; k)$ et $T = \{\mathrm{prod}(a, b; j), \mathrm{prod}(b, a; j), 1 \leq j \leq k - 1\}$. Ainsi, nous pouvons calculer la vitesse pour la marche aléatoire simple dans (A_k, S) [48] :

	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8
γ	$1/4$	$(\sqrt{5}-1)^2/4$	$(\sqrt{13}-1)^2/16$	0.462598...	0.475221...	0.487636...

Une utilisation approfondie de l'algorithme glouton (cf prop. 3.3) dans le cadre des groupes d'Artin diédraux nous a permis de calculer les séries de croissance sphériques et géodésiques dans ces groupes, relativement au système générateur d'Artin S, et ce pour tout $k \geq 3$ [46].

Précisons ces notions de séries de croissance sphériques et géodésiques dans les groupes. Soit $(G, *)$ un groupe de type fini. Soit $S \subset G$ un système générateur fini de G ne contenant pas l'identité e et symétrique ($S = S^{-1}$). Notons S^* le monoïde libre sur S et $\pi : S^* \to G$ le morphisme canonique qui, au mot $a_1 \cdots a_k \in S^*$ associe l'élément $a_1 * \cdots * a_k$ de G. Un mot $w \in \pi^{-1}(g)$ est un *representant* de g. La longueur $|w|_S$ d'un mot $w \in S^*$ est égal à son nombre de lettres. La longueur par rapport à S d'un élément $g \in G$ est :

$$|g|_S = \min\{k \mid g = s_1 * \cdots * s_k, s_i \in S\} . \tag{21}$$

Un représentant w de g est *géodésique* si $|w|_S = |g|_S$.

La *série de croissance sphérique de G par rapport à S* est la série formelle $\mathcal{S}(G, S) \in \mathbb{N}[[x]]$ definie par :

$$\mathcal{S}(G, S) = \sum_{g\in G} x^{|g|_S} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \#\{g \in G \mid |g|_S = n\}\ x^n . \tag{22}$$

La *série de croissance géodésique de G par rapport à S* est la série $\mathcal{G}(G, \Sigma) \in \mathbb{N}[[x]]$ definie par :

$$\mathcal{G}(G, S) = \sum_{g\in G} \#\{u \in \pi^{-1}(g) \mid |u|_S = |g|_S\}\ x^{|g|_S} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \#\{w \in S^* \mid |w|_S = |\pi(w)|_S = n\}\ x^n . \tag{23}$$

Exemple 3.5.
(1) Si $G = \mathbb{F}(a, b)$ et $S = \{a, b, a^{-1}, b^{-1}\}$ alors on a $\#\{g, |g| = n\} = 4 \cdot 3^{n-1}$ donc $\mathcal{S}(G, S) = \mathcal{G}(G, S) = \frac{1+x}{1-3x}$.
(2) Si $G = \mathbb{Z}^d$ et S est la base canonique alors $\mathcal{S}(G, S) = \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^d$.
(3) Si G est un groupe hyperbolique au sens de Gromov alors, pour tout système de générateurs S, les séries de croissance $\mathcal{S}(G, S)$ et $\mathcal{G}(G, S)$ sont rationnelles [24].

(4) Dans le groupe de Heisenberg H_4, il existe deux systèmes de générateurs S et T tels que $\mathcal{S}(H_4, S)$ est rationnelle et $\mathcal{S}(H_4, T)$ ne l'est pas [57].

Notons $L = \{w \in S^*, |w|_S = |\pi(w)|_S\}$ l'ensemble des mots géodésiques. Si le langage L est reconnaissable par un automate, alors la série $\mathcal{G}(G, S)$ est rationnelle. Si L est une section de π alors la série $\mathcal{S}(G, S)$ est rationnelle.

L'automate que nous utilisons dans [46] pour reconnaître le langage L dans A_k repose sur la description suivante des mots géodésiques. Pour $u \in \mathbb{F}(S)$, on note $\mathrm{Pos}(u)$ la longueur du plus long élément de $T \cup \{\Delta\}$ - *i.e.* son nombre de lettres - que l'on peut obtenir en multipliant des lettres consécutives de u, et $\mathrm{Neg}(u)$ la longueur du plus long élément de $T^{-1} \cup \{\Delta^{-1}\}$ que l'on peut obtenir de la même manière.

Proposition 3.6. *Soit $u \in \mathbb{F}(S)$ un mot librement réduit sur S représentant un élément $g \in A_k$.*

(1) *Si $Pos(u) + Neg(u) < k$, alors u est l'unique représentant géodésique de g.*
(2) *Si $Pos(u) + Neg(u) = k$, alors u est géodésique, mais g admet plusieurs représentants géodésiques.*
(3) *Si $Pos(u) + Neg(u) > k$, alors u n'est pas géodésique.*

Illustrons cet énoncé sur quelques exemples. On se place dans A_3.

