Université de Bretagne-Sud

L3 Mathématiques, parcours Statistique

Statistique Mathématique
Travaux Dirigés - Partie 3

Exercice 1

Dans cet exercice, $X_1, \ldots, X_n$ sont des v.a.r. i.i.d. de densité $f_\theta(x)$ ou de fonction de masse $p_\theta(x)$. On souhaite déterminer l'EMV de θ dans chacun des cas.

(a) $\mathcal{P}(\theta)$, $\theta > 0$ (loi de Poisson).

(b) $f_\theta(x) = \theta x^{\theta-1}$ $(0 < x < 1,\ \theta > 0)$. La probabilité est concentrée près de l'origine lorsque $\theta < 1$ et près de 1 lorsque $\theta > 1$.

(c) $\mathcal{E}(\theta)$, $\theta > 0$ (Loi exponentielle), c'est-à-dire $f_\theta(x) = (1/\theta)e^{-x/\theta}$.

(d) $f_\theta(x) = (1/2)e^{-|x-\theta|}$, où x et θ sont des réels quelconques.

(e) $f_\theta(x) = e^{-(x-\theta)}$, où θ est un réel quelconque et $x \geq \theta$.

Exercice 2

Soient $X_1, \ldots, X_n$ des v.a.r. i.i.d., chacune distribuée uniformément entre $\theta - (1/2)$ et $\theta + (1/2)$. Déterminer plus d'un EMV de θ (cela montre que les EMV ne sont pas nécessairement uniques).

Exercice 3

Dans chacun des cas de l'exercice 1, calculer $\mathbb{E}(X_i)$ et obtenir un estimateur des moments de θ en posant l'égalité entre cette espérance et la moyenne arithmétique de l'échantillon. Montrer, dans chaque cas, que l'estimateur est consistant.

Exercice 4

Soit X de loi exponentielle de paramètre θ, comme dans le cas (c) de l'exercice 1. Pour $r > 0$, déterminer l'EMV de $\mathbb{P}(X \leq r)$.

Exercice 5

Soit X de loi binomiale de paramètres (n, θ) et soient a, b des entiers tels que $0 \leq a \leq b \leq n$. Déterminer l'EMV de $\mathbb{P}(a \leq X \leq b)$.

Exercice 6

Dans le cas d'un échantillon gaussien associé à la loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, on suppose que σ^2 est connue. Expliquer comment calculer la longueur de l'intervalle de confiance pour μ.

Exercice 7

Dans le cas d'un échantillon gaussien associé à la loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, on suppose que σ^2 est inconnue. Expliquer comment calculer la longueur de l'intervalle de confiance pour μ en fonction de l'écart-type empirique S.

Exercice 8

Dans le cas d'un échantillon gaussien associé à la loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, on suppose que σ^2 est inconnue. Expliquer comment calculer l'espérance de la longueur de l'intervalle de confiance pour μ en fonction de l'écart-type inconnu σ.

Exercice 9

Soit $X_1, \ldots, X_n$ un échantillon i.i.d. associé à la loi gamma de paramètres α et β. On suppose α connu. Expliquer comment calculer un intervalle de confiance pour l'espérance $\mu = \alpha\beta$.

Exercice 10

Dans le cas d'une élection (échantillon binomial associé à la loi $\mathcal{B}(n, p)$), supposons qu'on spécifie le niveau de confiance et la longueur de l'intervalle de confiance pour le paramètre p. Expliquer comment calculer la valeur minimale de n.