Statistique Mathématique

Salim Lardjane

Université Bretagne Sud

Partie V
Estimation Bayésienne

Estimation Bayésienne

On souhaite estimer un état de la Nature θ.

On observe une réalisation x d'une variable ou d'un vecteur aléatoire X, où X est de densité de probabilité $f_\theta(x)$, et on prend la décision $\delta(x)$.

$\delta(x)$ est notre estimation de θ.

On quantifie la perte associée à la décision $\delta(x)$ à l'aide de la *fonction de perte* :

$$L(\theta, \delta(x))$$

supposée positive.

Estimation Bayésienne

On suppose à présent que θ *est aléatoire* de densité $h(\theta)$.

L'approche bayésienne consiste à minimiser le *risque bayésien* ou *perte moyenne* :

$$B(\delta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\theta) f_\theta(x) L(\theta, \delta(x)) d\theta dx$$

de façon à déterminer δ .

Notons que $h(\theta) f_\theta(x) = h(\theta) f(x|\theta)$ est la *densité conjointe* de θ et X.

Cette dernière peut également être mise sous la forme $f(x) f(\theta|x)$.

Estimation Bayésienne

Ainsi,

$$B(\delta) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} L(\theta, \delta(x)) f(\theta|x) d\theta \right] dx$$

Comme $f(x)$ est positive, il suffit de minimiser

$$\int_{-\infty}^{+\infty} L(\theta, \delta(x)) f(\theta|x) d\theta$$

en $\delta(x)$, *pour chaque valeur de* x.

On obtient ainsi une règle de décision δ qui permet de calculer des *estimations bayésiennes* de θ.

Estimation Bayésienne

De façon analogue, pour estimer une fonction $\gamma(\theta)$ de θ, on minimise :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} L(\gamma(\theta), \delta(x)) f(\theta|x) d\theta.$$

On peut résumer l'approche en disant qu'on observe une variable aléatoire X et qu'on veut estimer une variable aléatoire Y par une fonction de X, de la forme $g(X)$.

Pour déterminer g, on doit minimiser $\mathbb{E}[L(Y, g(X)]$.

Fonction de perte quadratique

On suppose à présent que

$$L(Y, g(X)) = (Y - g(X))^2.$$

En vertu d'un résultat classique de Théorie des Probabilités, on peut écrire :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y - g(X))^2 &= \mathbb{E}\left(\mathbb{E}[(Y - g(X))^2|X]\right) \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{E}[(Y - g(X))^2|X = x]f(x)dx.
\end{aligned}$$

Comme précédemment, il suffit de minimiser l'espérance conditionnelle pour chaque valeur de x.

Fonction de perte quadratique

Si on note $z = g(x)$, on minimise en z :

$$z^2 - 2\mathbb{E}[Y|X = x]z + \mathbb{E}[Y^2|X = x].$$

Or $Az^2 - 2Bz + C$ est minimal lorsque $z = B/A = \mathbb{E}(Y|X = x)/1$, d'où le résultat suivant.

Théorème. $\mathbb{E}[(Y - g(X))^2|X = x]$ *est minimale lorsque* $g(x) = \mathbb{E}(Y|X = x)$.

Fonction de perte quadratique

L'estimation bayésienne est alors donnée par :

$$\delta(x) = \mathbb{E}[\theta | X = x] = \int_{-\infty}^{+\infty} \theta f(\theta | x) d\theta$$

où, d'après le Théorème de Bayes,

$$f(\theta | x) = \frac{f(\theta, x)}{f(x)} = \frac{h(\theta) f(x | \theta)}{f(x)}.$$

Fonction de perte quadratique

Ainsi,

$$\delta(x) = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \theta h(\theta) f_\theta(x) d\theta}{\int_{-\infty}^{+\infty} h(\theta) f_\theta(x) d\theta}$$

Si on souhaite estimer une fonction $\gamma(\theta)$ de θ, il suffit de remplacer θ par $\gamma(\theta)$ dans le numérateur.

Des exemples d'estimation bayésienne seront vus en TD.