(1) Soit $u = ab^{-1}aab^{-1} = a \cdot b^{-1} \cdot a \cdot a \cdot b^{-1}$. Alors $\mathrm{Pos}(u) + \mathrm{Neg}(u) = 2$ et u est l'unique représentant géodésique de $g = ab^{-1}a^2b^{-1} \in A_3$.
(2) Soit $u = ab^{-1}aab = a \cdot b^{-1} \cdot a \cdot ab$. Alors $\mathrm{Pos}(u) + \mathrm{Neg}(u) = 3$ et u est un représentant géodésique de $g = ab^{-1}a^2b \in A_3$. Or on a, dans A_3,

$$g = a \cdot b^{-1} \cdot a \cdot ab = a \cdot b^{-1} \cdot a \cdot \Delta a^{-1} = a \cdot b^{-1} \cdot \Delta b \cdot a^{-1} = a \cdot ab \cdot b \cdot a^{-1} = a^2b^2a^{-1}$$

de sorte que $v = aabba^{-1}$ est un autre représentant géodésique de g.
(3) Soit $u = a^{-1}b^{-1}aab = (ba)^{-1} \cdot a \cdot ab$. Alors $\mathrm{Pos}(u) + \mathrm{Neg}(u) = 4$ et u n'est pas géodésique. En effet, dans A_3, on a :

$$a^{-1}b^{-1}aab = (ba)^{-1} \cdot a \cdot ab = (ba)^{-1} \cdot a \cdot \Delta a^{-1} = (ba)^{-1}\Delta b \cdot a^{-1} = b \cdot b \cdot a^{-1} = b^2a^{-1}.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $X_n \in \mathbb{N}[x]$ le polynôme défini par : $X_0 = 0$ et, $\forall n \geqslant 1$,

$$X_n = x + x^2 + \cdots + x^n . \tag{24}$$

Théorème 3.7. *Considérons le groupe d'Artin A_k de type diédral $I_2(k)$ et l'ensemble S des générateurs d'Artin. Les séries de croissance géodésiques et sphériques sont données par :*

$$\mathcal{G}(A_k, S) = \sum_{I,J\geqslant 1, I+J=k} \frac{1 + X_I + X_J}{1 - X_I - X_J} - \sum_{I,J\geqslant 1, I+J=k-1} \frac{1 + X_I + X_J}{1 - X_I - X_J} + 2\frac{1}{1-2x} - 2\frac{1 + X_{k-1}}{1 - X_{k-1}} \tag{25}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(A_k, S) = & \sum_{I,J\geqslant 1, I+J=k-1} \frac{1 + X_I + X_J}{1 - X_I - X_J} - \sum_{I,J\geqslant 1, I+J=k-2} \frac{1 + X_I + X_J}{1 - X_I - X_J} + 2\frac{1 + X_{k-1}}{1 - X_{k-1}}\frac{1}{1-x^k} \\ & - 2\frac{1 + X_{k-2}}{1 - X_{k-2}} + \sum_{I,J\geqslant 1, I+J=k} \frac{2x^k}{(1 - X_{I-1} - X_{J-1})(1 - X_{I-1} - X_J)(1 - X_I - X_{J-1})} \end{aligned} \tag{26}$$

En particulier, pour A_3 et A_4, on a :

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}(A_3,S) &= 1 + \frac{4x}{(1-x-x^2)(1-2x-x^2)} \\
\mathcal{S}(A_3,S) &= 1 + \frac{2x(2-2x-x^2)}{(1-x)(1-2x)(1-x-x^2)} \\
\mathcal{G}(A_4,S) &= 1 + \frac{4x(1-x)(1+x)(1-6x+10x^2-x^3-3x^4-5x^5-2x^6-x^7)}{(1-2x)(1-2x-x^2)(1-2x-2x^2)(1-x-x^2-x^3)(1-2x-x^2-x^3)} \\
\mathcal{S}(A_4,S) &= 1 + \frac{4x(1-x-x^2)(1-2x-x^3)}{(1-x)(1-x-x^2-x^3)(1-2x-x^2)^2} .
\end{aligned}$$

Par exemple, $\mathcal{G}(A_4,S) = 1 + 4\,x + 12\,x^2 + 36\,x^3 + 108\,x^4 + 308\,x^5 + 868\,x^6 + 2420\,x^7 + O(x^8)$ et $\mathcal{S}(A_4,S) = 1 + 4\,x + 12\,x^2 + 36\,x^3 + 100\,x^4 + 268\,x^5 + 708\,x^6 + 1848\,x^7 + O(x^8)$. Les formules pour A_3 étaient déjà connues [55]. Celles pour A_k, $k \geq 4$ sont nouvelles.

La formule (26) permet de calculer le taux de croissance du volume des sphères dans le graphe de Cayley de (A_k, S). On a :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \#\{g \in A_k \,\big|\, |g|_S \;=\; n\} \;=\; \log(\rho_k)\,, \tag{27}$$

où $\rho_3 = 2$, et où, pour $k \geq 4$, ρ_k est l'inverse du plus petit module des racines de $1 - 2x - x^2 - \cdots - x^{k-2}$. Par exemple, $\rho_4 = \sqrt{2} + 1$.

Signalons qu'on ignore toujours si la série sphérique $\mathcal{S}(B_4, S)$ est rationnelle ou non.

Pour terminer, je mentionne deux travaux qui utilisent notre description des géodésiques de A_k. Dans [60], C.Walsh étudie la compactification par les horofonctions des groupes A_k. À l'aide des algorithmes définis dans [46], il obtient une formule pour la métrique des mots par rapport aux générateurs d'Artin S, ce qui lui permet de décrire l'horobord de A_k. Dans [29], S.Hermiller, D.Holt et S.Rees définissent la notion de groupe localement testable (*locally testable groups*) et montrent que cette classe de groupes contient les groupes d'Artin A_k.

4. Marches aléatoires sur certaines extensions du groupe libre

Lorsqu'on dispose d'une notion de bord ou de compactification B associée à un groupe de type fini G, il est naturel de s'interroger sur la stabilité de cet objet B quand on considère un sous-groupe ou une extension de G. Par exemple, si G est un groupe hyperbolique au sens de Gromov et G^0 un sous-groupe de G d'indice fini alors les bords hyperboliques ∂G et ∂G^0 sont homéomorphes.

Dans le cas du bord de Poisson, on considère non pas des groupes, mais des groupes mesurés (G,μ). Une question qui se pose est alors : étant donné un sous-groupe G^0 d'un groupe G et une probabilité μ sur G, existe-t'il une probabilité μ^0 sur G^0 telles que les bords de Poisson de (G,μ) et (G^0,μ^0) soient isomorphes ? Furstenberg apporte la réponse suivante :

Lemme 4.1. [19, lemme 4.2] *Soit G un groupe de type fini, μ une probabilité sur G et G^0 un sous-groupe de G récurrent pour la marche aléatoire X_n sur G de loi μ. Soit $T = \min\{n \geq 1, X_n \in G^0\}$ le premier temps de retour de X_n dans G^0, X_T la position de la marche aléatoire lors de son premier retour dans G^0 et μ^0 la loi de X_T. Alors μ^0 est une probabilité sur G^0 telle que les espaces de fonctions harmoniques $H^\infty(G,\mu)$ et $H^\infty(G^0,\mu^0)$ soient isomorphes, de sorte que les bords de Poisson de (G,μ) et (G^0,μ^0) sont isomorphes.*

Par exemple, supposons que G^0 soit un sous-groupe normal de G et que μ soit une mesure sur G telle que la marche aléatoire sur G se projette en une marche aléatoire récurrente sur le quotient G/G^0. Alors l'identité de G/G^0 est un état récurrent, de sorte que G^0 est un ensemble récurrent dans G. C'est en particulier le cas si G est une extension finie de G^0 (*i.e.* $G^0 \triangleleft G$ et $[G : G^0] < \infty$). De plus, on a dans ce cas un certain contrôle sur la mesure μ^0. En effet, Kaimanovich a montré que si G^0 est un sous-groupe d'indice fini de G et si μ a un premier moment $\sum_g |g|\mu(g)$ fini, alors μ^0 a également un premier moment fini [33, lemme 2.3].

Supposons par exemple que G soit une extension finie d'un groupe libre de type fini G^0. Soit μ une mesure sur G ayant un premier moment fini. Comme la mesure μ^0 sur G^0 a également un premier moment fini, il existe une unique mesure λ sur ∂G^0 qui soit μ^0-stationnaire et telle que le bord de Poisson de (G^0, μ^0) soit $(\partial G^0, \lambda)$ [34, 35, 38]. Par ailleurs l'action de G sur G^0 par automorphismes intérieurs s'étend en une action par homéomorphismes sur ∂G^0 qui prolonge l'action usuelle par multiplication à gauche de G^0. La mesure λ est μ-stationnaire et $(\partial G^0, \lambda)$ est le bord de Poisson de (G, μ) (voir la preuve de [22, théorème 2.5]).

Considérons à présent le cas d'une extension cyclique : G^0 est un sous-groupe normal dans G tel que $G/G^0 \sim \mathbb{Z}$. Si la mesure image de μ sur $\mathbb{Z}$ définit une marche aléatoire récurrente sur $\mathbb{Z}$ et si μ^0 est la mesure de premier retour sur G^0 alors les bords de Poisson de (G, μ) et (G^0, μ^0) sont isomorphes. Par exemple, si G^0 est abélien, alors le bord de Poisson de (G^0, μ^0) est trivial [10], donc le bord de Poisson de (G, μ) également. En revanche, si G^0 est un groupe libre de type fini alors on ne peut rien dire au premier abord sur le bord de Poisson de (G^0, μ^0) car la mesure μ^0 est potentiellement très étalée et ne possède *a priori* pas de moment, même logarithmique, et ce y compris lorsque μ est à support fini sur G.

4.1. **Extensions cycliques du groupe libre.** Soit F un groupe libre de type fini et G un groupe de type fini contenant F comme sous-groupe normal. Rappelons que l'action de G sur F par automorphismes intérieurs s'étend en une action par homéomorphismes sur le bord géométrique ∂F de F, et que pour toute mesure non dégénérée μ sur G, il existe une unique mesure μ-stationnaire λ sur ∂F et $(\partial F, \lambda)$ est une μ-frontière de (G, μ) [59]. La question est donc de trouver des conditions sur G et μ garantissant que $(\partial F, \lambda)$ *est* le bord de Poisson tout entier. Le cas des extensions finies étant réglé, l'étape suivante consiste à étudier le cas des extensions cycliques. Dans l'article [22], François Gautero et moi démontrons le

Théorème 4.2. *Soit G une extension cyclique d'un groupe libre de type fini F, et μ une mesure de probabilité non dégénérée sur G ayant un premier moment $\sum_g |g|\mu(g)$ fini. Alors il existe une unique probabilité μ-stationnaire λ sur ∂F et le G-espace $(\partial F, \lambda)$ est le bord de Poisson de (G, μ).*

Notons qu'il résulte de ce théorème que $(\partial F, \lambda)$ est aussi le bord de Poisson de (F, μ^0).

Ce théorème fournit donc une réponse lorsque G est une extension cyclique du groupe libre F. Dans ce cas, il existe une suite exacte courte $\{1\} \to F \to G \to \mathbb{Z} \to \{0\}$. Une telle extension est bien entendu scindée : il existe un automorphisme α de F tel que G est isomorphe au produit semi-direct $F \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$. Bien sûr, le bord de Poisson est déjà connu si α est un automorphisme intérieur de F. En effet, dans ce cas, G est isomorphe au produit direct $F \times \mathbb{Z}$. Par conséquent, puisque $\mathbb{Z}$ est central, il agit trivialement sur le bord de Poisson de G qui s'identifie au bord de Poisson de $G/\mathbb{Z} \sim F$ [31].

Il y a deux types de croissance pour un automorphisme d'un groupe de type fini : croissance polynômiale et croissance exponentielle. Ceci fait référence à la croissance des itérés d'un élément donné sous l'action de l'automorphisme. Dans le cas d'un automorphisme α d'un groupe libre de type fini F, il y a une dichotomie [7, 42] :

- ou bien α est à croissance polynômiale, *i.e.* $|\alpha^n(g)|$ croît polynomialement pour tout $g \in F$,

- ou bien α est à croissance exponentielle, *i.e.* il existe $g \in F$ tel que $|\alpha^n(g)|$ croisse exponentiellement.

Si l'automorphisme α est à croissance exponentielle, alors le groupe $G = F \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$ est hyperbolique relativement à la famille $\mathcal{H}$ des sous-groupes à croissance polynômiale [23], de sorte que son bord de Poisson peut être identifié avec son bord relativement hyperbolique $\partial^{RH}(G, \mathcal{H})$ (voir [22, Prop. 10.1]). Néanmoins, cette réponse n'est pas totalement satisfaisante pour nous car elle ne dit rien de ∂F par rapport au bord de Poisson de G.

Dans [22], nous proposons plusieurs généralisations du théorème 4.2. Partant de $G = F \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$, on peut aller dans deux directions : remplacer le groupe libre F par un groupe hyperbolique plus général ou bien remplacer le groupe qui opère, ici $\mathbb{Z}$, par un groupe de type fini d'automorphismes de F.

4.2. **Extensions non cycliques du groupe libre.** Le fait est que nous savons traiter le cas de certaines extensions non cycliques, mais avec une restriction sur la croissance des automorphismes. Dans l'énoncé qui suit, on note $\mathrm{Out}(F) = \mathrm{Aut}(F)/\mathrm{Inn}(F)$ le groupe des automorphismes extérieurs de F, $\mathrm{Inn}(F)$ désignant le groupe des automorphismes intérieurs.

Théorème 4.3. *Soit G un produit semi-direct $G = F \rtimes_\theta \mathcal{P}$ d'un groupe libre de type fini F par un groupe de type fini $\mathcal{P}$ via un morphisme injectif $\theta\colon \mathcal{P} \to \mathrm{Aut}(F)$ tel que $\theta(\mathcal{P})$ s'injecte dans $\mathrm{Out}(F)$ et soit constitué d'automorphismes tous à croissance polynômiale. Soit μ une mesure de probabilité non dégénérée sur G ayant un premier moment fini. Alors il existe une unique probabilité μ-stationnaire λ sur ∂F et le G-espace $(\partial F, \lambda)$ est le bord de Poisson de (G, μ).*

Si $\theta(\mathcal{P})$ est trivial dans $\mathrm{Out}(F)$ alors G est isomorphe à un produit direct $F \times F'$ où F' est un groupe libre de type fini. En modifiant la preuve du théorème 4.3 on obtient :

Théorème 4.4. *Soit $G = F \times F'$ le produit direct de deux groupes libres de type fini. Considérons l'action à gauche de G sur ∂F donnée par un morphisme injectif fixé $F' \hookrightarrow \mathrm{Inn}(F)$. Soit μ une mesure de probabilité non dégénérée sur G ayant un premier moment fini. Alors il existe une unique probabilité μ-stationnaire λ sur ∂F et le G-espace $(\partial F, \lambda)$ est le bord de Poisson de (G, μ).*

Les théorèmes 4.3 et 4.4 décrivent le bord de Poisson de tous les groupes $G = F \rtimes_\theta \mathcal{P}$ tels que $\theta(\mathcal{P})$ soit constitué d'automorphismes tous à croissance polynômiale. Nous ne savons pas traiter le cas où $\theta(\mathcal{P})$ contient des automorphismes à croissance exponentielle.

Donnons deux exemples d'extensions $G = F \rtimes_\theta \mathcal{P}$ telles que $\theta(\mathcal{P})$ soit constitué d'automorphismes tous à croissance polynômiale. On note $\mathbb{F}_d$ le groupe libre de rang d. Dans le premier exemple, $\theta(\mathcal{P})$ est isomorphe à $\mathbb{F}_2$. Dans le deuxième exemple, il est isomorphe à $\mathbb{Z}^2$.

Tout d'abord, soit $\mathbb{F}_3 = \langle a, b, c \rangle$ et $\mathcal{U} := \mathbb{F}_2 = \langle t_1, t_2 \rangle$. On considère les deux automorphismes $\theta(t_1) := \alpha \in \mathrm{Aut}(\mathbb{F}_3)$ et $\theta(t_2) := \beta \in \mathrm{Aut}(\mathbb{F}_3)$ définis par :

(1) $\alpha(a) = a$, $\alpha(b) = b$ and $\alpha(c) = ca$.

(2) $\beta(a) = a$, $\beta(b) = b$ and $\beta(c) = cb$.

Le morphisme $\theta\colon \mathcal{U} \to \mathrm{Aut}(\mathbb{F}_3)$ est injectif, *i.e.* $\langle \alpha, \beta \rangle$ est un sous-groupe libre de rang 2 de $\mathrm{Aut}(\mathbb{F}_3)$. En effet, pour tout mot réduit non trivial u en $\alpha^{\pm 1}, \beta^{\pm 1}$, le mot $u(c)$ est non-trivial. Il n'y a donc pas de relation non triviale entre $\alpha^{\pm 1}$ et $\beta^{\pm 1}$.

Le sous-groupe $\langle \alpha, \beta \rangle$ est constitué d'automorphismes tous à croissance polynômiale, car a et b ont une croissance nulle sous l'action de α et β, donc sous l'action de n'importe quel $u \in \mathcal{U}$, tandis que c a une croissance linéaire. En conséquence, pour tout élément $w \in \mathbb{F}_3$ la longueur de $u(w)$ croît au plus linéairement par rapport à $|u|_{\langle a,b,c \rangle}$.

Le deuxième exemple est également très simple à construire. Soit α l'automorphisme de $\mathbb{F}_2 = \langle a, b\rangle$ défini par $\alpha(a) = a$, $\alpha(b) = ab$. Cet automorphisme est à croissance polynômiale. On considère alors le groupe libre $\mathbb{F}_4 = \langle a_1, b_1, a_2, b_2\rangle$ et les automorphismes α_1, α_2 de $\mathbb{F}_4$ définis par

$$\alpha_i(a_i) = a_i \text{ pour } i = 1 \text{ et } 2$$

$$\alpha_i(b_i) = b_i a_i$$

$$\alpha_i(b_j) = b_j \text{ si } i \neq j.$$

Le groupe $\langle \alpha_1, \alpha_2\rangle \sim \mathbb{Z}^2$ est un sous-groupe d'automorphismes à croissance polynômiale de $\mathbb{F}_4$.

Remarque 4.5. Dans le groupe $G = \mathbb{F}_4 \rtimes \mathbb{Z}^2$, considérons la mesure uniforme μ sur l'ensemble $\{a_1, b_1, a_2, b_2, \alpha_1, \alpha_2\}^{\pm 1}$. Alors μ est une probabilité non dégénérée sur $G = \mathbb{F}_4 \rtimes \mathbb{Z}^2$ et la marche aléatoire sur G de loi μ se projette sur la marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}^2$ qui est récurrente. La mesure de premier retour μ^0 est potentiellement encore plus étalée que dans le cas de $\mathbb{F}_4 \rtimes \mathbb{Z}$. Il résulte du théorème 4.3 (et du lemme 4.1) que le bord de Poisson de $(\mathbb{F}_4, \mu^0)$ est $(\partial\mathbb{F}_4, \lambda)$ où λ est l'unique mesure μ^0-stationnaire sur $\partial\mathbb{F}_4$.

4.3. **Extensions cycliques de certains groupes hyperboliques sans torsion.** Il s'agit d'une autre généralisation du théorème 4.2. Soit G une extension cyclique d'un groupe hyperbolique Γ. Il existe un automorphisme α de Γ tel que le groupe G soit isomorphe au produit semi-direct $\Gamma \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$. Comme dans le cas du groupe libre, l'action de G sur Γ par automorphismes intérieurs s'étend en une action par homéomorphismes sur sur le bord géométrique $\partial\Gamma$ de Γ. On a :

Théorème 4.6. *Soit Γ un groupe hyperbolique sans torsion ayant une infinité de bouts. Soit $G = \Gamma \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$ une extension cyclique de Γ. Soit μ une mesure de probabilité non dégénérée sur G ayant un premier moment fini. Alors il existe une unique probabilité μ-stationnaire λ sur $\partial\Gamma$ et le G-espace $(\partial\Gamma, \lambda)$ est le bord de Poisson de (G, μ).*

On a la même conclusion si Γ est le groupe fondamental $\pi_1(S)$ d'une surface compacte sans bord S de genre ≥ 2 et si α est un automorphisme à croissance exponentielle de Γ.

Il est bien connu qu'un automorphisme du groupe fondamental d'une surface compacte sans bord S de genre ≥ 2 possède une croissance ou bien linéaire, ou bien exponentielle. Nous ne savons malheureusement pas traiter le cas où $G = \pi_1(S) \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$ si α a une croissance linéaire non nulle.

Références

[1] A. Ancona. Théorie du potentiel sur les graphes et les variétés. In *École d'été de Probabilités de Saint-Flour XVIII—1988*, volume 1427 of *Lecture Notes in Math.*, pages 1–112. Springer, Berlin, 1990.

[2] E. Artin. Theorie der Zöpfe. *Abhandlungen Hamburg*, 4 :47–72, 1925.

[3] André Avez. Entropie des groupes de type fini. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B*, 275 :A1363–A1366, 1972.

[4] Werner Ballmann. On the Dirichlet problem at infinity for manifolds of nonpositive curvature. *Forum Math.*, 1(2) :201–213, 1989.

[5] Werner Ballmann and François Ledrappier. The Poisson boundary for rank one manifolds and their cocompact lattices. *Forum Math.*, 6(3) :301–313, 1994.

[6] Richard Bellman. Limit theorems for non-commutative operations. I. *Duke Math. J.*, 21 :491–500, 1954.

[7] Mladen Bestvina and Michael Handel. Train tracks and automorphisms of free groups. *Ann. of Math. (2)*, 135(1) :1–51, 1992.

[8] Donald I. Cartwright and Stanley Sawyer. The Martin boundary for general isotropic random walks in a tree. *J. Theoret. Probab.*, 4(1) :111–136, 1991.

[9] Donald I. Cartwright and P. M. Soardi. Convergence to ends for random walks on the automorphism group of a tree. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 107(3) :817–823, 1989.

[10] Gustave Choquet and Jacques Deny. Sur l'équation de convolution $\mu = \mu * \sigma$. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 250 :799–801, 1960.

[11] Yves Colin de Verdière and Frédéric Mathéus. Empilements de cercles et approximations conformes. In *Actes de la Table Ronde de Géométrie Différentielle (Luminy, 1992)*, volume 1 of *Sémin. Congr.*, pages 253–272. Soc. Math. France, Paris, 1996.

[12] Yves Derriennic. Marche aléatoire sur le groupe libre et frontière de Martin. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete*, 32(4) :261–276, 1975.

[13] Yves Derriennic. Quelques applications du théorème ergodique sous-additif. In *Conference on Random Walks (Kleebach, 1979) (French)*, volume 74 of *Astérisque*, pages 183–201, 4. Soc. Math. France, Paris, 1980.

[14] E. B. Dynkin and M. B. Maljutov. Random walk on groups with a finite number of generators. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 137 :1042–1045, 1961.

[15] Alex Furman. Random walks on groups and random transformations. In *Handbook of dynamical systems, Vol. 1A*, pages 931–1014. North-Holland, Amsterdam, 2002.

[16] H. Furstenberg and H. Kesten. Products of random matrices. *Ann. Math. Statist.*, 31 :457–469, 1960.

[17] Harry Furstenberg. A Poisson formula for semi-simple Lie groups. *Ann. of Math. (2)*, 77 :335–386, 1963.

[18] Harry Furstenberg. Poisson boundaries and envelopes of discrete groups. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 73 :350–356, 1967.

[19] Harry Furstenberg. Random walks and discrete subgroups of Lie groups. In *Advances in Probability and Related Topics, Vol. 1*, pages 1–63. Dekker, New York, 1971.

[20] Harry Furstenberg. Boundary theory and stochastic processes on homogeneous spaces. In *Harmonic analysis on homogeneous spaces (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XXVI, Williams Coll., Williamstown, Mass., 1972)*, pages 193–229. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1973.

[21] F. A. Garside. The braid group and other groups. *Quart. J. Math. Oxford Ser. (2)*, 20, 1969.

[22] François Gautero and Frédéric Mathéus. Poisson boundary of groups acting on real trees. *Israel J. Math.*, 2011. A paraître. arXiv :0911.0616v3.

[23] François Gautero. Hyperbolicity of mapping-torus groups and spaces. *Enseign. Math. (2)*, 49(3-4) :263–305, 2003.

[24] É. Ghys and P. de la Harpe, editors. *Sur les groupes hyperboliques d'après Mikhael Gromov*, volume 83 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1990. Papers from the Swiss Seminar on Hyperbolic Groups held in Bern, 1988.

[25] M. Gromov. Hyperbolic groups. In *Essays in group theory*, volume 8 of *Math. Sci. Res. Inst. Publ.*, pages 75–263. Springer, New York, 1987.

[26] Y. Guivarc'h. Sur la loi des grands nombres et le rayon spectral d'une marche aléatoire. In *Conference on Random Walks (Kleebach, 1979) (French)*, volume 74 of *Astérisque*, pages 47–98, 3. Soc. Math. France, Paris, 1980.

[27] Y. Guivarc'h and A. Raugi. Frontière de Furstenberg, propriétés de contraction et théorèmes de convergence. *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete*, 69(2) :187–242, 1985.

[28] Y. Guivarc'h and A. Raugi. Products of random matrices : convergence theorems. In *Random matrices and their applications (Brunswick, Maine, 1984)*, volume 50 of *Contemp. Math.*, pages 31–54. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1986.

[29] Susan Hermiller, Derek F. Holt, and Sarah Rees. Groups whose geodesics are locally testable. *Internat. J. Algebra Comput.*, 18(5) :911–923, 2008.

[30] V. A. Kaĭmanovich and A. M. Vershik. Random walks on discrete groups : boundary and entropy. *Ann. Probab.*, 11(3) :457–490, 1983.

[31] Vadim Kaimanovich. The Poisson boundary of covering Markov operators. *Israel J. Math.*, 89(1-3) :77–134, 1995.

[32] Vadim A. Kaimanovich. Communication personnelle.

[33] Vadim A. Kaimanovich. Poisson boundaries of random walks on discrete solvable groups. In *Probability measures on groups, X (Oberwolfach, 1990)*, pages 205–238. Plenum, New York, 1991.

[34] Vadim A. Kaimanovich. The Poisson boundary of hyperbolic groups. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 318(1) :59–64, 1994.

[35] Vadim A. Kaimanovich. The Poisson formula for groups with hyperbolic properties. *Ann. of Math. (2)*, 152(3) :659–692, 2000.

[36] H. Kesten. The Martin boundary of recurrent random walks on countable groups. In *Proc. Fifth Berkeley Sympos. Math. Statist. and Probability (Berkeley, Calif., 1965/66)*, pages Vol. II : Contributions to Probability Theory, Part 2, pp. 51–74. Univ. California Press, Berkeley, Calif., 1967.

[37] Harry Kesten. Symmetric random walks on groups. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 92 :336–354, 1959.

[38] François Ledrappier. Some asymptotic properties of random walks on free groups. In *Topics in probability and Lie groups : boundary theory*, volume 28 of *CRM Proc. Lecture Notes*, pages 117–152. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2001.

[39] François Ledrappier. Analyticity of the entropy for some random walks. 2010. arXiv :1009.5354.

[40] François Ledrappier. Regularity of the entropy for random walks on hyperbolic groups. 2011. arXiv :1110.3156.

[41] Vincent Leprince. Marches aléatoires sur un groupe : Propriétés dimensionnelles de la mesure harmonique. Université Rennes I, 2004.

[42] Gilbert Levitt. Counting growth types of automorphisms of free groups. *Geom. Funct. Anal.*, 19(4) :1119–1146, 2009.

[43] Douglas Lind and Brian Marcus. *An introduction to symbolic dynamics and coding*. Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[44] Jean Mairesse. Random walks on groups and monoids with a Markovian harmonic measure. *Electron. J. Probab.*, 10 :1417–1441 (electronic), 2005.

[45] Jean Mairesse and Frédéric Mathéus. Random walks on groups with a tree-like Cayley graph. In *Mathematics and computer science. III*, Trends Math., pages 445–460. Birkhäuser, Basel, 2004.

[46] Jean Mairesse and Frédéric Mathéus. Growth series for Artin groups of dihedral type. *Internat. J. Algebra Comput.*, 16(6) :1087–1107, 2006.

[47] Jean Mairesse and Frédéric Mathéus. Random walks on free products of cyclic groups. *J. Lond. Math. Soc. (2)*, 75(1) :47–66, 2007.

[48] Jean Mairesse and Frédéric Mathéus. Randomly growing braid on three strands and the manta ray. *Ann. Appl. Probab.*, 17(2) :502–536, 2007.

[49] G. A. Margulis. *Discrete subgroups of semisimple Lie groups*, volume 17 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)]*. Springer-Verlag, Berlin, 1991.

[50] F. Mathéus. Empilements de cercles et discrétisation quasiconforme : comportement asymptotique des rayons. *Discrete Comput. Geom.*, 22(1) :41–61, 1999.

[51] Frédéric Mathéus. Rigidité des empilements infinis immergés proprement dans le plan et dans le disque. In *Séminaire de Théorie Spectrale et Géométrie, No. 12, Année 1993–1994*, volume 12 of *Sémin. Théor. Spectr. Géom.*, pages 69–85.

[52] Frédéric Mathéus. Empilements de cercles et représentations conformes : une nouvelle preuve du théorème de Rodin-Sullivan. *Enseign. Math. (2)*, 42(1-2) :125–152, 1996.

[53] S. K. Nechaev. *Statistics of knots and entangled random walks*. World Scientific Publishing Co. Inc., River Edge, NJ, 1996. Translated from the Russian manuscript.

[54] Sergei Nechaev and Raphaël Voituriez. Random walks on three-strand braids and on related hyperbolic groups. *J. Phys. A*, 36(1) :43–66, 2003.

[55] Lucas Sabalka. Geodesics in the braid group on three strands. In *Group theory, statistics, and cryptography*, volume 360 of *Contemp. Math.*, pages 133–150. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2004.

[56] Stanley Sawyer and Tim Steger. The rate of escape for anisotropic random walks in a tree. *Probab. Theory Related Fields*, 76(2) :207–230, 1987.

[57] Michael Stoll. Rational and transcendental growth series for the higher Heisenberg groups. *Invent. Math.*, 126(1) :85–109, 1996.

[58] A. M. Vershik. Dynamic theory of growth in groups : entropy, boundaries, examples. *Uspekhi Mat. Nauk*, 55(4(334)) :59–128, 2000.

[59] A. M. Vershik and A. V. Malyutin. The boundary of the braid group and the Markov-Ivanovsky normal form. *Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat.*, 72(6) :105–132, 2008.

[60] Cormac Walsh. Busemann points of Artin groups of dihedral type. *Internat. J. Algebra Comput.*, 19(7) :891–910, 2009.

[61] Wolfgang Woess. A description of the Martin boundary for nearest neighbour random walks on free products. In *Probability measures on groups, VIII (Oberwolfach, 1985)*, volume 1210 of *Lecture Notes in Math.*, pages 203–215. Springer, Berlin, 1986.

[62] Wolfgang Woess. Boundaries of random walks on graphs and groups with infinitely many ends. *Israel J. Math.*, 68(3) :271–301, 1989.

[63] Wolfgang Woess. Fixed sets and free subgroups of groups acting on metric spaces. *Math. Z.*, 214(3) :425–439, 1993.

[64] Wolfgang Woess. *Random walks on infinite graphs and groups*, volume 138 of *Cambridge Tracts in Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2000.

Frédéric Mathéus, Université de Bretagne-Sud, L.M.A.M., Campus de Tohannic BP 573, 56017 Vannes, France

E-mail address: Frederic.Matheus@univ-ubs.fr